Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova di accertamento del 15 gennaio 1999 – Compito A

ESERCIZIO 1. *Si considerino, al variare di t in $\mathbb{R}$, i vettori* $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ t-3 \\ t+1 \end{pmatrix}$ *ed* $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Si dica per quali valori del parametro t i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ sono linearmente dipendenti e si determini, in tal caso, una base del sottospazio $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \rangle$.

(b) Sia $t = 3$ e si esprima (se possibile) il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$.

Svolgimento. (a). Se $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sono linearmente indipendenti (cioè se non sono paralleli), allora $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ è diverso dal vettore nullo e perpendicolare al piano generato dai primi due e quindi i tre vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ sono linearmente indipendenti. Con il calcolo esplicito del vettore $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2t-2 \\ t-1 \\ 1-t \end{pmatrix}$ si verifica che $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$ sono paralleli solo per $t = 1$. In tal caso, poiché $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$ sono proporzionali e quindi $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \overrightarrow{0}$, il sottospazio generato dai tre vettori si riduce all'insieme dei multipli di $\mathbf{u}_1$, ovvero $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_1 \rangle$.

(b). Sia $t = 3$. Si tratta di trovare i valori dei coefficienti x_1, x_2, x_3 tali che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)$, ovvero di risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{u}_2 + \frac{1}{3}(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)$. □

ESERCIZIO 2. *Calcolare gli autovalori ed i relativi sottospazi di autovettori dell'endomorfismo ϕ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

nella base canonica. Dire in particolare se ϕ è diagonalizzabile.

Svolgimento. Si ha $\det(A - \lambda\mathbf{1}) = (2-\lambda)(3-\lambda)^2$ e quindi gli autovalori sono 2, con molteplicità 1 e 3, con molteplicità 2. I sottospazi di autovettori corrispondenti sono $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Non vi sono quindi tre autovettori linearmente indipendenti e perciò ϕ non è diagonalizzabile. □

ESERCIZIO 3. *Discutere l'insieme delle soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} x & & +2z & = 0 \\ \lambda x & +\lambda y & +2z & = 1 \\ -2x & -2\lambda y & +2z & = 3 \end{cases}$$

al variare del parametro λ in $\mathbb{R}$.

Svolgimento. La matrice completa è equivalente alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda & 2-2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 10-4\lambda & 5 \end{pmatrix}$. Per $\lambda \notin \{0, \frac{5}{2}\}$, matrice completa ed incompleta hanno rango 3 ed il sistema ha quindi un'unica soluzione della forma

$$x = \frac{-5}{5-2\lambda}, \qquad y = \frac{3}{5-2\lambda}, \qquad z = \frac{5}{2(5-2\lambda)} \qquad (0 \neq \lambda \neq \tfrac{5}{2}).$$

Per $\lambda = 0$, matrice completa ed incompleta hanno rango 2, il sistema ha infinite soluzioni $\begin{cases} x &= 1 \\ y &= t \\ z &= \frac{1}{2} \end{cases}$. Per $\lambda = \frac{5}{2}$, la matrice completa ha rango 3, mentre quella incompleta ha rango 2 e quindi il sistema non ha soluzioni. □

ESERCIZIO 4. *Siano date le rette*

$$r : \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \qquad ed \qquad r' : \begin{cases} 2y - z - 1 = 0 \\ x + y - z + 3 = 0 \end{cases},$$

(a) Verificare che r ed r' sono incidenti e determinarne il punto P di intersezione.
(b) Determinare i punti Q_1 e Q_2 di r' tali che i coni ottenuti dalla rotazione dei segmenti PQ_1 e PQ_2 attorno alla retta r abbiano volume $6\sqrt{2}\pi$.

Svolgimento. (a). Il punto di intersezione è $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(b). Le rette r ed r' sono parallele, rispettivamente ai vettori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; dunque, detto φ l'angolo tra r e r', abbiamo

$$\cos\varphi = \frac{|\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle|}{\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{v}'\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{e quindi} \qquad \sin\varphi = \sqrt{1 - (\cos\varphi)^2} = \frac{1}{2}.$$

Le equazioni parametriche di r' sono $r' : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$ e quindi, dato un punto Q di r', il segmento PQ ha lunghezza $\|\overrightarrow{PQ}\| = |t|\sqrt{6}$ e quindi il raggio R e l'altezza h del cono generato dalla rotazione del segmento PQ attorno alla retta r sono $R = \|\overrightarrow{PQ}\| \sin\varphi = \frac{|t|\sqrt{6}}{2}$ ed $h = \|\overrightarrow{PQ}\| \cos\varphi = \frac{3|t|\sqrt{2}}{2}$. Il volume del cono risulta così uguale a

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \pi \frac{3|t|^3}{2\sqrt{2}}$$

che coincide con $6\sqrt{2}\pi$ se $|t| = 2$. I punti cercati sono quindi $Q_1(-3, 1, 1)$ e $Q_2(1, 5, 9)$. □

ESERCIZIO 5. *Date le rette*

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 \end{cases} \qquad ed \qquad r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + 2t \end{cases},$$

determinare:
(a) l'equazione del piano π_1 contenente r_1 e parallelo a r_2.
(b) le equazioni della retta r' proiezione ortogonale di r_2 su π_1.
(c) le equazioni della retta r'' incidente a r_1 e r_2 e perpendicolare ad entrambe

Svolgimento. (a). Un'equazione del fascio di piani contenenti r_1 è $\lambda(x + y - 3) + \mu(z - 2) = 0$. Affinché il generico piano del fascio sia parallelo a r_2, il vettore $\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$, perpendicolare al piano, deve essere perpendicolare al vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, parallelo a r_2. Una soluzione dell'equazione $\left\langle \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ è $\lambda = 2$ e $\mu = -1$ che sostituiti nell'equazione del fascio danno

$$\pi_1 \; : \; 2x + 2y - z - 4 = 0$$

(b). La proiezione ortogonale di r_2 su π_1 si ottiene intersecando π_1 con un piano contenente r_2 e perpendicolare a π_1. Il fascio di piani contenenti r_2 ha equazione $\lambda(x-z)+\mu(x+2y-1)=0$. Il vettore $\begin{pmatrix}\lambda+\mu\\2\mu\\-\lambda\end{pmatrix}$, perpendicolare al generico piano del fascio, deve essere perpendicolare al vettore $\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$, perpendicolare a π_1. Una soluzione dell'equazione $\left\langle\begin{pmatrix}\lambda+\mu\\2\mu\\-\lambda\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right\rangle=0$ è $\lambda=2$ e $\mu=-1$ che sostituiti nell'equazione del fascio danno il piano $\sigma_2 : x-2y-2z+1=0$. Un'equazione di r' è quindi

$$r' : \begin{cases} x-2y-2z+1 &= 0\\ 2x+2y-z-4 &= 0\end{cases}.$$

(c). Il vettore $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ è perpendicolare al piano π_1 e quindi alle rette r_1 e a r_2. Ne consegue che r'' è parallela a $\mathbf{v}$. Il piano $\sigma_2 : x-2y-2z+1=0$ del punto precedente, contiene la retta r_2 ed è parallelo a $\mathbf{v}$, dunque deve contenere la retta r''. Analogamente la retta r'' è contenuta nel piano σ_1 del fascio di asse r_1, parallelo a $\mathbf{v}$. Un generico piano del fascio ha equazione $\lambda(x+y-3)+\mu(z-2)=0$ (cf. il punto (a)) ed il piano σ_1 viene quindi determinato dall'equazione $\left\langle\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\\mu\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle=0$. Una soluzione di questa equazione è $\lambda=1$ e $\mu=4$, che sostituita nell'equazione del fascio dà $\sigma_1 : x+y+4z-11=0$. Dunque, la retta r'' è l'intersezione di σ_1 e σ_2, ovvero

$$r'' : \begin{cases} x+y+4z-11 &= 0\\ -x+2y+2z-1 &= 0\end{cases}$$

Fine della discussione. $\square$

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova di accertamento del 15 gennaio 1999 – Compito B

ESERCIZIO 1. *Si considerino, al variare di t in $\mathbb{R}$, i vettori* $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ t-1 \\ t+1 \end{pmatrix}$ *ed* $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Si dica per quali valori del parametro t i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ sono linearmente dipendenti e si determini, in tal caso, una base del sottospazio $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \rangle$.

(b) Sia $t = 1$ e si esprima (se possibile) il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$.*

Svolgimento. (a). Se $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sono linearmente indipendenti (cioè se non sono paralleli), allora $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ è diverso dal vettore nullo e perpendicolare al piano generato dai primi due e quindi i tre vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ sono linearmente indipendenti. Con il calcolo esplicito del vettore $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} t-3 \\ t-3 \\ 3-t \end{pmatrix}$ si verifica che $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$ sono paralleli solo per $t = 3$. In tal caso, poiché $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$ sono proporzionali e quindi $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \overrightarrow{0}$, il sottospazio generato dai tre vettori si riduce all'insieme dei multipli di $\mathbf{u}_1$, ovvero $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_1 \rangle$.

(*b*). Sia $t = 1$. Si tratta di trovare i valori dei coefficienti x_1, x_2, x_3 tali che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)$, ovvero di risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{u}_2 - \frac{2}{3}(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2)$. □

ESERCIZIO 2. *Calcolare gli autovalori ed i relativi sottospazi di autovettori dell'endomorfismo ϕ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica. Dire in particolare se ϕ è diagonalizzabile.

Svolgimento. Si ha $\det(A - \lambda\mathbf{1}) = (3-\lambda)(2-\lambda)^2$ e quindi gli autovalori sono 3, con molteplicità 1 e 2, con molteplicità 2. I sottospazi di autovettori corrispondenti sono $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. I generatori che abbiamo indicato per i sottospazi sono quindi tre autovettori linearmente indipendenti e perciò ϕ è diagonalizzabile. □

ESERCIZIO 3. *Discutere l'insieme delle soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} x & & +2z & = 1 \\ x & -\lambda y & +(2+\lambda)z & = 1 \\ -2x & -2\lambda y & +2z & = 1 \end{cases}$$

al variare del parametro λ in $\mathbb{R}$.

Svolgimento. La matrice completa è equivalente alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-2\lambda & 3 \end{pmatrix}$. Per $\lambda \notin \{0,3\}$, matrice completa ed incompleta hanno rango 3 ed il sistema ha quindi un'unica soluzione della forma

$$x = \frac{-2\lambda}{6-2\lambda}, \qquad y = \frac{3}{6-2\lambda}, \qquad z = \frac{3}{6-2\lambda} \qquad (0 \neq \lambda \neq 3).$$

Per $\lambda = 0$, matrice completa ed incompleta hanno rango 2, il sistema ha infinite soluzioni $\begin{cases} x &= 0 \\ y &= t \\ z &= \frac{1}{2} \end{cases}$. Per $\lambda = 3$, la matrice completa ha rango 3, mentre quella incompleta ha rango 2 e quindi il sistema non ha soluzioni. □

ESERCIZIO 4. *Siano dati la retta r ed il piano π di equazioni*

$$r : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \qquad e \qquad \pi : x - z - 1 = 0.$$

(a) Determinare il punto P di intersezione tra r e π e l'equazione delle rette r' e r'' contenute in π, passanti per P ed inclinate di $\frac{\pi}{4}$ rispetto ad r.
(b) Determinare inoltre i punti Q_1 e Q_2 di r' tali che i coni ottenuti dalla rotazione dei segmenti PQ_1 e PQ_2 attorno alla retta r abbiano area di base 16π.

Svolgimento. (a). Il punto di intersezione è $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ è un vettore parallelo a r' o a r'', per la condizione $\left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ di parallelismo a π, abbiamo $\alpha = \gamma$. Il vettore $\mathbf{v}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è parallelo a r. La condizione $\widehat{rr'} = \widehat{rr''} = \frac{\pi}{4}$ è equivalente all'equazione

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{|\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_r \rangle|}{||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{v}_r||} = \frac{|\alpha + 2\beta - \gamma|}{\sqrt{6}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} = \frac{|2\beta|}{\sqrt{6}\sqrt{2\alpha^2+\beta^2}}$$

$\alpha = 1$ e $\beta = \pm\sqrt{6}$ sono soluzioni di questa equazione e quindi

$$r' : \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 1+\sqrt{6}t \\ z &= t \end{cases} \qquad r'' : \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 1-\sqrt{6}t \\ z &= t \end{cases}$$

Dato un punto $Q(1+t, 1+\sqrt{6}t, t)$ di r', la lunghezza del segmento PQ è $2\sqrt{2}|t|$ ed il raggio di base del cono è $2\sqrt{2}|t|\sin\frac{\pi}{4} = 2|t|$. L'area di base è $4\pi t^2$ che coincide con 16π se $t = \pm 2$. I punti cercati sono quindi $Q_1 = (3, 1+2\sqrt{6}, 2)$ e $Q_2(-1, 1-2\sqrt{6}, -2)$. □

ESERCIZIO 5. *Dati i piani $\pi_1 : y + z + 1 = 0$ e $\pi_2 : x + y = 0$, determinare:*
(a) le equazioni parametriche della retta r intersezione di π_1 e π_2.
(b) l'equazioni di un piano π_3, diverso da π_2, contenente r e tale che l'angolo tra π_3 e π_1 sia uguale all'angolo tra π_2 e π_1.
(c) l'area del triangolo $A_1A_2A_3$, dove A_1 è il punto $(1,1,-2)$ di π_1 ed A_2 e A_3 sono le proiezioni di A_1 rispettivamente su π_2 e π_3.

Svolgimento. (a). Posto $y = t$ otteniamo $r : \begin{cases} x &= -t \\ y &= t \\ z &= -1-t \end{cases}$

(b). I vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono perpendicolari rispettivamente a π_1 e a π_2. Detto φ l'angolo tra π_1 e π_2, abbiamo

$$\cos\varphi = \frac{|\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle|}{||\mathbf{v}_1|| \cdot ||\mathbf{v}_2||} = \frac{1}{2}$$

Il fascio di piani contenenti r ha equazione $\lambda(x+y) + \mu(y+z+1) = 0$. Detto $\mathbf{v}$ il vettore $\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda+\mu \\ \mu \end{pmatrix}$ perpendicolare al generico piano del fascio, la condizione $\widehat{\pi_1\pi_2} = \widehat{\pi_1\pi_3}$ è equivalente all'equazione

$$\frac{1}{2} = \frac{|\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v} \rangle|}{||\mathbf{v}_1|| \cdot ||\mathbf{v}||} = \frac{|\lambda + 2\mu|}{\sqrt{2}\sqrt{2\lambda^2 + 2\mu^2 + 2\lambda\mu}}$$

che è equivalente a $\mu(\mu+\lambda) = 0$. Per $\mu = 0$ otteniamo il piano π_2. Per $\lambda = -\mu$ otteniamo

$$\pi_3 \; = \; x - z - 1 = 0$$

(c). La retta r_2 perpendicolare a π_2 e passante per A_1 ha equazione $\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 1+t \\ z &= -2 \end{cases}$ e la sua intersezione con π_2 è $A_2 = (0,0,-2)$. Analogamente si trova $A_3 = (0,1,-1)$. I vettori $\overrightarrow{A_1A_2}$ e $\overrightarrow{A_1A_3}$ sono rispettivamente $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e l'area del triangolo $A_1A_2A_3$ è data da

$$\frac{1}{2}||A_1A_2 \times A_1A_3|| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si poteva risolvere il problema anche osservando che il triangolo $A_1A_2A_3$ è isoscele (perché $A_1 \in \pi_1$ e π_2 e π_3 formano uno stesso angolo φ con π_1) e che l'angolo $\psi = \widehat{A_2A_1A_3}$ vale $2(\frac{\pi}{2} - \varphi)$. La lunghezza di A_1A_2 è la distanza $\sqrt{2}$ di A_1 da π_2 ed è uguale alla lunghezza di A_1A_3. L'area del triangolo è quindi

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2(\frac{\pi}{2} - \varphi)) = \sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

tenendo conto che $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ e $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\square$