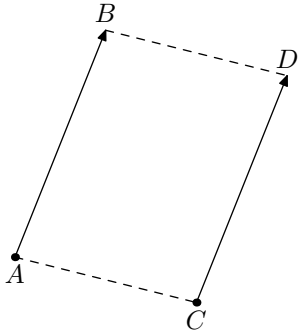
I
Vettori nello Spazio Euclideo

1. Vettori geometrici

In questa sezione vogliamo descrivere un esempio di spazio vettoriale che potrebbe servire da modello su cui interpretare le definizioni più astratte che saranno introdotte nelle sezioni successive. Durante l'esposizione useremo liberamente alcuni concetti e risultati della geometria euclidea, che dovrebbero essere patrimonio comune a tutte le persone istruite.

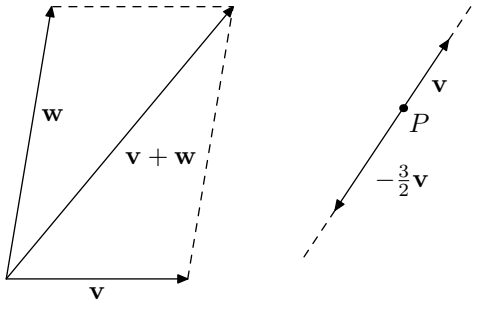
Cominciamo con alcune definizioni. Si chiama *segmento orientato* un segmento su cui sia stato scelto un verso, ovvero su cui si sia fissato un ordine tra i due estremi e scriveremo AB per indicare il segmento orientato che ha A come primo estremo (inizio) e B come secondo estremo (fine). Ciò significa che i segmenti AB e BA, che sono lo stesso insieme di punti, devono essere considerati *diversi* come segmenti orientati, perchè differisce l'ordine con cui si considerano gli estremi. Introduciamo ora una relazione di equivalenza[(*)] nell'insieme dei segmenti orientati.

I segmenti orientati AB e CD sono *equipollenti* se sono paralleli, congruenti e concordi; ovvero se i due segmenti che uniscono gli estremi corrispondenti, AC e BD, sono i lati opposti di un parallelogramma (cf. il disegno a fianco). Non è difficile verificare che si tratta di una relazione di equivalenza nell'insieme dei segmenti orientati e quindi che tale insieme resta suddiviso in classi. Chiameremo *vettore geometrico* ogni classe di equipollenza di segmenti orientati ed useremo il simbolo $\overrightarrow{AB}$ per indicare la classe di tutti i segmenti orientati equipollenti ad AB. Possiamo quindi osservare che l'operazione di "applicare il vettore $\mathbf{v}$ nel punto P" consiste nello scegliere il segmento orientato nella classe $\mathbf{v}$ che abbia il punto P come estremo iniziale.



Vi sono due operazioni naturali nell'insieme dei vettori geometrici: la somma di due vettori ed il prodotto di un vettore per uno scalare.

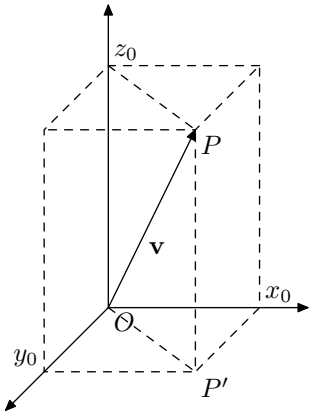
La somma di due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è la diagonale del parallelogramma che si ottiene applicando i due vettori ad uno stesso punto (cf il disegno qui a fianco), mentre il prodotto di un vettore $\mathbf{v}$ per una costante reale α si ottiene modificando la lunghezza di $\mathbf{v}$ per un fattore $|\alpha|$ ed orientando il vettore $\alpha\mathbf{v}$ concordemente o meno con $\mathbf{v}$ a seconda che il segno di α sia positivo o negativo (si veda ad esempio il disegno qui sotto, ove i vettori $\mathbf{v}$ e $-\frac{3}{2}\mathbf{v}$ sono applicati ad uno stesso punto P).



(*) Una *relazione di equivalenza* tra gli elementi di un insieme A, è una relazione $a \sim b$ che sia *riflessiva* ($a \sim a$), *simmetrica* ($a \sim b \Rightarrow b \sim a$) e *transitiva* ($a \sim b$, $b \sim c \Rightarrow a \sim c$). Dare una tale relazione permette di suddividere l'insieme A in *classi di equivalenza*, ovvero i sottoinsiemi del tipo $[a] = \{\, x \in A \mid x \sim a \,\}$; e si ha $[a] \cap [b] \neq \varnothing \Leftrightarrow [a] = [b]$. Questa suddivisione può essere considerata come un modo un po' più rozzo di identificare tra loro gli elementi di A. Ad esempio, avere lo stesso gruppo sanguigno stabilisce una relazione di equivalenza tra gli esseri umani; certamente due persone non sono "uguali" se hanno lo stesso gruppo sanguigno (e quindi stanno nella stessa classe di equivalenza), ma la differenza è trascurabile (o quasi) se il problema è quello di fare una trasfusione.

Le due operazioni sui vettori geometrici godono di alcune proprietà naturali sul cui modello si baserà la successiva definizione di spazio vettoriale astratto (cf. *Definizione II.1.1*).

Se introduciamo delle coordinate nello spazio dei vettori geometrici, possiamo ottenere una descrizione molto esplicita dei vettori e delle operazioni su di essi. Infatti, supponiamo di aver introdotto nello spazio un sistema di coordinate cartesiane O, x, y, z. Allora, possiamo applicare ogni vettore $\mathbf{v}$ nell'origine O del sistema di coordinate ed associare a $\mathbf{v}$ quell'unico punto P tale che $\overrightarrow{OP} = \mathbf{v}$. In tal modo si ottiene una corrispondenza biunivoca tra i vettori geometrici ed i punti dello spazio ed, in particolare, si possono associare ad ogni vettore $\mathbf{v}$ le coordinate $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ del punto P corrispondente. In particolare, si osservi che il vettore $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ è uguale alla somma $\overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'P}$, ove il primo addendo sta sul piano x, y, mentre il secondo è parallelo all'asse z. D'altra parte anche $\overrightarrow{OP'}$ è uguale alla somma delle sue proiezioni sugli assi x ed y e quindi possiamo scrivere



$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Da questa decomposizione e dalle ovvie osservazioni sulla somma di vettori paralleli, si conclude che,

$$\text{dati i vettori } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \text{si ha} \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 \\ y_0 + y_1 \\ z_0 + z_1 \end{pmatrix},$$

ovvero che la somma dei vettori geometrici fatta con la regola del parallelogramma corrisponde alla somma delle corrispondenti coordinate. Inoltre, da facili considerazioni sui triangoli simili, discende che

$$\text{dati lo scalare } \alpha \text{ ed il vettore } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \text{si ha} \quad \alpha\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha x_0 \\ \alpha y_0 \\ \alpha z_0 \end{pmatrix}.$$

Ciò significa che, aver fissato un sistema di coordinate cartesiane ci permette di stabilire una corrispondenza biunivoca tra lo spazio dei vettori geometrici e l'insieme $\mathbb{R}^3$ delle terne di numeri reali e che in questa corrispondenza le operazioni sui vettori geometrici si trasformano nelle operazioni naturali sulle coordinate delle terne. È però necessario osservare che la corrispondenza appena descritta *dipende* dalla scelta del sistema di coordinate, ovvero diversi sistemi di riferimento possono associare coordinate diverse allo stesso vettore $\mathbf{v}$, e non c'è, in generale, un sistema di riferimento che si possa considerare canonico o da privilegiare sugli altri.

Dunque la scelta di un sistema di coordinate è un fatto arbitrario, mentre le operazioni definite sui vettori –che pure si possono facilmente calcolare tramite le coordinate– sono definite intrinsecamente a partire dalla natura geometrica degli oggetti. Da una parte, questo pone l'interrogativo di capire quali siano le proprietà geometriche intrinseche dei vettori, ovvero quelle che si mantengono indipendentemente dalla scelta delle coordinate; dall'altra, la natura geometrica dei vettori permette di scegliere in ogni occasione il sistema di coordinate più adatto al problema che si ha di fronte. Senza alcuna intenzione di fare uno studio sistematico, vogliamo mostrare qualche esempio di come si esprimano tramite le coordinate delle relazioni geometriche tra vettori.

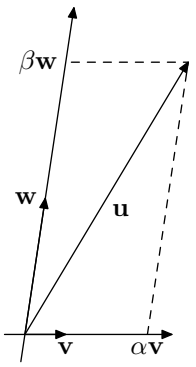
Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono due vettori paralleli, allora se vengono applicati entrambi all'origine, i due segmenti giacciono sulla stessa retta e ciò significa che le coordinate dei due vettori sono proporzionali. Se $\mathbf{v} \neq 0$,

possiamo quindi affermare che $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono paralleli (e scriveremo $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w}$) se, e solo se, $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v}$ per un'opportuna costante α. Più in generale, possiamo quindi scrivere che

$$\mathbf{v} \parallel \mathbf{w} \Leftrightarrow \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = 0,\ \exists\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0);$$

ed osserviamo che questa formulazione va bene anche nel caso in cui $\mathbf{v} = 0$, perchè il vettore nullo si può considerare parallelo ad ogni altro vettore.

Consideriamo ora tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ e supponiamo che non siano a due a due paralleli, chè altrimenti ricadiamo nel caso appena discusso. Supponiamo quindi che $\mathbf{v}$ non sia parallelo a $\mathbf{w}$ e che i tre vettori, una volta applicati nell'origine, giacciano tutti e tre in uno stesso piano. Allora (cf. il disegno qui a fianco) il vettore $\mathbf{u}$ si decompone secondo le direzioni parallele a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ ed esistono quindi degli scalari α e β tali che $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$. Più in generale, possiamo quindi scrivere che



$$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ sono complanari } \Leftrightarrow \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} + \gamma\mathbf{u} = 0,\ \exists\,(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0);$$

ed osserviamo che questa formulazione va bene anche nel caso in cui i tre vettori siano paralleli tra loro.

Possiamo concludere queste prime osservazioni, rimarcando l'importanza ed il significato che vengono ad assumere le relazioni lineari tra vettori, che saranno onnipresenti nelle discussioni sugli spazi vettoriali astratti.

Esercizio 1.1. Nel piano $\mathbb{R}^2$, si considerino i vettori $\mathbf{v} = \binom{1}{2}$ e $\mathbf{w} = \binom{-1}{1}$.

(a) Si mostri che ogni vettore $\mathbf{x} = \binom{x_1}{x_2}$ del piano $\mathbb{R}^2$ si scrive (in modo unico) come combinazione lineare di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

(b) Si disegnino i sottoinsiemi del piano formati dagli estremi finali dei vettori (applicati nell'origine ed) appartenenti rispettivamente a
- $C = \{\ \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \mid\ \alpha, \beta \in [0, +\infty)\ \}$;
- $R = \{\ \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \mid\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = 1\ \}$;
- $S = \{\ \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \mid\ \alpha, \beta \in [0,1], \alpha + \beta = 1\ \}$;
- $P = \{\ \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \mid\ \alpha, \beta \in [0,1]\ \}$;
- $T = \{\ \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \mid\ \alpha, \beta \in [0,1], \alpha + \beta \leq 1\ \}$. □

Esercizio 1.2. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, si considerino i vettori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e si disegnino gli analoghi sottoinsiemi dell'esercizio precedente.

(a) Si consideri il vettore $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e si mostri che $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono complanari.

(b) Si verifichi che ogni vettore $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ che sia combinazione lineare di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ soddisfa all'equazione $4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

(c) Sia $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ una soluzione dell'equazione $4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, si determinino delle costanti α e β tali che $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$. □

Esercizio 1.3. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, si considerino i vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Si scrivano esplicitamente le componenti del vettore $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$.

(b) Si verifichi che se $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, deve aversi necessariamente $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

(c) Si determinino α, β, e γ quando $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(d) Si provino a scrivere α, β, e γ come funzioni delle componenti di un generico vettore $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$. □

Esercizio 1.4. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, si considerino i vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Si scrivano esplicitamente le componenti del vettore $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$.

(b) Si verifichi che vi sono infiniti valori di α, β, e γ tali che $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Si determinino tutti i valori di α, β, e γ tali che $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) Si verifichi che non esistono dei valori di α, β, e γ tali che $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 1.5. Siano dati quattro vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ di modo che, applicati ad uno stesso punto, i loro estremi finali siano i quattro vertici consecutivi di un parallelogramma.

(a) Si verifichi che $(\mathbf{v} - \mathbf{u}) - (\mathbf{w} - \mathbf{u}) + (\mathbf{z} - \mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

(b) Si verifichi che $\mathbf{u} + \frac{1}{2}(\mathbf{w} - \mathbf{u}) = \mathbf{v} + \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{v})$ e si dia un'interpretazione geometrica di questa identità. □

2. Sottospazi e dipendenza lineare.

Nella sezione precedente, abbiamo visto come, con l'introduzione di un sistema di coordinate, si possano identificare i vettori geometrici dello spazio con l'insieme $\mathbb{R}^3$ delle terne di numeri reali e come le operazioni tra vettori corrispondano alle operazioni naturali tra terne. Analogamente, potevamo identificare i vettori geometrici del piano con $\mathbb{R}^2$. Più in generale, possiamo considerare l'insieme $\mathbb{R}^n$ delle n-uple di numeri reali, dove n è un qualunque intero positivo (fissato) con le operazioni naturali di somma tra le n-uple e di prodotto di una n-upla per uno scalare, ovvero

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

qualunque siano $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ e lo scalare $\alpha \in \mathbb{R}$. Per analogia con quanto visto in precedenza, ci riferiremo a questo insieme chiamandolo lo *spazio vettoriale* $\mathbb{R}^n$ e chiamando *vettori* i suoi elementi.

2.1 Definizione. Un sottoinsieme (non-vuoto) W di $\mathbb{R}^n$ è un *sottospazio* se, presi comunque dei vettori $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ di W e degli scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ il vettore $\alpha_1\mathbf{w}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{w}_k$ appartiene a W.

2.2 Esempi. (*a*). Il sottoinsieme $\{0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ ed anche $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio di sé stesso. Questi due sottospazi sono detti i *sottospazi banali* di $\mathbb{R}^n$. Il sottoinsieme $\mathbb{R}^n$ formato dai vettori $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, per cui $x_n = 0$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (che può essere identificato con $\mathbb{R}^{n-1}$). Più in generale, fissato un intero $1 \leq k \leq n$, il sottoinsieme $\mathbb{R}^n$ formato dai vettori $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, per cui $x_k = x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

(*b*). Dato un vettore $\mathbf{v}$, il sottoinsieme

$$\langle v \rangle = \{\, \alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R} \,\}$$

è un sottospazio. In particolare, osserviamo che nello spazio dei vettori geometrici il sottospazio $\langle \mathbf{v} \rangle$ si identifica con la retta per l'origine parallela al vettore $\mathbf{v}$.

(c). Consideriamo ora lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ ed il sottoinsieme

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x - 3y + z = 0 \right\}.$$

Si tratta di un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Infatti, se $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ sono in π, allora anche $v_1 - v_2 = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}$ appartiene a π, perchè

$$2(x_1 - x_2) - 3(y_1 - y_2) + (z_1 - z_2) = (2x_1 - 3y_1 + z_1) - (2x_2 - 3y_2 + z_2) = 0;$$

e inoltre, se $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\alpha v = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$ appartiene a π, perchè

$$2(\alpha x) - 3(\alpha y) + (\alpha z) = \alpha(2x - 3y + z) = 0.$$

Esercizio 2.1. Si verifichi che il sottoinsieme

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \right\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e che si ha $r = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. □

Esercizio 2.2. Si verifichi che il sottoinsieme

$$\mathscr{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$. □

2.3 Definizione. Dati k vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ di $\mathbb{R}^n$, si chiama *sottospazio generato* da $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ l'insieme delle combinazioni lineari $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k$, al variare degli scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.3. Si verifichi che $\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. □

Esercizio 2.4. In $\mathbb{R}^3$ si verifichi che $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0 \right\}$. □

Esercizio 2.5. Si mostri che in $\mathbb{R}^4$ si ha

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_2 = 0 \right\}.$$

□

Esercizio 2.6. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e si verifichi che $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$. Si mostri che ogni vettore di questo sottospazio si scrive in modo unico come combinazione di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, mentre vi sono infiniti modi di scriverlo come combinazione di $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_3$. □

Esercizio 2.7. In $\mathbb{R}^3$ si consideri il sottoinsieme S dei vettori $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ che soddisfano alle equazioni

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = \alpha \\ 2x_1 - x_3 = \beta \end{cases}.$$

(a) Si diano delle condizioni necessarie e sufficienti sulle costanti α e β affinchè S sia un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e si determinino tutti i vettori di codesto sottospazio.
(b) Si determinino tutti i vettori di S quando $\alpha = 2$ e $\beta = -2$. □

Esercizio 2.8. Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ tre vettori, si verifichi che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle -\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle$. □

Vogliamo mettere in evidenza una proprietà importante di particolari sottoinsiemi di vettori di $\mathbb{R}^n$.

2.4 Definizione. I vettori $v_1, \dots, v_r$ di $\mathbb{R}^n$ sono *linearmente indipendenti*, se $a_1v_1 + \cdots + a_rv_r = \mathbf{0} \Rightarrow a_1 = \cdots = a_r = 0$. Ovvero se *l'unico modo di scrivere il vettore nullo come combinazione dei vettori* $v_1, \dots, v_r$ *sia quello di prendere tutti i coefficienti uguali a zero.*

Dei vettori che non siano linearmente indipendenti si diranno *linearmente dipendenti*.

Esercizio 2.9. Si dimostrino le seguenti affermazioni.
(a) Un vettore v è linearmente indipendente se, e solo se, $v \neq 0$.
(b) Due vettori v, w sono linearmente indipendenti se, e solo se, non sono proporzionali.
(c) I vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti se, e solo se, nessuno di questi appartiene al sottospazio generato dai precedenti, ovvero se, e solo se, $v_1 \notin \langle 0 \rangle$ e $v_r \notin \langle v_1, \dots, v_{r-1} \rangle$ per $r = 2, \dots, k$. □

Esercizio 2.10. Si verifichi che i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti.

Si verifichi che i vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente dipendenti. □

2.5 Definizione. Una *base* di un sottospazio W di $\mathbb{R}^n$ è un insieme di generatori, linearmente indipendenti, di W.

Osserviamo che i vettori $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono una base di $\mathbb{R}^n$, dato che si ha

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

per ogni vettore $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^n$ e che l'unico modo di scrivere il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sia di prendere i coefficienti $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Questa base è detta la *base canonica* di $\mathbb{R}^n$.

La seguente osservazione mette in luce l'importanza delle basi tra tutti i possibili insiemi di generatori.

2.6 Proposizione. *Sia $\mathscr{B}$ una base del sottospazio W di $\mathbb{R}^n$; allora ogni vettore di W si scrive in modo unico come combinazione lineare di elementi di $\mathscr{B}$.*

dim. Poichè $W = \langle \mathscr{B} \rangle$, ogni vettore di W si scrive come combinazione di un numero finito di elementi della base $\mathscr{B}$. Inoltre, se il vettore $\mathbf{w} \in W$ si scrivesse in due modi come combinazione di elementi di $\mathscr{B}$, allora si avrebbe $\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$, ove $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathscr{B}$ ed $a_1, \dots, a_n, c_1 \dots, c_n$ sono in $\mathbb{R}$. Se ne deduce che $\mathbf{0} = \mathbf{w} - \mathbf{w} = (a_1 - c_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (a_n - c_n)\mathbf{v}_n$ e quindi che $a_1 - c_1 = \cdots = a_n - c_n = 0$, perchè gli elementi di $\mathscr{B}$ sono linearmente indipendenti. Quindi i coefficienti dei vettori di base necessari per scrivere $\mathbf{w}$ coincidono a due a due. **CVD** □

Esercizio 2.11. Si verifichi che
(a) i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.
(b) i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non sono una base di $\mathbb{R}^3$.
(c) i vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ non sono una base di $\mathbb{R}^3$.

(d) i vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$ sono una base di $\mathbb{R}^4$. □

Esercizio 2.12. Si verifichi che i vettori $u_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ ed $u_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ sono una base del sottospazio

$$W = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \;\middle|\; 2x_1 - x_2 + x_3 = \mathbf{0} \right\}.$$

Si verifichi inoltre che i vettori $w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ sono dei generatori di W, ma non sono una base del sottospazio. □

Chiudiamo questo numero enunciando alcuni fatti che dimostreremo in seguito, per qualunque spazio vettoriale, ai quali facciamo seguire una definizione.

- Ogni sottospazio $W \neq \langle 0\rangle$ di $\mathbb{R}^n$ ha una base e tutte le basi di uno stesso W hanno lo stesso numero di elementi.
- Ogni insieme di generatori del sottospazio W contiene una base di W.
- Ogni sottoinsieme di vettori linearmente indipendenti di W può essere completato ad una base di W.

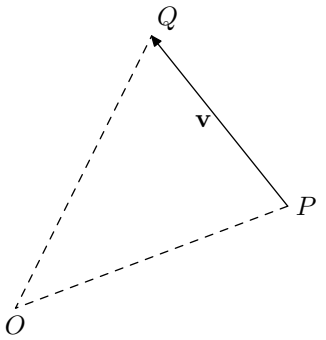
2.7 Definizione. Il numero degli elementi di una base del sottospazio $W \neq \langle 0\rangle$ di $\mathbb{R}^n$ è detto la *dimensione* del sottospazio W. La dimensione di $\langle 0\rangle$ è uguale a 0.

Osserviamo quindi che $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n (ed è l'unico sottospazio che abbia questa dimensione). Inoltre, se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, allora $\langle v\rangle$ ha dimensione 1; se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ non sono paralleli, allora $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ ha dimensione 2, e così via.

3. Spazio Affine e Spazio Euclideo

Vogliamo introdurre alcune notazioni che useremo spesso nel seguito. Nelle sezioni precedenti abbiamo visto come si possa, tramite un riferimento, associare ad ogni vettore (geometrico) delle coordinate e quindi identificare i vettori geometrici dello spazio con l'insieme $\mathbb{R}^3$ delle terne di numeri reali. Precisamente le coordinate $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ di un vettore sono le coordinate dell'estremo finale di un segmento orientato, uscente dall'origine, che rappresenti il vettore stesso. Quindi, quando diamo le coordinate, pensiamo al vettore applicato nell'origine, ma quando pensiamo al vettore sappiamo bene che possiamo applicarlo a qualsiasi punto dello spazio. Per avere una notazione un po' più precisa a questo riguardo, introduciamo lo *Spazio Affine* $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$, associato allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$.

Ciò significa che penseremo agli elementi di $\mathbb{R}^n$ sia come ai *punti* dello Spazio Affine che come ai *vettori* dello Spazio Affine e introdurremo l'operazione naturale di *applicare un vettore ad un punto dello spazio*; ovvero, dati il punto $P = \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ ed il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^n$, applicando il vettore $\mathbf{v}$ nel punto P si determina l'estremo del vettore applicato ovvero quell'unico punto $Q = P + \mathbf{v}$ tale che $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \mathbf{v}$.



È immediato verificare che da questa definizione discende che il punto $Q = P + \mathbf{v}$ ha coordinate $P + \mathbf{v} = \begin{pmatrix}x_1+a_1\\\vdots\\x_n+a_n\end{pmatrix}$.

In questo modo, nello spazio affine, distingueremo il punto $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dal vettore $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ che hanno le stesse coordinate(†).

Ovvero nello spazio affine abbiamo introdotto l'operazione di *somma di un punto con un vettore*, che dà come risultato un punto e l'operazione di *differenza tra due punti* che dà come risultato un vettore.

Ci interesseremo di particolari sottoinsiemi dello spazio affine, cioè delle *sottovarietà lineari*, ovvero i sottoinsiemi di punti che si ottengono applicando ad un punto (qualsiasi) dello spazio affine tutti i vettori di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

3.1 Definizione. Dati un punto P di $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$ ed un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^n$, chiameremo *sottovarietà lineare*, passante per P e parallela al *sottospazio direttore* W, il sottoinsieme

$$\mathbb{L} = P + W = \{\, P + \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in W \,\}$$

e si dirà *dimensione della sottovarietà lineare* $\mathbb{L}$ la dimensione del sottospazio W.

Il sottoinsieme vuoto $\emptyset$ di $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$ è considerato anch'esso una sottovarietà lineare e gli viene attribuita dimensione -1.

In particolare, le sottovarietà lineari di dimensione 0 dello spazio affine sono i suoi punti, le sottovarietà lineari di dimensione 1 sono le rette, le sottovarietà lineari di dimensione 2 dello spazio affine sono i piani. Le sottovarietà lineari di dimensione $n-1$ di $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$ sono i suoi *iperpiani*, mentre l'unica sottovarietà lineare di dimensione n di $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio stesso.

Esercizio 3.1. Si verifichi che il sottoinsieme dei punti $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$, che soddisfano alle condizioni

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

è una sottovarietà lineare e si determinino il sottospazio direttore e la dimensione. □

Esercizio 3.2. Si considerino in $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ i seguenti punti e vettori

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifichi che le sottovarietà lineari $P + \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ e $Q + \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$ coincidono. □

Esercizio 3.3. Sia $\mathbb{L} = P + U$ una sottovarietà lineare (non vuota) di $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$ e sia $P_0 \in \mathbb{L}$. Si mostri che $\mathbb{L} = \{\, P_0 + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U \,\}$; ovvero che si ottiene sempre la stessa sottovarietà lineare applicando i vettori del suo sottospazio direttore ad un qualunque suo punto. □

Esercizio 3.4. Siano $\mathbb{L} = P + U$ ed $\mathbb{M} = Q + W$ due sottovarietà lineari di $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$. Si mostri che $\mathbb{L} = \mathbb{M}$ se, e solo se, $U = W$ e $\overrightarrow{PQ} \in U$. □

⋆Esercizio 3.5. Date due sottovarietà lineari $\mathbb{L} = P + U$ ed $\mathbb{M} = Q + W$, si chiama *sottovarietà lineare generata* da $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$, la più piccola sottovarietà lineare $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$ (o $\mathbb{L} + \mathbb{M}$) di $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$ contenente sia $\mathbb{L}$ che $\mathbb{M}$.

(†) Alcuni Autori, per accentuare questa distinzione, usano la convenzione di aggiungere un'ulteriore coordinata ed indicare con $P = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ il punto P e con $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ il vettore $\overrightarrow{OP}$ con la convenzione che applicando un vettore in un punto si sommano tra loro anche queste nuove coordinate. In questo spirito, si indica talvolta con $Q - P$ il vettore $\overrightarrow{PQ}$, osservando che le sue coordinate sono esattamente la differenza delle coordinate dei due punti (compresa la differenza tra i due 1 posti in cima).

Si verifichi che $\mathbb{L} \vee \mathbb{M} = P + (U + W + \left\langle \overrightarrow{PQ} \right\rangle)$, ove $U + W + \left\langle \overrightarrow{PQ} \right\rangle$ indica il sottospazio vettoriale generato da U, W e $\overrightarrow{PQ}$. □

Esercizio 3.6. [baricentro] Siano $P_1, \dots, P_n$ punti dello spazio affine e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ numeri reali positivi tali che $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Fissato un punto O dello spazio, si consideri il punto G, definito dalla condizione

$$\overrightarrow{OG} = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}.$$

Si verifichi che il punto G non dipende dalla scelta di O.

Il punto G è detto il *baricentro* del sistema formato dai punti $P_1, \dots, P_n$, di masse $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ rispettivamente.(*) Con un qualche abuso di notazioni, talvolta si scrive $G = \lambda_1 P_1 . + \cdots + \lambda_n P_n$. □

Esercizio 3.7. Siano dati i punti $P_1, \dots, P_n$, di masse $m_1, \dots, m_n$. Si verifichi che il baricentro degli n punti coincide con il baricentro dei due punti P e P_n, di masse $m_1 + \cdots + m_{n-1}$ ed m_n, rispettivamente, dove P è il baricentro del sistema formato dai primi $n-1$ punti con le relative masse. □

Esercizio 3.8. Si considerino due punti (distinti) P e Q dello spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^3)$. Il *segmento* PQ è l'insieme dei punti posti tra P e Q, ovvero $S_{PQ} = \left\{ P + \lambda \overrightarrow{PQ} \;\middle|\; \lambda \in [0,1] \right\}$. Nelle notazioni dell'`Esercizio I.3.6`, si mostri che $S_{PQ} = \{\, \mu P + \lambda Q \mid \mu, \lambda \in [0,1],\ \mu + \lambda = 1 \,\}$. □

⋆Esercizio 3.9. [Coordinate baricentriche] Come nell'`Esercizio I.3.6`, si considerino i punti $P_1, \dots, P_n$ dello spazio affine ed i numeri reali (non necessariamente positivi) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, tali che $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

(a) Si verifichi che, anche in questo caso, il punto G, definito dalla condizione

$$\overrightarrow{OG} = \lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n},$$

non dipende dalla scelta di O. I numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono detti le *coordinate baricentriche* del punto $G = \lambda_1 P_1 . + \cdots + \lambda_n P_n$, rispetto ai punti $P_1, \dots, P_n$.

(b) Si verifichi che i punti $\lambda_1 P_1 . + \cdots + \lambda_n P_n$, al variare dei numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, tali che $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, sono tutti e soli i punti della sottovarietà lineare generata da $P_1, \dots, P_n$.

(c) Si consideri il sottoinsieme

$$K = \{\, \lambda_1 P_1 . + \cdots + \lambda_n P_n \mid \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1, \text{ e } \lambda_i \in [0,1], i = 1, \dots, n \,\}$$

e si mostri che se P e Q sono due punti di K, allora tutti i punti del segmento PQ sono contenuti in K. Si disegni il sottoinsieme K nei casi in cui $n = 2, 3, 4$. □

Prima di introdurre la metrica euclidea nello spazio affine, diamo alcune definizioni che descrivano le reciproche posizioni di due sottovarietà lineari nello spazio affine.

3.2 Definizione. Due sottovarietà lineari $\mathbb{L} = P + W$ ed $\mathbb{M} = Q + U$ si dicono

- *incidenti* se $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \emptyset$;
- *parallele* se $W \subset U$, oppure $U \subset W$;
- *sghembe* se $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \emptyset$ ed $U \cap W = \langle \mathbf{0} \rangle$.

Esercizio 3.10. In $\mathbb{A}(\mathbb{R}^3)$ si considerino i punti $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ed i sottospazi $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ed $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Si verifichi che le sottovarietà lineari $\mathbb{L} = P + W$ ed $\mathbb{M} = Q + U$ sono incidenti e si determini $\mathbb{L} \cap \mathbb{M}$. □

Esercizio 3.11. In $\mathbb{A}(\mathbb{R}^3)$ si considerino i punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ed i sottospazi $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ ed $U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Si verifichi che le sottovarietà lineari $\mathbb{L} = P + W$ ed $\mathbb{M} = Q + U$ sono parallele. □

(*) Più in generale si possono attribuire delle masse positive $m_1, \dots, m_n$ ai punti $P_1, \dots, P_n$, e detta $M = m_1 + \cdots + m_n$ la massa totale del sistema, considerare i coefficienti $\lambda_1 = \frac{m_1}{M}, \dots, \lambda_n = \frac{m_n}{M}$, che soddisfano alla condizione $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

Esercizio 3.12. In $\mathbb{A}(\mathbb{R}^3)$ si considerino i punti $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed i sottospazi $W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ed $U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Si verifichi che le rette $r = P + W$ ed $s = Q + U$ sono sghembe. □

Esercizio 3.13. In $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ si considerino i piani

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Si verifichi che i due piani non sono né incidenti, né paralleli, né sghembi. □

Esercizio 3.14. Si considerino due sottovarietà lineari (non vuote) $\mathbb{L} = P + W$ ed $\mathbb{M} = Q + U$. Si verifichi che $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ sono incidenti se, e solo se, il vettore $\overrightarrow{PQ}$ si scrive come somma di un vettore di U e di un vettore di W. □

Esercizio 3.15. Siano dati quattro punti distinti $P_1, \dots, P_4$ dello spazio affine tridimensionale e si consideri un quadrilatero che ha questi quattro punti come vertici. Indicati con $M_1, \dots, M_4$ i punti medi dei lati di tale quadrilatero, si mostri che $M_1, \dots, M_4$ sono i vertici di un parallelogramma. □

Resta da introdurre sui vettori dello spazio $\mathbb{R}^n$ (o dello spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$, se si vuol essere più precisi) la struttura essenziale dello spazio Euclideo, ovvero il *prodotto scalare*, struttura che ci permetterà di parlare di distanze ed angoli.

3.3 Definizione. Il *prodotto scalare* in $\mathbb{R}^n$ è definito ponendo(†)

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \qquad \text{ove} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Questa operazione gode di alcune importanti proprietà:

(B_1) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{z})$;
(B_2) $\mathbf{v} \cdot (\lambda \mathbf{w}) = \lambda (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$;
(B_3) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$;
(P) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0$;

qualunque siano $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Le proprietà $(B_1), (B_2), (B_3)$ si riassumono brevemente dicendo che il prodotto scalare è un'*applicazione bilineare, simmetrica*, su $\mathbb{R}^n$ e la proprietà (P), dice che questa applicazione è *definita positiva*.

A partire dal prodotto scalare (o, più in generale, da un'applicazione bilineare, simmetrica, definita positiva) si può definire la *norma (euclidea)* di un vettore in $\mathbb{R}^n$, ponendo

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \qquad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

La norma gode delle seguenti proprietà fondamentali

- $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0$;
- $\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{v}\|$;
- $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ (disuguaglianza triangolare);

qualunque siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che le prime due proprietà sono una facile conseguenza delle proprietà del prodotto scalare, mentre la terza si può dedurre da un'importante disuguaglianza, che è una conseguenza anch'essa delle proprietà del prodotto scalare.

(†) Alcuni autori usano il simbolo $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ per indicare il prodotto scalare dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Non useremo qui questa convenzione, anche per evitare confusioni con la notazione utilizzata per il sottospazio generato dai due vettori.

3.4 Teorema. [disuguaglianza di Schwarz] *Per ogni coppia di vettori* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$*, si ha*

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|,$$

ove vale l'uguaglianza se, e solo se, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono linearmente dipendenti.*

dim. Siano fissati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ ed osserviamo che, se uno dei due vettori è nullo, la tesi è verificata. Supponiamo ora che $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ siano linearmente indipendenti. Per qualsiasi valore del parametro $t \in \mathbb{R}$, si ha $(\mathbf{v} + t\mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + t\mathbf{w}) \geq 0$ e quindi,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2t\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + t^2 \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \geq 0 \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Ciò signfica che il discriminante di questo trinomio non può essere positivo e quindi deve aversi

$$0 \geq (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) \qquad \text{ovvero} \qquad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2;$$

da cui si deduce la tesi.

Resta quindi da dimostrare l'ultima affermazione sulla dipendenza lineare. Se $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\|\mathbf{w}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{v}\|$ e si ha

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| = |\lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})| = |\lambda| \, \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|.$$

Viceversa, se $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| = \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|$, ovvero $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w})$; allora, posto $\tau = -\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}$, si ha

$$(\mathbf{v} + \tau\mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + \tau\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2\tau(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) + \tau^2(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 2\frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} = 0$$

da cui si deduce che $\mathbf{v} + \tau\mathbf{w} = 0$ e quindi che $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti. **CVD** □

Dalla disuguaglianza di Schwarz si deduce facilmente la disuguaglianza triangolare, osservando che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ e $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ sono due numeri reali maggiori o uguali a zero e

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \leq \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \leq$$
$$\leq \|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| + \|\mathbf{w}\|^2 = (\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|)^2$$

ove la disuguaglianza tra le due righe qui sopra è conseguenza della disuguaglianza di Schwarz.

Dalla disuguaglianza di Schwarz discende che, dati due vettori non nulli $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, si ha $\left| \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|} \right| \leq 1$ ed un'osservazione geometrica ci permette di dare un significato preciso a questo rapporto. Infatti possiamo osservare che, dati due vettori non nulli $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, si ha

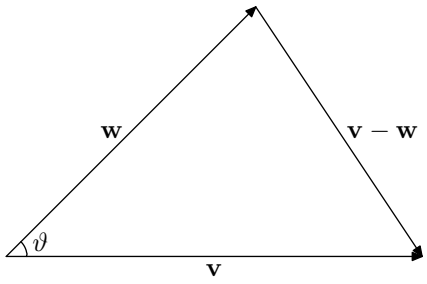
$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|} = \cos\vartheta, \qquad \text{ove } \vartheta \in [0, \pi] \text{ è l'angolo tra i due vettori.} \tag{3.5}$$

Si veda infatti il disegno a fianco e si osservi che, per le proprietà del prodotto scalare, si ha

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}.$$

D'altra parte, applicando il cosiddetto 'Teorema dei Coseni' al triangolo in questione, si ha

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 - 2\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \cos\vartheta.$$



Quindi, confrontando le due espressioni, si ottiene l'uguaglianza enunciata sopra e perciò possiamo concludere che il prodotto scalare è uno strumento per calcolare la lunghezza dei vettori e l'angolo (non-orientato) che due di essi formano. Ad esempio, osserviamo che due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono *ortogonali* (cioè formano un angolo di $\frac{\pi}{2}$) se, e solo se, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Tramite la norma, possiamo introdurre nello spazio affine la distanza tra coppie di punti, affermando che la *distanza euclidea* tra due punti P e Q di $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$, è uguale a $\|\overrightarrow{PQ}\|$.

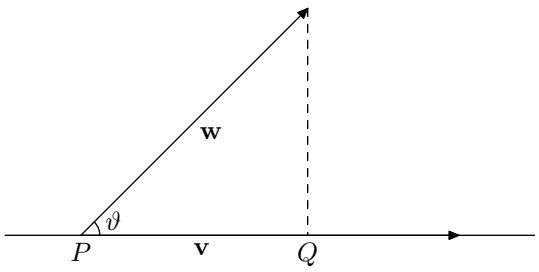
Esercizio 3.16. Si determini l'angolo tra i vettori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 3.17. Si determini l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^3$, ortogonali a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ □

Esercizio 3.18. Si determini l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^3$, ortogonali sia a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ che a $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 3.19. Siano date due rette r ed s, parallele rispettivamente ai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, con $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| \neq 0$. Si mostri che i vettori $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ formano angoli uguali sia con $\mathbf{v}$ che con $\mathbf{w}$, ovvero che sono i vettori direttori delle bisettrici degli angoli formati dalle due rette. Si verifichi infine che $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ è ortogonale a $\mathbf{v} - \mathbf{w}$. □

Il lettore è invitato a verificare, servendosi delle elementari nozioni di trigonometria, che, dati due vettori $\mathbf{v} \neq 0 \neq \mathbf{w}$, il numero $\frac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}|}{\|\mathbf{v}\|}$ è uguale alla lunghezza della proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v}$ su una retta parallela a $\mathbf{w}$ (ovvero la lunghezza del segmento PQ nel disegno qui a fianco). Se ne deduca che, dato un vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$ ed indicata con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ la base canonica di questo spazio, si ha



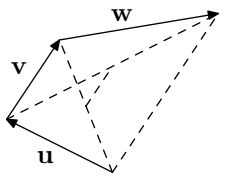
$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n.$$

Esercizio 3.20. Si dica quali tra le seguenti affermazioni sono vere e quali sono false, giustificando la risposta.
(a) se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, allora $\mathbf{v} = \mathbf{w}$;
(b) se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$, per ogni $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{v} = \mathbf{0}$;
(c) se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{v} = \mathbf{w}$;
(d) dati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si ha $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ se, e solo se, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$;
(e) dati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si ha $\|\mathbf{v} + t\mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{v}\|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ se, e solo se, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. □

Esercizio 3.21. Siano dati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e si verifichi che si ha $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = 2\|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{w}\|^2$. Si deducano da ciò le relazioni esistenti tra i lati e le diagonali di un parallelogramma. □

*Esercizio 3.22. Siano dati tre vettori non nulli e complanari $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e si consideri il quadrilatero avente i tre vettori come lati consecutivi. Si determinino, in termini dei tre vettori dati, dei vettori corrispondenti al quarto lato del quadrilatero, alle due diagonali ed al segmento che congiunge i punti medi delle diagonali.

Si scriva la relazione che lega i quadrati dei lati, i quadrati delle diagonali ed il quadrato del segmento che congiunge i punti medi delle diagonali. □



Esercizio 3.23. Siano dati in $\mathbb{R}^2$ i vettori $\mathbf{u} = \binom{1}{2}$ e $\mathbf{v} = \binom{-2}{3}$. Si scriva il vettore $\mathbf{v}$ come somma di un vettore parallelo ad $\mathbf{u}$ e di un vettore ortogonale ad $\mathbf{u}$. □

Esercizio 3.24. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Si scriva il vettore $\mathbf{v}$ come somma di un vettore parallelo ad $\mathbf{u}$ e di un vettore ortogonale ad $\mathbf{u}$. □

Esercizio 3.25. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Si scriva il vettore $\mathbf{v}$ come somma di un vettore parallelo ad $\mathbf{u}$ e di un vettore ortogonale ad $\mathbf{u}$. □

Esercizio 3.26. Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Si scriva il vettore $\mathbf{v}$ come somma di un vettore parallelo ad $\mathbf{u}$ e di un vettore ortogonale ad $\mathbf{u}$. □

⋆Esercizio 3.27. Si consideri l'insieme $\mathcal{C}^0[a,b]$ formato da tutte le funzioni continue a valori reali definite sull'intervallo $[a,b] \neq \emptyset$. Anche per le funzioni di $\mathcal{C}^0[a,b]$, come per i vettori di $\mathbb{R}^n$, si possono fare le usuali operazioni di somma e prodotto per costanti. Inoltre, si può introdurre il "prodotto scalare"

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \qquad \text{ove } f(x), g(x) \in \mathcal{C}^0[a,b],$$

e lasciamo al lettore il compito di verificare che anche questo prodotto scalare è un'applicazione bilineare simmetrica, definita positiva e quindi valgono le proprietà scritte sopra. □

Esercizio 3.28. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i vettori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si determini il sottoinsieme W di $\mathbb{R}^4$, formato da tutti i vettori ortogonali sia a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{w}$, e si verifichi che si tratta di un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Detto $U = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, si mostri che ogni vettore di $\mathbb{R}^4$ si scrive, in modo unico, come somma di un vettore di U e di un vettore di W. □

Esercizio 3.29. Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ dei vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$, a due a due ortogonali. Si mostri $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti. □

Esercizio 3.30. Una base $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ si dice *ortonormale* se i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono a due a due ortogonali e di norma 1. Sia fissata una base ortonormale, $\mathcal{V}$, di $\mathbb{R}^n$ e si mostri che $\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_n)\mathbf{v}_n$ per ogni vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$. □

Esercizio 3.31. Siano $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ una base ortonormale del sottospazio W di $\mathbb{R}^n$. Si mostri che, dato comunque un vettore $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^n$, il vettore $\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 - \cdots - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_k)\mathbf{w}_k$ è ortogonale ad ogni vettore di W. Si verifichi che $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}_k)\mathbf{w}_k$ è la *proiezione ortogonale* di $\mathbf{x}$ su W, ovvero quell'unico vettore $\mathbf{w}$ di W tale che $\mathbf{x} - \mathbf{w}$ sia ortogonale a W. □

Esercizio 3.32. Dato un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ di $\mathbb{R}^n$, si chiamano *coseni direttori* del vettore $\mathbf{v}$ i coseni degli angoli tra $\mathbf{v}$ e gli assi coordinati.

(a) Si calcolino i coseni direttori dei $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

(b) Sia $\mathbf{v}'$ il vettore di $\mathbb{R}^4$ che ha come componenti i coseni direttori del vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; si determini $\|\mathbf{v}'\|$ e la dimensione del sottospazio $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle$.

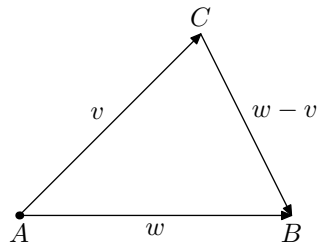
(c) Si risponda alle domande del punto precedente quando $\mathbf{v}$ è un generico vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$. □

Esercizio 3.33. Si definisca in $\mathbb{R}^2$ un nuovo prodotto scalare tra coppie di vettori, ponendo $\mathbf{v} * \mathbf{w} = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$, ove $\mathbf{v} = \binom{x_1}{x_2}$ e $\mathbf{w} = \binom{y_1}{y_2}$. Si mostri che si tratta un'applicazione bilineare, simmetrica, definita positiva. È valida in questo caso la disuguaglianza di Schwarz? □

Esercizio 3.34. Si definisca in $\mathbb{R}^2$ un nuovo prodotto scalare tra coppie di vettori, ponendo $\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$, ove $\mathbf{v} = \binom{x_1}{x_2}$ e $\mathbf{w} = \binom{y_1}{y_2}$. Si mostri che si tratta un'applicazione bilineare, simmetrica. È valida in questo caso la disuguaglianza di Schwarz? □

Prima di approfondire la geometria dello spazio euclideo, con particolare riguardo allo spazio tridimensionale, mostriamo come si possano usare gli strumenti e le notazioni introdotte, per verificare alcune proprietà elementari dei triangoli.

Alcune proprietà dei triangoli. Consideriamo un triangolo non-degenere del piano euclideo, di vertici A, B e C, ed indichiamo con $v = \overrightarrow{AC}$ e $w = \overrightarrow{AB}$ i vettori, linearmente indipendenti, corrispondenti a due lati del triangolo ed osserviamo che il terzo lato corrisponde al vettore $\overrightarrow{CB} = w - v$, come si può vedere nella figura qui sotto.



Dato un vettore x, indichiamo con x' il vettore che si ottiene ruotando x di un angolo retto, ovvero, fissata una base ortonormale $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$, dato un vettore $x = ae_1 + be_2$, si ha $x' = -be_1 + ae_2$.

Osserviamo che, per ogni vettore x, si ha (ovviamente) $x \cdot x' = 0$ ed $(\alpha x)' = \alpha x'$; inoltre, per ogni coppia di vettori x, y, si ha $(x+y)' = x' + y'$ e, infine,

$$x' \cdot y' = x \cdot y \qquad \text{e} \qquad x' \cdot y + x \cdot y' = 0.$$

Vogliamo dimostrare alcune delle proprietà fondamentali dei triangoli, ovvero che le altezze, concorrono ad un medesimo punto e che le mediane, gli assi e le bisettrici si comportano analogamente.

• **Intersezione delle altezze** Dire che le tre altezze del triangolo concorrono ad uno stesso punto, significa dire che esistono tre scalari λ, μ e σ, tali che

$$\boxed{v + \lambda w' = w + \mu v' = \sigma(w' - v').}$$

In particolare, deve valere l'uguaglianza $v + \sigma v' = (\sigma - \lambda)w'$, da cui, ricordando che v e v' sono ortogonali, si deducono le uguaglianze

$$1 = (\sigma - \lambda)\frac{v \cdot w'}{v \cdot v}, \qquad \sigma = (\sigma - \lambda)\frac{v' \cdot w'}{v' \cdot v'}, \qquad \text{e quindi} \quad \sigma = \frac{v' \cdot w'}{v \cdot w'}.$$

Calcolando i prodotti scalari, si verifica facilmente che

$$v - \frac{v' \cdot w'}{v \cdot w'}(w' - v') \in \langle w \rangle^\perp \qquad \text{e} \qquad w - \frac{v' \cdot w'}{v \cdot w'}(w' - v') \in \langle v \rangle^\perp$$

e ciò è quanto ci serve per concludere.

• **Intersezione degli assi** Un calcolo perfettamente analogo si può fare per verificare che i tre assi dei lati del triangolo concorrono ad uno stesso punto. Ciò significa precisamente che esistono tre scalari λ, μ e σ, tali che

$$\boxed{\frac{v}{2} + \lambda v' = \frac{w}{2} + \mu w' = \frac{v+w}{2} + \sigma(w' - v').}$$

In particolare, devono valere le uguaglianze

$$\frac{1}{2} = \frac{\left(\frac{v+w}{2} + \sigma(w' - v')\right) \cdot v}{v \cdot v}, \qquad \text{e} \qquad \lambda = \frac{\left(\frac{v+w}{2} + \sigma(w' - v')\right) \cdot v'}{v' \cdot v'}.$$

Dalla prima uguaglianza, si deduce che

$$1 = \frac{v \cdot v + w \cdot v + 2\sigma w' \cdot v}{v \cdot v}, \qquad \text{e quindi} \qquad \sigma = -\frac{v \cdot w}{2v \cdot w'}.$$

Calcolando i prodotti scalari, si verifica che

$$\frac{v}{2} - \frac{v+w}{2} + \frac{v \cdot w}{2v \cdot w'}(w' - v') \in \langle v \rangle^\perp \qquad \text{e} \qquad \frac{w}{2} - \frac{v+w}{2} + \frac{v \cdot w}{2v \cdot w'}(w' - v') \in \langle w \rangle^\perp$$

e ciò è quanto ci serve per concludere.

• **Intersezione delle mediane** Dire che le tre mediane del triangolo concorrono ad uno stesso punto, significa dire che esistono tre scalari λ, μ e σ, tali che

$$\boxed{w + \lambda\left(\frac{v}{2} - w\right) = v + \mu\left(\frac{w}{2} - v\right) = \sigma\left(v + \frac{w - v}{2}\right) = \sigma\frac{v+w}{2}.}$$

Poichè v e w sono linearmente indipendenti, queste uguaglianze sono equivalenti alle uguaglianze

$$\frac{\lambda}{2} = (1-\mu) = \frac{\sigma}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\mu}{2} = (1-\lambda) = \frac{\sigma}{2},$$

da cui si deduce che $\lambda = \mu = \sigma = \frac{2}{3}$.[‡]

• **Intersezione delle bisettrici** Ricordiamo che, se due vettori x ed y hanno la stessa lunghezza ($\|x\| = \|y\|$), allora la bisettrice dell'angolo tra i due vettori ha la direzione del vettore $x + y$. Dunque, dire che le tre bisettrici degli angoli interni del triangolo concorrono ad uno stesso punto, significa dire che esistono tre scalari λ, μ e σ, tali che

$$\boxed{v + \lambda\left(\frac{w-v}{\|w-v\|} - \frac{v}{\|v\|}\right) = w + \mu\left(\frac{w-v}{\|w-v\|} - \frac{w}{\|w\|}\right) = \sigma\left(\frac{v}{\|v\|} + \frac{w}{\|w\|}\right).}$$

Ricordando v e w sono linearmente indipendenti ed uguagliando i coefficienti dei vettori $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$ e $w_1 = \frac{w}{\|w\|}$ si ottengono le uguaglianze

$$\|v\| - \lambda\left(1 + \frac{\|v\|}{\|w-v\|}\right) = \lambda\frac{\|w\|}{\|w-v\|} = \sigma \qquad \text{e} \qquad \|w\| - \mu\left(1 + \frac{\|w\|}{\|w-v\|}\right) = \mu\frac{\|v\|}{\|w-v\|} = \sigma$$

da cui si deduce che

$$\lambda = \frac{\|v\|\,\|w-v\|}{\|w-v\| + \|v\| + \|w\|}, \qquad \mu = \frac{\|w\|\,\|w-v\|}{\|w-v\| + \|v\| + \|w\|}, \qquad \sigma = \frac{\|v\|\,\|w\|}{\|w-v\| + \|v\| + \|w\|}$$

e conclude il calcolo.

• **Bisettrici degli angoli esterni** Da ultimo, vogliamo mostrare che sono allineati i tre punti di intersezione tra la bisettrice dell'angolo esterno ed il lato opposto. Cominciamo quindi col determinare i punti di intersezione tra le rette, ovvero determinare i valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ per cui si abbia

$$w + \alpha\left(-\frac{w}{\|w\|} + \frac{w-v}{\|w-v\|}\right) = \beta v, \qquad v + \gamma\left(\frac{v}{\|v\|} + \frac{w-v}{\|w-v\|}\right) = \delta w, \qquad \lambda\left(\frac{v}{\|v\|} - \frac{w}{\|w\|}\right) = v + \mu(w-v).$$

Poiché v e w sono linearmente indipendenti, si possono determinare i coefficienti e quindi i tre punti di intersezione che sono[†]

$$P_1 = \frac{\|w\|}{\|w\| - \|w-v\|}v, \qquad P_2 = \frac{\|v\|}{\|v\| - \|w-v\|}w, \qquad P_3 = \frac{\|w\|}{\|w\| - \|v\|}v - \frac{\|v\|}{\|w\| - \|v\|}w.$$

I tre punti sono allineati se, e solo se, i vettori $\overrightarrow{P_3P_1}$ e $\overrightarrow{P_3P_2}$ sono paralleli e ciò è equivalente (perchè?) all'annullarsi del determinante[*]

$$\det\begin{pmatrix} \|w\| - \|v\| & \|w\| - \|w-v\| & \|v\| - \|w-v\| \\ \|w\| & \|w\| & 0 \\ -\|v\| & 0 & \|v\| \end{pmatrix}.$$

Infine, osserviamo che questo determinante è nullo perché la prima colonna è la differenza delle ultime due.

[‡] Il punto di intersezione delle mediane di un triangolo è detto il *baricentro* del triangolo. Si verifichi che questa definizione coincide con quella data nell'`Esercizio I.3.6`, nell'ipotesi in cui ai tre vertici del triangolo vengano attribuite masse uguali.

[†] Si osservi che quando alcuni dei lati sono uguali tra loro, allora qualcuno tra i denominatori si annulla. Ciò significa che la bisettrice è parallela al lato opposto ed il punto di intersezione va "all'infinito". Questa affermazione si potrebbe rendere precisa considerando il piano euclideo immerso nel piano proiettivo.

[*] Per chi non conosca il determinante, o non abbia chiaro questo criterio di allineamento –nozioni che incontreremo nel seguito del corso– resta sempre possibile la verifica diretta del parallelismo tra i due vettori.

4. Prodotto Vettoriale e prodotto misto nello Spazio Euclideo tridimensionale

Uno strumento utile che si affianca al prodotto scalare in molti calcoli elementari nella geometria dello spazio euclideo tridimensionale è il *prodotto vettoriale*, così definito.

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\begin{pmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\x_3y_1-x_1y_3\\x_1y_2-x_2y_1\end{pmatrix}\qquad\text{ove}\qquad\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad\mathbf{w}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Le proprietà fondamentali del prodotto vettoriale[(†)] sono le seguenti

- $\mathbf{v}\times\mathbf{w}=-(\mathbf{w}\times\mathbf{v})$;
- $(\mathbf{v}+\mathbf{w})\times\mathbf{z}=\mathbf{v}\times\mathbf{z}+\mathbf{w}\times\mathbf{z}$
- $(\lambda\mathbf{v})\times\mathbf{w}=\lambda(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\mathbf{v}\times(\lambda\mathbf{w})$;
- $\mathbf{v}\times\mathbf{w}=0$ se, e solo se, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono proporzionali;
- $(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{v}=0=(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{w}$;
- $\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|^2=\|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})^2$ (identità di Lagrange);

qualunque siano $\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^3$ e $\lambda\in\mathbb{R}$.

Dimostriamo le proprietà del prodotto vettoriale. Siano $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, $\mathbf{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$ ed applicando la definizione, si ottiene

$$\mathbf{w}\times\mathbf{v}=\begin{pmatrix}y_2x_3-y_3x_2\\y_3x_1-y_1x_3\\y_1x_2-y_2x_1\end{pmatrix}=-(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$$

e inoltre,

$$(\mathbf{v}+\mathbf{w})\times\mathbf{z}=\begin{pmatrix}(x_2+y_2)z_3-(x_3+y_3)z_2\\(x_3+y_3)z_1-(x_1+y_1)z_3\\(x_1+y_1)z_2-(x_2+y_2)z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2z_3-x_3z_2\\x_3z_1-x_1z_3\\x_1z_2-x_2z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_2z_3-y_3z_2\\y_3z_1-y_1z_3\\y_1z_2-y_2z_1\end{pmatrix}=\mathbf{v}\times\mathbf{z}+\mathbf{w}\times\mathbf{z}.$$

La verifica della terza identità è un calcolo diretto che lasciamo al lettore.

Osserviamo che $\mathbf{v}\times\mathbf{w}=0$ significa

$$x_2y_3-x_3y_2=0,\qquad x_3y_1-x_1y_3=0,\qquad x_1y_2-x_2y_1=0$$

da cui si deduce che le tre coordinate dei due vettori sono tra loro proporzionali. È immediato verificare che, se $\mathbf{w}=\lambda\mathbf{v}$, si ha $\mathbf{v}\times\mathbf{w}=0$.

Ancora un calcolo diretto ci permette di verificare che

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{v}=(x_2y_3-x_3y_2)x_1+(x_3y_1-x_1y_3)x_2+(x_1y_2-x_2y_1)x_3=0$$

ed analogamente $(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{w}=0$. Infine, si ha

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|^2&=(x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_3y_1-x_1y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2\\&=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\\&=\|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})^2\end{aligned}$$

e ciò conclude la verifica. **CVD** □

Osserviamo che le due ultime proprietà del prodotto vettoriale permettono di caratterizzare geometricamente il prodotto vettoriale di due vettori in termini dei suoi fattori. Infatti dalla prima delle due si deduce che il prodotto vettoriale $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ deve essere ortogonale ad entrambi i suoi fattori e quindi, se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$

(†) In alcuni testi si trova la notazione $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ per indicare il prodotto vettoriale. Noi non faremo uso di questa notazione.

non sono paralleli (ovvero proporzionali), la direzione del prodotto vettore è completamente determinata. Infine, dall'identità di Lagrange e da quanto visto sul prodotto scalare si deduce

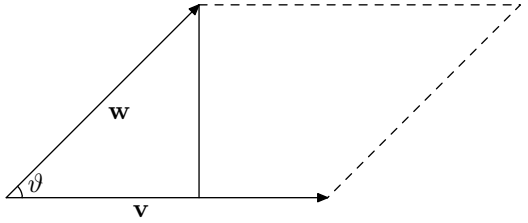
$$\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2 - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})^2 = \|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2(1-\cos(\vartheta)^2),$$

ove $\vartheta\in[0,\pi]$ è l'angolo tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Quindi, si ha

$$\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\sin\vartheta, \tag{4.2}$$

e quindi la norma (ovvero la lunghezza) del prodotto vettoriale coincide con l'area del parallelogramma avente come lati i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, in quanto la misura dell'altezza di tale parallelogramma, relativa al lato $\mathbf{v}$ è uguale proprio a $\|\mathbf{w}\|\sin\vartheta$, come si può vedere facilmente dal disegno a fianco.



Dunque la direzione e la lunghezza del prodotto vettoriale si possono dedurre "geometricamente" a partire dai fattori. Si potrebbe infine verificare che il verso del prodotto vettoriale è determinato dall'ordine dei fattori e dall'orientamento della base canonica di $\mathbb{R}^3$ ovvero alla scelta di sistemi di riferimento destrogiri o levogiri. Non entriamo nei dettagli, onde evitare di addentrarci nella nozione di orientamento dello spazio.

Osservazione. Come ultima cosa, osserviamo che il prodotto vettoriale, oltre a non essere commutativo non è nemmeno associativo, come si può vedere dal fatto che $e_1\times(e_1\times e_2) = e_1\times e_3 = -e_2$, mentre $(e_1\times e_1)\times e_2 = \mathbf{0}\times e_2 = \mathbf{0}$. Lasciamo al lettore il compito di verificare un'identità più sottile soddisfatta dal prodotto vettoriale, ovvero, per ogni terna di vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, si ha

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) + \mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u}) + \mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = 0 \qquad [\textit{identità di Jacobi}].$$

Esercizio 4.1. Si consideri un triangolo non degenere i cui lati abbiano lunghezza $a=\|\mathbf{v}\|$, $b=\|\mathbf{w}\|$ e $c=\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|$. Si mostri che vale la cosiddetta *Formula di Erone*, ovvero che l'area A del triangolo è uguale ad

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

ove $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$. □

Esercizio 4.2. Siano dati tre punti non allineati nel piano, P_1, P_2, P_3, e sia $X=\alpha_1P_1+\alpha_2P_2+\alpha_3P_3$, con $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$ (coordinate baricentriche).

(a) Si verifichi che $|\alpha_3|$ è uguale al rapporto tra l'area del triangolo P_1P_2X e l'area del triangolo $P_1P_2P_3$. Si verifichino le analoghe identità per α_2 ed α_1.
(b) Si determinino i punti, X, del piano per cui i tre triangoli P_1P_2X, P_1P_3X, P_2P_3X hanno aree uguali.
(c)* Vale un analogo risultato nello spazio tridimensionale? Ed in dimensione $n>3$? □

Esercizio 4.3. Siano $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{z}$ vettori di $\mathbb{R}^3$, Si verifichi che

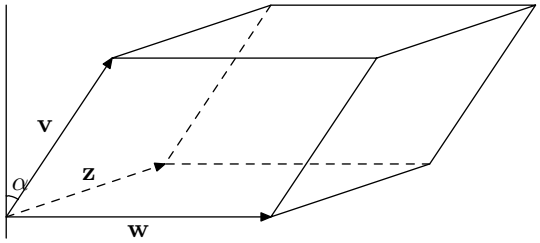
(a) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}$.
(b) Ricordando le proprietà del prodotto misto ed il punto precedente, si verifichi che $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{z}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{z}) - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{z})$. □

Da ultimo vogliamo considerare il *prodotto misto* di tre vettori. Dati i vettori $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, $\mathbf{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$, consideriamo il prodotto

$$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{z}) = x_1(y_2z_3-y_3z_2) + x_2(y_3z_1-y_1z_3) + x_3(y_1z_2-y_2z_1)$$

Osserviamo che *il prodotto misto* $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{z})=0$ *se, e solo se, i tre vettori sono linearmente dipendenti*. Infatti il fattore $\mathbf{w}\times\mathbf{z}$ è diverso da zero se, e solo se, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$ sono linearmente indipendenti. Inoltre, se $\mathbf{w}\times\mathbf{z}\neq 0$, il prodotto misto è nullo se, e solo se, $\mathbf{v}$ è ortogonale a $\mathbf{w}\times\mathbf{z}$, ovvero se, e solo se, $\mathbf{v}$ appartiene al piano generato da $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$. Ciò permette di concludere.

Vogliamo mettere in evidenza il significato geometrico del prodotto misto di tre vettori. Applichiamo i tre vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ ad uno stesso punto dello spazio e consideriamo il parallelepipedo avente i tre vettori dati come spigoli (cf. il disegno a fianco). Il prodotto vettoriale $\mathbf{w}\times\mathbf{z}$ è un vettore perpendicolare al piano contenente i fattori e di lunghezza uguale all'area del parallelogramma determinato da questi.



Dunque il prodotto scalare tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}\times\mathbf{z}$, è il prodotto dell'area del parallelogramma detto, ovvero $\|\mathbf{w}\times\mathbf{z}\|$, per la proiezione del vettore $\mathbf{v}$ sulla perpendicolare al piano contenente $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$, ovvero $\|\mathbf{v}\|\cos\alpha$, ove $\alpha\in(0,\pi/2)$, è l'angolo tra $\mathbf{v}$ e la retta perpendicolare al piano contenente $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$ (cf. ancora il disegno). La proiezione del vettore $\mathbf{v}$ sulla perpendicolare al piano altri non è che l'altezza del parallelepipedo determinato dai tre vettori e quindi si conclude che *il valore assoluto del prodotto misto* $|\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{z})|$ *coincide con il volume del parallelepipedo avente i tre vettori* $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ *come spigoli*.

Esercizio 4.4. Dati tre vettori u,v,w di $\mathbb{R}^3$, si verifichi che $u\cdot(v\times w)=(u\times v)\cdot w$. Si deduca da ciò che, cambiando comunque l'ordine con cui compaiono i tre fattori nel prodotto misto, il risultato cambia, al più per il segno. □

Esercizio 4.5. Siano $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{z}$ vettori di $\mathbb{R}^3$, Si verifichi che
(a) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}$.
(b) Ricordando le proprietà del prodotto misto ed il punto precedente, si verifichi che $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{z})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{z})-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{z})$. □

Vogliamo chiudere questa sezione con qualche ulteriore osservazione sul volume. Dati quattro punti dello spazio A_0,A_1,A_2,A_3, che non siano contenuti in uno stesso piano, possiamo considerare i sottoinsiemi

$$P(A_0,A_1,A_2,A_3)=\left\{\ A_0+\sum_{i=1}^{i}\lambda_i\overrightarrow{A_0A_i}\ \middle|\ \lambda_i\in[0,1],\ i=1,\dots,3\ \right\}\qquad\text{[parallelepipedo]}$$

e

$$\Delta(A_0,A_1,A_2,A_3)=\left\{\ A_0+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\overrightarrow{A_0A_i}\ \middle|\ \lambda_i\in[0,1],i=1,\dots,3,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\leq 1\ \right\}\qquad\text{[simplesso]}$$

e vogliamo confrontare i volumi di questi due solidi.

Esercizio 4.6. Si considerino i punti $A_0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $A_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.
(a) Si disegni il simplesso $\Delta(A_0,A_1,A_2,A_3)$ e si mostri che questo sottoinsieme dipende solo dai punti A_0, A_1, A_2, A_3 e non dall'ordine in cui vengono presi.
(b) Si disegni il parallelepipedo $P(A_0,A_1,A_2,A_3)$ e si mostri che questo sottoinsieme è diverso dal parallelepipedo $P(A_1,A_0,A_2,A_3)$.
(c) Si mostri che il simplesso $\Delta(A_0,A_1,A_2,A_3)$ è l'intersezione di tutti i parallelepipedi determinati dai quattro punti A_0,A_1,A_2,A_3. □

Esercizio 4.7. Siano dati tre punti A_0, A_1, A_2 e si considerino i sottoinsiemi

$$P(A_0,A_1,A_2)=\left\{\ A_0+\lambda_1\overrightarrow{A_0A_1}+\lambda_2\overrightarrow{A_0A_2}\ \middle|\ \lambda_1,\lambda_2\in[0,1]\ \right\}$$

e

$$\Delta(A_0, A_1, A_2) = \left\{ A_0 + \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \lambda_2 \overrightarrow{A_0A_2} \,\middle|\, \lambda_i \in [0,1], i = 1,2,\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 \right\}.$$

Si disegnino questi sottoinsiemi nel caso in cui $A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Che relazione c'è tra l'area di $P(A_0, A_1, A_2)$ e quella di $\Delta(A_0, A_1, A_2)$? □

⋆Esercizio 4.8. Dati quattro punti P, Q, R, S dello spazio affine, il simplesso $\Delta(P, Q, R, S)$ si descrive nel modo più simmetrico utilizzando coordinate baricentriche (cf. `Esercizio I.3.9`). Si verifichi che si ha

$$\Delta(P, Q, R, S) = \{\, \mu_0 P + \mu_1 Q + \mu_2 R + \mu_3 S \mid \mu_i \geq 0,\ i = 0,1,2,3 \quad \text{e} \quad \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \,\}.$$

Ricordando che $\Delta(P, Q, R, S) = \left\{ P + \lambda_1 \overrightarrow{PQ} + \lambda_2 \overrightarrow{PR} + \lambda_3 \overrightarrow{PS} \,\middle|\, \lambda_i \in [0,1], i = 1, \ldots, 3,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 1 \right\}$, si scrivano esplicitamente le relazioni tra i coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, e $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$. □

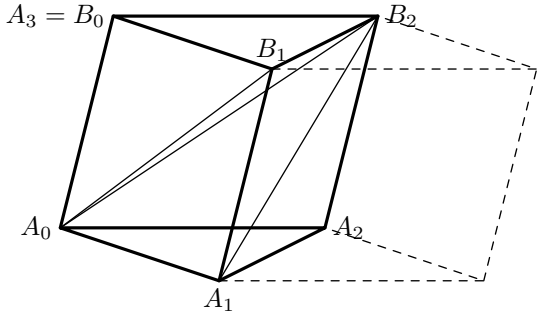
Abbiamo visto che il volume del parallelepipedo $P(A_0, A_1, A_2, A_3)$ è uguale a $\left| \overrightarrow{A_0A_1} \cdot (\overrightarrow{A_0A_2} \times \overrightarrow{A_0A_3}) \right|$ e poniamo il volume del simplesso $\Delta(A_0, A_1, A_2, A_3)$ uguale a

$$vol(\Delta(A_0, A_1, A_2, A_3)) = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{A_0A_1} \cdot (\overrightarrow{A_0A_2} \times \overrightarrow{A_0A_3}) \right|.$$

Ora vogliamo mostrare come il parallelepipedo $P(A_0, A_1, A_2, A_3)$ si decomponga nell'unione di $6 = 3!$ simplessi aventi tutti volume uguale al volume di $\Delta(A_0, A_1, A_2, A_3)$, e quindi che la definizione è coerente con quanto abbiamo ottenuto in precedenza.

Facendo riferimento al disegno qui a fianco, osserviamo che la base del parallelepipedo –ovvero la faccia contenente i vettori $\overrightarrow{A_0A_1}$ ed $\overrightarrow{A_0A_2}$– si decompone nell'unione di 2 triangoli congruenti e quindi che il parallelepipedo $P(A_0, A_1, A_2, A_3)$ si decompone nell'unione di 2 solidi congruenti al prisma Π, costruito sul triangolo $A_0A_1A_2$, ovvero l'insieme

$$\left\{ A_0 + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} \,\middle|\, \lambda_i \in [0,1],\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 \right\}.$$



Sempre facendo riferimento al disegno sopra, si vede che, a sua volta, il prisma Π si decompone nell'unione di 3 simplessi tridimensionali, aventi lo stesso volume del simplesso $\Delta(A_0, A_1, A_2, A_3)$ e precisamente nell'unione dei 3 simplessi tridimensionali (tetraedri)

$$\Delta(A_0, A_1, A_2, B_2), \qquad \Delta(A_0, A_1, B_1, B_2), \qquad \Delta(A_0, B_0, B_1, B_2).$$

I volumi dei tre solidi sono rispettivamente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} \left| \overrightarrow{A_0A_1} \cdot (\overrightarrow{A_0A_2} \times (\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0B_2})) \right| &= \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{A_0A_1} \cdot (\overrightarrow{A_0A_2} \times \overrightarrow{A_0A_3}) \right|, \\
\frac{1}{6} \left| \overrightarrow{A_0A_1} \cdot ((\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0B_1}) \times (\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0B_2})) \right| &= \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{A_0A_1} \cdot (\overrightarrow{A_0A_2} \times \overrightarrow{A_0A_3}) \right|, \\
\frac{1}{6} \left| \overrightarrow{A_0B_0} \cdot ((\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0B_1}) \times (\overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0B_2})) \right| &= \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{A_0A_1} \cdot (\overrightarrow{A_0A_2} \times \overrightarrow{A_0A_3}) \right|,
\end{aligned}$$

come si verifica facilmente, ricordando le proprietà del prodotto misto e che $\overrightarrow{A_0A_1} = \overrightarrow{B_0B_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2} = \overrightarrow{B_0B_2}$ Dunque, il volume del prisma Π è tre volte il volume del simplesso ed il volume del parallelepipedo è il doppio del volume del prisma; e ciò da la relazione cercata.

5. Geometria analitica nello spazio tridimensionale

Dalle osservazioni fatte nelle sezioni precedenti sul prodotto scalare e sul prodotto vettoriale, discendono alcune utili applicazioni alla misura di distanze ed angoli tra rette e piani dello spazio euclideo tridimensionale.

Cominciamo con un'osservazione di carattere generale, riguardo alla distanza tra sottovarietà lineari in uno Spazio Euclideo di dimensione qualsiasi. Come abbiamo già detto, la distanza tra due punti, P e Q, dello Spazio Euclideo è uguale alla norma del vettore $\overrightarrow{PQ}$; ovvero, in simboli, $d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$, e questa distanza gode delle usuali proprietà.

La distanza tra due sottoinsiemi non vuoti A e B dello Spazio Euclideo si può quindi definire come

$$d(A,B) = \inf\{\, d(P,Q) \mid P \in A,\ Q \in B \,\},$$

perchè l'insieme delle distanze tra coppie di punti di A e di B è un insieme di numeri reali non negativi, e quindi inferiormente limitato; ciò garantisce l'esistenza dell'estremo inferiore.

Se i due insiemi sono sottovarietà lineari, possiamo mostrare che questo estremo inferiore è in realtà un minimo e caratterizzare le coppie di punti su cui questo minimo viene assunto.

5.1 Proposizione. *Siano $\mathbb{L} = \{\, P + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U \,\}$ ed $\mathbb{M} = \{\, Q + \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in W \,\}$ due sottovarietà lineari, non vuote, dello spazio euclideo. Allora esistono un punto $P_0 \in \mathbb{L}$ ed un punto $Q_0 \in \mathbb{M}$ tali che $\overrightarrow{P_0Q_0}$ sia ortogonale sia ad U che a W e, per ogni punto $X \in \mathbb{L}$ ed ogni punto $Y \in \mathbb{M}$, si ha $\|\overrightarrow{P_0Q_0}\| \leq \|\overrightarrow{XY}\|$ e quindi $d(\mathbb{L},\mathbb{M}) = \|\overrightarrow{P_0Q_0}\|$.*

dim. Se le due varietà sono incidenti, vi è almeno un punto $P_0 \in \mathbb{L} \cap \mathbb{M}$ e quindi la distanza tra le due varietà è nulla. Il vettore $\mathbf{0} = \overrightarrow{P_0P_0}$ è ortogonale sia ad $\mathbb{L}$ che ad $\mathbb{M}$ e la distanza tra le due varietà coincide con la lunghezza di questo vettore(*).

Se invece $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \emptyset$, il vettore $\overrightarrow{PQ}$ si scrive come somma $\mathbf{u} + \mathbf{w} + \mathbf{n}$, ove $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{w} \in W$, ed $\mathbf{n}$ è ortogonale sia ad U che a W. Quindi, presi $P_0 = P + \mathbf{u} \in \mathbb{L}$ e $Q_0 = Q - \mathbf{w} \in \mathbb{M}$, si ha che $\mathbf{n} = \overrightarrow{P_0Q_0}$ è ortogonale sia ad $\mathbb{L}$ che ad $\mathbb{M}$.

Resta da verificare che $\|\mathbf{n}\| = \|\overrightarrow{P_0Q_0}\|$ è la minima tra le norme di vettori che congiungano un punto di $\mathbb{L}$ con un punto di $\mathbb{M}$. Dati un punto $X \in \mathbb{L}$ ed un punto $Y \in \mathbb{M}$, si ha $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XP_0} + \overrightarrow{P_0Q_0} + \overrightarrow{Q_0Y}$, ove $\overrightarrow{XP_0} \in U$, $\overrightarrow{Q_0Y} \in W$ ed $\mathbf{n} = \overrightarrow{P_0Q_0}$ è ortogonale ad entrambi. Da ciò si deduce che

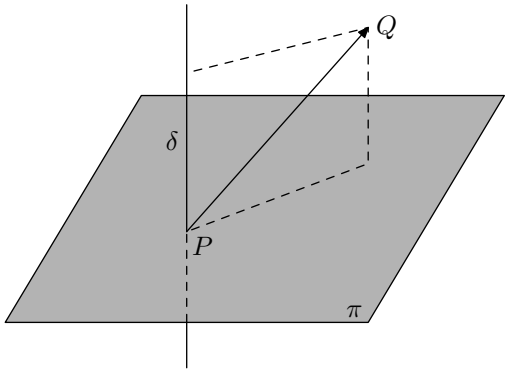
$$\|\overrightarrow{XY}\|^2 = (\overrightarrow{XP_0} + \overrightarrow{Q_0Y} + \mathbf{n}) \cdot (\overrightarrow{XP_0} + \overrightarrow{Q_0Y} + \mathbf{n}) = \|(\overrightarrow{XP_0} + \overrightarrow{Q_0Y})\|^2 + \|\mathbf{n}\|^2 \geq \|\mathbf{n}\|^2$$

che è quanto serve per concludere. **CVD** □

Andiamo ora a scrivere alcune formule esplicite nel caso dello Spazio Euclideo tridimensionale.

- *Distanza di un punto da un piano.*

Sia π il piano passante per il punto $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ e perpendicolare al vettore $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Dunque un punto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dello spazio appartiene a π se, e solo se, $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0$; ovvero se, e solo se, $ax + by + cz - d = 0$, ove $d = ax_0 + by_0 + cz_0$. Allora, dato un punto $Q = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ dello spazio, la sua distanza dal piano π è uguale alla lunghezza δ della proiezione ortogonale del vettore $\overrightarrow{PQ}$ sulla retta perpendicolare al piano π, ovvero



(*) Inoltre, $\mathbf{0}$ è l'unico vettore che congiunga un punto di $\mathbb{L}$ con un punto di $\mathbb{M}$ e che sia ortogonale sia ad U che a W (perchè?).

$$d(Q,\pi) = \frac{|\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{PQ}|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|ax_1+by_1+cz_1-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

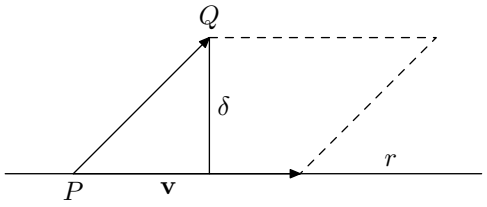
Osserviamo in particolare che, da quanto abbiamo visto discende che i coefficienti della parte omogenea di un'equazione cartesiana del piano π sono le componenti di un vettore ortogonale al piano stesso.

- *Distanza tra una retta ed un piano paralleli.*

La distanza tra una retta ed un piano tra loro paralleli è uguale alla distanza di un qualunque punto della retta dal piano.

- *Distanza di un punto da una retta.*

Si consideri la retta r, passante per P e parallela al vettore $\mathbf{v}$. Supponiamo il vettore $\mathbf{v}$ applicato nel punto P (cf. il disegno a fianco); allora la distanza tra un punto X dello spazio e la retta r, coincide con l'altezza δ del parallelogramma che ha i vettori $\mathbf{v}$ e $\overrightarrow{PX}$ come lati, e quindi



$$d(X,r) = \frac{\|\overrightarrow{PX}\times\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}\ .$$

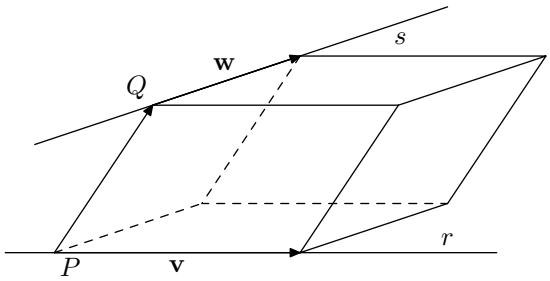
Esercizio 5.1. Si considerino la retta r, passante per P e parallela al vettore $\mathbf{v}$ ed un punto X dello spazio. Si verifichi che $d(X,r)^2 = \|\overrightarrow{PX}\|^2 - \frac{(\overrightarrow{PX}\cdot\mathbf{v})^2}{\|\mathbf{v}\|^2}$. Si faccia un disegno che giustifichi questa uguaglianza e si osservi che questa formula è valida nello spazio euclideo di dimensione qualsiasi. □

- *Distanza tra due rette parallele.*

La distanza tra due rette parallele è uguale alla distanza di un qualunque punto di una delle due rette dall'altra.

- *Distanza tra due rette non parallele.*

Si considerino la retta r, passante per P e parallela al vettore $\mathbf{v}$ e la retta S, passante per Q e parallela al vettore $\mathbf{w}$. Si consideri il parallelepipedo determinato dai vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\overrightarrow{PQ}$ (cf. il disegno a fianco). Allora la distanza tra le due rette, coincide con l'altezza del parallelepipedo, relativa al parallelogramma di base che ha i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ come lati; e quindi



$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|}{\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|}\ .$$

Si osservi infine, che la distanza tra le due rette è uguale a zero se, e solo se, il parallelepipedo nella figura degenera, ovvero se, e solo se, le due rette (non parallele) sono incidenti.

- *Angolo tra due rette.*

Si considerino la retta r, parallela al vettore $\mathbf{v}$ e la retta S, parallela al vettore $\mathbf{w}$. Allora, per definizione, si prende come angolo tra le due rette, il più piccolo degli angoli formati da due vettori paralleli alle due rette. Quindi, indicato con $\alpha(r,s)\in[0,\pi/2]$ tale angolo, in base alle proprietà del prodotto scalare, possiamo scrivere

$$\cos\alpha(r,s) = \frac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}|}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|}.$$

- *Angolo tra una retta ed un piano.*

Si considerino la retta r, parallela al vettore $\mathbf{v}$ ed il piano σ perpendicolare al vettore $\mathbf{n}$. Allora l'angolo tra la retta ed il piano, coincide con il complementare(*) dell'angolo tra r e una perpendicolare al piano σ. Quindi, indicato con $\alpha(r,\sigma)$ l'angolo tra la retta ed il piano, in base a facili identità delle funzioni trigonometriche, possiamo scrivere

$$\sin\alpha(r,\sigma) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha(r,\sigma)\right) = \frac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{n}\|}.$$

Nel seguito di questa sezione ci applicheremo a risolvere con i metodi descritti alcuni esercizi di geometria del piano e dello spazio.

Esercizio 5.2. *Nello spazio euclideo tridimensionale, dotato di un riferimento ortonormale, si consideri il triangolo ABC, di vertici*

$$A = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}.$$

(a) Si determini la retta r, perpendicolare al piano σ su cui giace il triangolo ABC, e passante per il baricentro di tale triangolo. (il baricentro di un triangolo è il punto di intersezione delle mediane)

(b) Si determinino i punti R delle retta r per cui il triangolo ABR ha area uguale all'area del triangolo ABC.

Svolgimento. Facciamo una breve digressione sul baricentro di un triangolo. I punti medi L ed M dei lati BC ed AB, rispettivamente, sono determinati dalle condizioni

$$\overrightarrow{OL} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2} = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}}{2} = \begin{pmatrix}1\\-1/2\\3/2\end{pmatrix}.$$

Quindi il baricentro H, ovvero il punto di intersezione tra le due mediane AL e CM corrisponde ai valori dei parametri λ e μ, per cui si ha

$$\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \mu\overrightarrow{CM};$$

ovvero, con un calcolo esplicito sulle coordinate, si ottiene

$$\begin{cases} 1 - \frac{3}{2}\lambda = -2 + 3\mu \\ \frac{1}{2}\lambda = 2 - \frac{5}{2}\mu \\ 1 = \frac{3}{2}\mu \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \lambda = \frac{2}{3} \\ \mu = \frac{2}{3} \end{cases}$$

da cui si conclude(†) che

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\left(\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}}{2} - \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \begin{pmatrix}0\\1/3\\1\end{pmatrix}.$$

(*) Due angoli si dicono *complementari* se la loro somma è un angolo retto.

(†) Ricordiamo che il baricentro di n punti materiali $P_1,\dots,P_n$, di masse $m_1,\dots,m_n$ è il punto G, determinato dalla condizione

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OP_1}+\cdots+m_n\overrightarrow{OP_n}}{m_1+\cdots+m_n}.$$

È facile verificare che il baricentro di $n+1$ punti $P_1,\dots,P_{n+1}$, di masse $m_1,\dots,m_{n+1}$ è anche il baricentro dei due punti G e P_{n+1}, ove G è il baricentro di $P_1,\dots,P_n$ e gli si attribuisce la massa totale degli n punti, ovvero $m = m_1+\cdots+m_n$.

Un vettore perpendicolare al piano contenente il triangolo ABC è $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{\sqrt{19}}{2}$ è la misura dell'area del triangolo ABC.

Quindi la retta r, passante per H e parallela a $\mathbf{n}$, ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 9x - 6y + 3z = 1 \\ 3z - 3y = 2 \end{cases}.$$

Il generico punto di r ha coordinate

$$R_t = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{3} + 3t \\ 1 + 3t \end{pmatrix} \qquad \text{al variare di } t \in \mathbb{R}.$$

e l'area del triangolo ABR_t è uguale a $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR_t}\|$; dunque i punti cercati sono determinati dalla condizione

$$\sqrt{19} = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR_t}\| = \sqrt{(\tfrac{1}{3} + 6t)^2 + 2(t-1)^2}$$

ovvero $t = \pm\frac{2}{3}$. □

Esercizio 5.3. Nello spazio tridimensionale si considerino i tre punti

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini un'equazione cartesiana del piano π, contenente il triangolo ABC, e si determini l'area di tale triangolo.
(b) Si determini la retta s perpendicolare al piano π, passante per il punto $P = (0, -3, 0)$.
(b) Si determini la distanza tra la retta s e la retta r passante per A e B. □

Esercizio 5.4. Nello spazio euclideo tridimensionale, dotato di un riferimento ortonormale, si consideri il triangolo ABC, di vertici

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini l'equazione del piano su cui giace il triangolo ABC.
(b) Si determini l'area del triangolo ABC. □

Esercizio 5.5. Nello spazio euclideo tridimensionale, siano dati il piano π e le rette r ed s di equazioni

$$\pi : x - 2y + z = 3, \quad r : \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}.$$

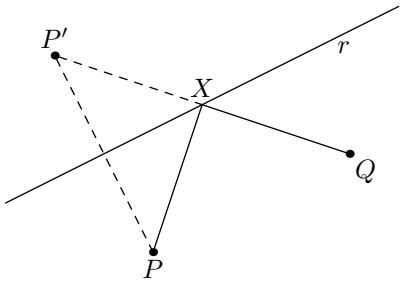
Si determinino, se esistono, rette incidenti sia r che s ed aventi distanza $\sqrt{6}$ dal piano π. In caso affermativo, si scrivano delle equazioni cartesiane per le rette cercate e si determinino i punti di intersezione tra tali rette e le rette r ed s. □

Esercizio 5.6. *Nel piano euclideo siano dati la retta $r : y - \frac{1}{2}x - 2 = 0$ ed i punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si determini quell'unico punto $X \in r$ per cui la somma delle distanze $\|\overrightarrow{PX}\| + \|\overrightarrow{XQ}\|$ è minima e si*

verifichi che, in tal caso, l'angolo tra le retta r e la retta per P ed X coincide con l'angolo tra la retta r e la retta per Q ed X[(*)].

È vero che il triangolo PQX ha area minima tra tutti i triangoli aventi il segmento PQ come base ed il terzo vertice sulla retta r?

Svolgimento. Si consideri il punto P', simmetrico di P rispetto ad r e sia X il punto di intersezione tra la retta r e la retta per P' e Q, come illustrato nello schizzo sottostante.



Allora la somma delle distanze $\|\overrightarrow{PX}\| + \|\overrightarrow{XQ}\|$ è uguale alla distanza $\|\overrightarrow{P'Q}\|$, che è minore della somma $\|\overrightarrow{PY}\| + \|\overrightarrow{YQ}\|$, qualunque sia il punto Y della retta r, in base alla disuguaglianza triangolare.

L'angolo (non orientato) tra $\overrightarrow{XP'}$ ed r è uguale all'angolo tra $\overrightarrow{XP}$ ed r perchè sono simmetrici rispetto alla retta r. Inoltre, l'angolo tra $\overrightarrow{XP'}$ ed r è uguale all'angolo tra $\overrightarrow{XQ}$ ed r perchè P', Q ed X sono allineati.

Passiamo quindi a calcolare il risultato in base ai dati del problema. La retta r', passante per P e perpendicolare ad r, ha equazione $r' : 2x + y = 2$ ed interseca r nel punto $T = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; dunque il simmetrico di P rispetto ad r è $P' = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (ovvero $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PT}$, ove O è l'origine del piano).

La retta per P' e Q ha equazione $x + 3y = 11$ ed interseca r nel punto $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dunque, indicato con $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vettore parallelo alla retta r, con un calcolo diretto, si verifica che

$$\frac{|\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{PX}|}{\|\mathbf{v}\| \, \|\overrightarrow{PX}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{XQ}|}{\|\mathbf{v}\| \, \|\overrightarrow{XQ}\|}$$

e quindi che gli angoli tra la retta r e le rette PX ed XQ coincidono e sono uguali a $\frac{\pi}{4}$.

Per quanto riguarda l'area dei triangoli aventi il segmento PQ come base ed il terzo vertice sulla retta r, è evidente che il triangolo ha area minima quando degenera, ovvero quando il terzo vertice è il punto di intersezione tra la retta r e la retta PQ, e ciò accade nel punto $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, diverso da X. Dunque l'affermazione è falsa. □

Esercizio 5.7. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il piano π e la retta r, di equazioni*

$$\pi : 2x - y + z = 2 \qquad \text{e} \qquad r : \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 2 \end{cases} .$$

(a) Si scrivano le equazioni cartesiane della retta s, proiezione ortogonale della retta r sul piano π.

(b) Si scrivano le equazioni del luogo $\mathcal{Q}$ dei punti equidistanti da r ed s.

(*) L'esercizio proposto ha un'interpretazione 'fisica': infatti si può pensare al percorso PXQ come al cammino di un raggio di luce che parte da P e giunge a Q dopo una riflessione sullo 'specchio' rappresentato dalla retta r. È ben noto che il raggio incidente ed il raggio riflesso formano angoli uguali con la superficie riflettente e che il cammino percorso deve avere lunghezza minima. Segnaliamo poi un'analoga interpretazione fisica del problema proposto, identificando i punti P e Q come due palline e la retta r come un lato del tavolo da biliardo, in tal caso il punto X rappresenta il punto verso cui lanciare la pallina P per colpire prima il lato e poi la pallina Q.

(c) Si mostri che l'intersezione tra $\mathcal{Q}$ ed il piano σ, contenente r ed s, è costituita da due rette perpendicolari tra loro.

Svolgimento. (a) La proiezione ortogonale di r su π si ottiene intersecando il piano π con il piano σ, contenente la retta r e parallelo al vettore $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; ove $\mathbf{n}$ è un vettore perpendicolare a π. I piani contenenti r hanno equazioni(†)

$$\lambda(x+y-2)+\mu(y+z-2)=0 \qquad \text{al variare di } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Un tale piano è parallelo al vettore $\mathbf{n}$ se, e solo se, le coordinate di tale vettore sono soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione del piano; ovvero se, e solo se, $\lambda = 0$. Ciò significa che $\sigma : y + z = 2$ e quindi

$$s : \begin{cases} y+z=2 \\ x-y=0 \end{cases}.$$

(b) La retta r passa per $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre la retta s passa per $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Quindi i punti $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ equidistanti dalle due rette devono soddisfare alla condizione

$$d(X,r) = d(X,s) \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{\|\overrightarrow{PX}\times\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\overrightarrow{QX}\times\mathbf{w}\|}{\|\mathbf{w}\|};$$

ovvero, i punti di $\mathcal{Q}$ devono soddisfare all'equazione $xz - xy + y - z = 0$.
(c) L'intersezione tra $\mathcal{Q}$ e σ è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\mathcal{Q}\cap\sigma : \begin{cases} xz-xy+y-z=0 \\ y+z=2 \end{cases}$$

ovvero i punti delle due rette

$$t_1 : \begin{cases} x=1 \\ y+z=2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad t_2 : \begin{cases} z-y=0 \\ y+z=2 \end{cases}.$$

(†) Dato un punto P ed un vettore $\mathbf{n}$, i punti X del piano passante per P e perpendicolare ad $\mathbf{n}$ sono determinati dalla condizione $\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{PX} = 0$. Una retta, passante per P e parallela ad un vettore $\mathbf{v}$, è intersezione di due piani distinti passanti per P, e quindi un punto X appartiene ad una tale retta se, e solo se,

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1\cdot\overrightarrow{PX}=0 \\ \mathbf{n}_2\cdot\overrightarrow{PX}=0 \end{cases}$$

ove $\mathbf{n}_1$ ed $\mathbf{n}_2$ sono due qualsiasi vettori ortogonali a $\mathbf{v}$ e non proporzionali tra loro. Dunque, ogni vettore ortogonale a $\mathbf{v}$ si scrive come combinazione di $\mathbf{n}_1$ ed $\mathbf{n}_2$, ovvero

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0 \iff \mathbf{n}=\lambda\mathbf{n}_1+\mu\mathbf{n}_2 \quad \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

e ciò significa che ogni piano passante per P e parallelo a $\mathbf{v}$ (e quindi contenente r) ha un'equazione del tipo

$$(\lambda\mathbf{n}_1+\mu\mathbf{n}_2)\cdot\overrightarrow{PX}=0 \qquad \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Ciò spiega la formula successiva.

Queste due rette sono parallele, rispettivamente, ai vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e quindi sono ortogonali tra loro. □

Esercizio 5.8. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il piano π e la retta r, di equazioni

$$\pi : x - y = 0 \qquad \text{e} \qquad r : \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}.$$

(a) Si scrivano le equazioni cartesiane della retta s, proiezione ortogonale della retta r sul piano π.
(b) Si determini la retta t, perpendicolare ad s, contenuta nel piano π, e passante per $P = r \cap s$.
(c) Si fissi su ciascuna delle rette r, s e t un punto a distanza 1 da P. Detti R, S e T tali punti, si determini il volume del parallelepipedo di lati PR, PS e PT. □

Esercizio 5.9. Si considerino il piano $\pi : x + y = 2$ e la retta $r : \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$.

(a) Si determinino il punto P di intersezione tra π ed r ed il piano σ ortogonale a π e passante per r.
(b) Si determinino le rette passanti per P, contenute nel piano σ e tali da formare angoli uguali con la retta r e con la perpendicolare a π. □

Esercizio 5.10. Si considerino il piano $\pi : x - y = 0$ e la retta $r : \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}$.

(a) Si determinino il punto P di intersezione tra π ed r ed il piano σ ortogonale a π e passante per r.
(b) Si determinino le rette passanti per P, contenute nel piano σ e tali da formare angoli uguali con la retta r e con la perpendicolare a π. □

Esercizio 5.11. Si considerino il piano π e la retta r di equazioni

$$\pi : x + 2y - z = 2 \qquad \text{e} \qquad r : \begin{cases} x - z = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

(a) Si calcoli la distanza δ tra r e π.
(b) Si determini la retta parallela ad r, incidente il piano π ed avente distanza δ da r. □

Esercizio 5.12. *Nello spazio euclideo tridimensionale E^3, dotato di un riferimento ortonormale, si considerino le tre rette r, s e t, di equazioni*

$$r : \begin{cases} y + z = 2 \\ y - z = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} y - x = 2 \\ y - z = 2 \end{cases}, \qquad t : \begin{cases} y + x = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}.$$

(a) Si calcolino le distanze tra le rette, prese a due a due.
(b) Preso il punto $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in r$, si determini la retta h_1, passante per P_1 ed incidente sia s che t.
(c) Si determini la retta h_2, passante per $P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in r$ ed incidente sia s che t e si mostri che h_1 ed h_2 sono sghembe.

Svolgimento. (a) La retta r passa per il punto $P_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{v}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, la retta s passa per il punto $P_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{v}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ed infine la retta t passa per il punto $P_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{v}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dunque

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{P_r P_s} \cdot (\mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_s)|}{\|\mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_s\|} = \sqrt{2}, \quad d(r,t) = 1, \quad d(s,t) = \sqrt{2}.$$

Dunque, le tre rette sono sghembe.

(b) La retta h_1 sarà l'intersezione tra il piano σ_1 contenente P_1 ed s ed il piano τ_1 contenente P_1 e t. Si ha quindi

$$\sigma_1 : 2x - y - z = -2, \qquad \tau_1 : x = 0, \qquad h_1 : \begin{cases} 2x - y - z = -2 \\ x = 0 \end{cases}.$$

(c) La retta h_2 sarà l'intersezione tra il piano σ_2 contenente P_2 ed s ed il piano τ_2 contenente P_2 e t. Si ha quindi

$$\sigma_2 : x + y - 2z = 2, \qquad \tau_2 : x - 3y = 0, \qquad h_2 : \begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x - 3y = 0 \end{cases}.$$

Infine si osserva facilmente che il sistema

$$h_1 \cap h_2 : \begin{cases} 2x - y - z = -2 \\ x = 0 \\ x + y - 2z = 2 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

non ha soluzione perchè la matrice completa ha rango 4, mentre la matrice incompleta ha rango 3. Dunque le due rette sono sghembe[(*)]. □

Esercizio 5.13. Nello spazio euclideo tridimensionale, dotato di un riferimento ortonormale, si considerino le tre rette r, s e t, di equazioni

$$r : \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x - z = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}, \qquad t : \begin{cases} x + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}.$$

(a) Si calcolino le distanze tra le rette, prese a due a due.

(b) Preso il punto $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in r$, si determini la retta h_1, passante per P_1 ed incidente sia s che t.

(c) Si determini la retta h_2, passante per $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in r$ ed incidente sia s che t e si mostri che h_1 ed h_2 sono sghembe. □

Esercizio 5.14. Nello spazio tridimensionale si considerino le rette r ed s di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x + 2y = 4 \\ z = 1 \end{cases}.$$

(a) Si mostri che le due rette sono sghembe e se ne calcoli la distanza.

(b) Per ogni numero reale t, si considerino i punti

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_t = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ t \end{pmatrix} \in r, \quad S_t = \begin{pmatrix} 2+2t \\ 1-t \\ 1 \end{pmatrix} \in s.$$

(*) Il fatto che h_1 ed h_2 non siano parallele si può verificare osservando che il rango della matrice incompleta del sistema è uguale a 3; oppure osservando direttamente che h_1 è parallela a $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, mentre h_2 è parallela a $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Inoltre, il fatto che $h_1 \cap h_2 = \emptyset$ si poteva verificare osservando che la distanza tra le due rette (non parallele)

$$d(h_1, h_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|}$$

è diversa da zero.

Si determini l'area del triangolo PR_tS_t al variare di t in $\mathbb{R}$. □

Esercizio 5.15. *Nello spazio euclideo tridimensionale, dotato di un riferimento ortonormale, si considerino le rette r ed s, di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad e \qquad s : \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 3x + y + 4z = 6 \end{cases}.$$

Si determini il sottoinsieme formato dai punti medi dei segmenti RS, al variare di R in r e di S in s.

Svolgimento. La retta r passa per $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre la retta s passa per $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Allora i punti delle due rette hanno rispettivamente coordinate

$$R_t = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{al variare di } t \in \mathbb{R}, \qquad S_s = \begin{pmatrix} s+2 \\ s \\ -s \end{pmatrix} \quad \text{al variare di } s \in \mathbb{R}.$$

Dunque l'insieme π dei punti medi tra punti di r e punti di s è

$$\pi = \left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{t+s+2}{2} \\ \frac{t+s}{2} \\ \frac{t-s}{2} \end{array} \right) \,\middle|\, (t,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

ed eliminando i parametri si vede che si tratta del piano di equazione cartesiana $\pi : x - y = 1$[(†)]. □

Esercizio 5.16. *Date le rette*

$$r : \begin{cases} x = -1 \\ z = y - 2 \end{cases} \qquad ed \qquad s : \begin{cases} x = 1 \\ z = 2y + 1 \end{cases}$$

trovare un segmento PQ, con $P \in r$ e $Q \in s$, tale che il suo punto medio appartenga alla retta h di equazioni $x + 1 = y = z$.

Svolgimento. La retta r passa per $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre la retta s passa per $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Allora i punti delle due rette hanno rispettivamente coordinate

$$R_t = \begin{pmatrix} -1 \\ 2+t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{al variare di } t \in \mathbb{R}, \qquad S_s = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 2s+1 \end{pmatrix} \quad \text{al variare di } s \in \mathbb{R}.$$

Dunque il punto medio tra R_t ed S_s ha coordinate $M_{s,t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{t+s+2}{2} \\ \frac{t+2s+1}{2} \end{pmatrix}$ ed appartiene alla retta h se, e solo se,

$$\begin{cases} t + s + 2 = 2 \\ t + 2s + 1 = 2 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} s = 1 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Dunque, il segmento cercato ha estremi $P = R_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $Q = S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e ciò conclude la discussione. □

(†) Il lettore può verificare che le rette r ed s sono entrambe parallele a π e che $d(r, \pi) = d(s, \pi)$.

Esercizio 5.17. Date le rette $r: \begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = 1 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = y + 1 \\ z = -1 \end{cases}$ trovare un segmento PQ, con $P \in r$ e $Q \in s$, tale che il suo punto medio appartenga alla retta h di equazioni $x = y = z - 1$. □

Esercizio 5.18. *Sia π il piano di equazione $2x + z = 5$ ed r la retta per l'origine perpendicolare al piano π. Si determinino le rette del piano π, passanti per il punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e distanti $\sqrt{2}$ dalla retta r.*

Svolgimento. Osserviamo che, essendo $r \perp \pi$, si tratta di determinare le due rette passanti per Q e tangenti alla circonferenza di centro in $r \cap \pi$ e raggio $\sqrt{2}$.

Poichè tali rette contengono il punto $Q \in \pi$, queste sono completamente determinate se si conosce un vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ parallelo ad esse. Le condizioni da porre sul vettore $\mathbf{v}$ sono che esso sia parallelo a π (ovvero che le sue coordinate siano soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di π) e quindi deve aversi $c = -2a$. Inoltre, detta s la retta per Q e parallela a $\mathbf{v}$, deve aversi

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{OQ} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{n})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{n}\|} = \sqrt{2},$$

ove $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un vettore perpendicolare a π (e quindi parallelo ad r). Dunque deve aversi $5a^2 - b^2 = 0$ e quindi vi sono due rette soddisfacenti alle condizioni poste e sono parallele rispettivamente ai vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \\ -2 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 5.19. Sia π il piano di equazione $x - 2z = 5$ ed r la retta per l'origine perpendicolare al piano π. Si determinino le rette del piano π, passanti per il punto $P = (1, 2, -2)$ e distanti $\sqrt{3}$ dalla retta r. □

Esercizio 5.20. Trovare i punti del piano $\alpha: x + y + z - 1 = 0$, aventi distanza 5 dalle rette

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = \mu \end{cases}$$

□

Esercizio 5.21. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il piano π e la retta r, di equazioni cartesiane*

$$\pi: 2x - 3y + z = 6 \qquad e \qquad r: \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino i punti X, Y e Z che si ottengono intersecando il piano π con gli assi coordinati e si determini l'area del parallelogramma avente i punti X, Y e Z come vertici.

(b) Al variare del punto R sulla retta r si calcoli il volume del parallelepipedo di vertici X, Y, Z ed R. È vero che tale volume è indipendente dalla scelta del punto R?

Svolgimento. (a) Le intersezioni tra π e gli assi coordinati si determinano risolvendo i sistemi lineari

$$X: \begin{cases} 2x - 3y + z = 6 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad Y: \begin{cases} 2x - 3y + z = 6 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad Z: \begin{cases} 2x - 3y + z = 6 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Dunque, si ha $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ e l'area del parallelogramma avente i punti X, Y e Z come vertici è uguale ad

$$A = \|\overrightarrow{XY} \times \overrightarrow{XZ}\| = \left\| \begin{pmatrix} -12 \\ 18 \\ -6 \end{pmatrix} \right\| = 6\sqrt{14}.$$

(b) La retta r passa per $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; dunque i punti di questa retta hanno coordinate $R_t = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Il volume del parallelepipedo avente X, Y, Z ed R_t come vertici è uguale a

$$V = |\overrightarrow{XR_t} \cdot (\overrightarrow{XY} \times \overrightarrow{XZ})| = 36$$

che non dipende da t. Ciò accade perchè r e π sono paralleli e quindi $V = Ad(r, \pi)$. □

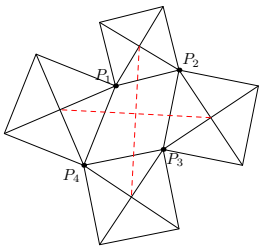
Esercizio 5.22. Trovare le equazioni delle rette incidenti le rette:

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = \mu \\ y = 0 \\ z = -\mu - 1 \end{cases}$$

e formanti angoli uguali con i piani xy, xz e yz. □

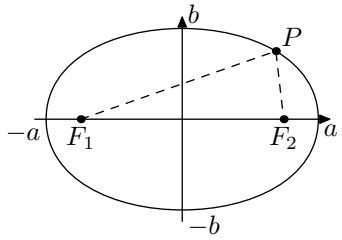
Esercizio 5.23. Trovare le equazioni delle rette passanti per il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, incidenti la retta $r : \begin{cases} x = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$, che formano con questa un angolo di $\frac{\pi}{6}$. □

Esercizio 5.24. Siano dati quattro punti, P_1, P_2, P_3, P_4, del piano affine e si consideri il quadrilatero (convesso) che ha questi punti come vertici. Si mostri che le due rette che congiungono i punti di intersezione delle diagonali dei quadrati costruiti su lati opposti sono perpendicolari tra loro (cf. il disegno a fianco). □



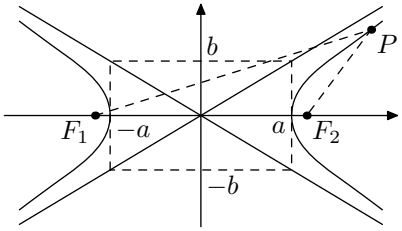
5.2 Richiami. Coniche come luogo geometrico. Nella scuola superiore le coniche vengono definite come luogo di punti la cui distanza da oggetti geometrici dati soddisfa ad opportune condizioni; da questa definizione si ricavano delle equazioni nel piano cartesiano ed alcune proprietà di queste curve. Fino a pochi anni or sono, queste conoscenze venivano date per scontate in ambito universitario e vaniva svolto uno studio più generale delle curve algebriche di secondo grado nello spazio proiettivo, affine ed euclideo, mostrando poi che, nell'ultimo caso, queste curve vengono a coincidere con le coniche definite come luoghi (cf. ad esempio il Capitolo VII di questi appunti). Col passare degli anni la conoscenza delle classiche definizioni delle coniche come luogo geometrico da parte degli iscritti ai primi anni di Università si è sempre più affievolita e perciò richiamiamo brevemente quelle nozioni, invitando lo studente che le conosca già a saltare questi richiami ed a rivedere le proprie conoscenze sulle coniche nei capitoli successivi (cf. `Esercizio VII.5.16`).

Ellisse. Si chiama così il luogo dei punti, X, per cui la somma delle distanze da due punti fissati, detti i *fuochi*, F_1 ed F_2 è uguale ad una fissata costante, $2a$.



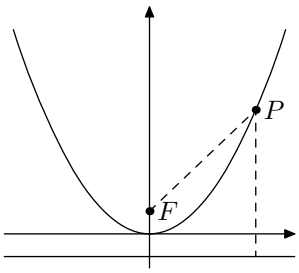
Ponendo i fuochi sull'asse delle ascisse, simmetrici rispetto all'origine, $F_1 = (-f, 0)$, $F_2 = (f, 0)$, si ha che un punto, $P = (x, y)$, appartiene all'ellisse se, e solo se, $\|P - F_1\| + \|P - F_2\| = 2a$, ovvero $\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a$ che è equivalente all'equazione $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, ove $b^2 = a^2 - f^2$. L'origine è *centro* di simmetria per la figura e le costanti $a > b > 0$ si chiamano i *semiassi* dell'ellisse.

Iperbole. Si chiama così il luogo dei punti, X, per cui la differenza delle distanze da due punti fissati, detti i *fuochi*, F_1 ed F_2 è uguale ad una fissata costante, $2a$.



Ponendo i fuochi sull'asse delle ascisse, simmetrici rispetto all'origine, $F_1 = (-f, 0)$, $F_2 = (f, 0)$, si ha che un punto, $P = (x, y)$, appartiene all'iperbole se, e solo se, $\|P - F_1\| - \|P - F_2\| = 2a$, ovvero $\sqrt{(x+f)^2 + y^2} - \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a$ che è equivalente all'equazione $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, ove $-b^2 = a^2 - f^2$. L'origine è *centro* di simmetria per la figura e le costanti $a > 0$ e $b > 0$ si chiamano i *semiassi* dell'iperbole. Le due rette $\dfrac{x}{a} \pm \dfrac{y}{b} = 0$ sono gli *asintoti* dell'iperbole.

Parabola. Si chiama così il luogo dei punti, X, equidistanti da un punto e da una retta fissati, detti, rispettivamente, il *fuoco*, F, e la *direttrice*.



Ponendo la direttrice parallela all'asse delle ascisse, con equazione $y = -f$, ed il fuoco sull'asse delle ordinate, con coordinate $F = (0, f)$, si ha che un punto, $P = (x, y)$, appartiene alla parabola se, e solo se, $\|P - F\| = |y + f|$, ovvero $\sqrt{x^2 + (y-f)^2} = |y + f|$ che è equivalente all'equazione $y = ax^2$, ove $a = 1/4f$. L'origine è il *vertice* della parabola e la costante a si chiama l'apertura della parabola. Un'apertura negativa significa che la parabola è rivolta verso il basso.

Esercizio 5.25. *Nel piano euclideo siano dati un punto, P, ed una retta, r, a distanza d l'uno dall'altra. Si determini il luogo dei punti X del piano tali che $\|X - P\| = k\mathrm{dist}(X, r)$, al variare di k tra i numeri reali positivi.*

Svolgimento. Non è restrittivo suppore di aver scelto le coordinate di modo che $P = O = (0, 0)$ ed r è la retta di equazione $x = d$. Preso uh generico punto, $X = (x, y)$, questi appartiene al luogo cercato se, e solo se,

$$x^2 + y^2 = k^2(x^2 - 2dx + d^2).$$

Se $\boxed{k \neq 1}$, l'equazione è equivalente a

$$\frac{(1-k^2)^2}{k^2 d^2}\left(x + \frac{k^2 d}{1-k^2}\right)^2 + \frac{1-k^2}{k^2 d^2}\, y^2 = 1.$$

Se $\boxed{0 < k < 1}$ si tratta di un'ellisse, con centro nel punto $C = \left(-\frac{k^2 d}{1-k^2}, 0\right)$ e fuochi in O ed in $F = \left(-\frac{2k^2 d}{1-k^2}, 0\right)$. I semiassi sono $\frac{dk}{1-k^2} > \frac{dk}{\sqrt{1-k^2}}$.

Se $\boxed{k > 1}$ si tratta di un'iperbole, con centro nel punto $C = \left(-\frac{k^2 d}{1-k^2}, 0\right)$ e fuochi in O ed in $F = \left(\frac{2k^2 d}{1-k^2}, 0\right)$. I semiassi sono $\frac{dk}{k^2-1}$ e $\frac{dk}{\sqrt{k^2-1}}$.

Se $\boxed{k = 1}$ si tratta di una parabola, di equazione $x = -\frac{1}{2d}y^2 + \frac{d}{c}$. Il fuoco è il punto O. □

L'esercizio precedente ci suggerisce un modo per ricavare le equazioni in coordinate polari delle coniche, quando un fuoco sia posto nell'origine. Ricordiamo che un punto, $X = (x, y)$, ha coordinate polari (ρ, ϑ), legate alle coordinate cartesiane dalle relazioni

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{y}{x} \end{cases}.$$

Data la retta $r : x-d = 0$, $(d > 0)$, relazione $\|X-O\| = k|d-x|$ si scrive in coordinate polari come $\rho = k|d-\rho\cos\vartheta|$. Si ottengono quindi le due espressioni

$$\rho = \frac{kd}{1+k\cos\vartheta}, \text{ se } \rho\cos\vartheta < d, \qquad \text{e} \qquad \rho = \frac{kd}{k\cos\vartheta - 1}, \text{ se } \rho\cos\vartheta > d$$

Che descrivono le coniche in coordinate polari quando un fuoco sia posto nell'origine.

Se $\boxed{k > 1}$, dobbiamo escludere i valori di ϑ per cui $\cos\vartheta = \pm\frac{1}{k}$, che sono precisamente le pendenze degli asintoti dell'iperbole.

Se $\boxed{0 < k \leq 1}$, si ha necesariamente $\rho\cos\vartheta < d$ e quindi la curva sta tutta a sinistra della retta r. Infatti, se fosse $\rho\cos\vartheta > d > 0$, si avrebbe di conseguenza

$$\text{dist}(X, r) = \rho\cos\vartheta - d < \rho\cos\vartheta \leq \rho = k\text{dist}(X, r) \leq \text{dist}(X, r),$$

che è assurdo.

Vogliamo chiudere questo capitolo con un'osservazione importante sulle trasformazioni dello spazio euclideo; ovvero vogliamo dimostrare che le trasformazioni che rispettano le distanze, necessariamente rispettano la struttura "affine" dello spazio. Per chiarire quanto abbiamo appena detto, è necessario introdurre le definizioni di applicazione lineare e di affinità.

5.3 Definizione. Un'applicazione $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ in sé, si dice un'*applicazione lineare* se $\phi(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha\phi(\mathbf{v}) + \beta\phi(\mathbf{w})$, per ogni coppia di vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ e per ogni coppia di scalari α, β.

5.4 Definizione. Un'applicazione biunivoca $f : \mathbb{A}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$ tra i punti dello spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$, si dice un'*affinità* se, esiste un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che per ogni coppia di punti P, Q dello spazio affine, si abbia $f(Q) = f(P) + \phi(\overrightarrow{PQ})$.

Esercizio 5.26. *Indichiamo con E^n lo spazio euclideo di dimensione n e sia $f : E^n \to E^n$ un'applicazione biunivoca tale che $\|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\| = \|\overrightarrow{PQ}\|$ per ogni coppia di punti $P, Q \in E^n$. Si mostri che f è un'affinità.*

Svolgimento. Fissato un punto $P \in E^n$, possiamo considerare l'applicazione (biiettiva) $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita ponendo $\phi(v) := f(P + v) - f(P)$. Se mostriamo che ϕ è un'applicazione lineare, abbiamo mostrato che f è un'affinità[(†)].

Osserviamo dapprima che è sufficiente dimostrare che

$$(*) \qquad \phi(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad \text{per ogni coppia di vettori } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Infatti, se è vera $(*)$, allora dati due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ ed una coppia di scalari α, β, si ha

$$\begin{aligned}[\phi(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) - \alpha\phi(\mathbf{v}) - \beta\phi(\mathbf{w})] \cdot \phi(\mathbf{z}) &= [\phi(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) \cdot \phi(\mathbf{z})] - \alpha[\phi(\mathbf{v}) \cdot \phi(\mathbf{z})] - \beta[\phi(\mathbf{w}) \cdot \phi(\mathbf{z})] = \\ &= (\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) \cdot \mathbf{z} - \alpha\mathbf{v} \cdot \mathbf{z} - \beta\mathbf{w} \cdot \mathbf{z} = 0\end{aligned}$$

per ogni vettore $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ e quindi, poiché ϕ è biiettiva, deve aversi $\phi(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) - \alpha\phi(\mathbf{v}) - \beta\phi(\mathbf{w}) = 0$, e quindi ϕ è un'applicazione lineare.

Resta quindi da dimostrare $(*)$. Siano quindi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ due vettori e consideriamo i punti P, $Q = P + \mathbf{y}$, $R = P + \mathbf{x}$ e $P' = f(P)$, $Q' = f(Q)$, $R' = f(R)$. Dall'osservazione che $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$, si deduce che

$$\|\overrightarrow{QR}\|^2 = \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QR} = \|\overrightarrow{PR}\|^2 + \|\overrightarrow{PQ}\|^2 - 2(\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ})$$

(†) E così abbiamo anche mostrato che la definizione di ϕ è indipendente dalla scelta del punto P (perchè?).

e quindi che

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{PR}\|^2 + \|\overrightarrow{PQ}\|^2 - \|\overrightarrow{QR}\|^2\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{P'R'}\|^2 + \|\overrightarrow{P'Q'}\|^2 - \|\overrightarrow{Q'R'}\|^2\right) = \overrightarrow{P'R'}\cdot\overrightarrow{P'Q'} = \\ &= \phi(\mathbf{x})\cdot\phi(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Questo risultato mette in evidenza le applicazioni lineari tra tutte le applicazioni tra spazi vettoriali e le affinità tra tutte le possibili trasformazioni dello spazio affine(*).

Concludiamo il capitolo con qualche facile applicazione delle coordinate baricentriche (cf. `Esercizio I.3.9`).

Esercizio 5.27. Siano dati n punti $P_1, \dots, P_n$ dello spazio affine e si consideri il punto $X = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$, con $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ (cf. `Esercizio I.3.9`). Data un'affinità f, si mostri che $f(X) = \lambda_1 f(P_1) + \cdots + \lambda_n f(P_n)$. Questo fatto si riassume brevemente dicendo che le affinità rispettano le coordinate baricentriche. □

Esercizio 5.28. Nello spazio tridimensionale si consideri il tetraedro Δ, di vertici

$$P_0 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(a) Si calcoli il volume V di Δ.
(b) Si considerino il punto $Q = \begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}$ ed il piano $\sigma : y = -4$. Dato un punto X dello spazio, non contenuto nel piano per Q, parallelo a σ, si definisce la sua proiezione, X', dal punto Q sul piano σ come il punto di intersezione tra la retta per X e Q ed il piano σ (in simboli $X' = (X + Q) \cap \sigma$). Si determinino le proiezioni $P_0', \dots, P_3'$ dei vertici di Δ dal punto Q sul piano σ.
(c) Si calcolino le coordinate baricentriche del punto P_3' rispetto ai punti P_0', P_1', P_2'.
(d) Si calcoli l'area A della proiezione di Δ. □

Svolgimento. (a). Considerati i vettori $\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{P_0P_2} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$,$\overrightarrow{P_0P_3} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, il volume cercato è uguale ad $\frac{1}{6}$ del volume del parallelepipedo avente i tre vettori come spigoli, ovvero

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot(\overrightarrow{P_0P_2}\times\overrightarrow{P_0P_3})\right| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\right| = \frac{2}{3}.$$

(*b*). Il punto P_0' è l'intersezione tra la retta per Q, parallela al vettore $\overrightarrow{QP_0}$, ed il piano σ, ovvero il punto $P_0' = \begin{pmatrix}-\frac{14}{5}\\-4\\2\end{pmatrix}$. Analogamente, si determinano i punti $P_1' = \begin{pmatrix}0\\-4\\6\end{pmatrix}$, $P_2' = \begin{pmatrix}-\frac{10}{3}\\-4\\10\end{pmatrix}$ e $P_3' = \begin{pmatrix}-2\\-4\\8\end{pmatrix}$.

(*c*). I quattro punti stanno su uno stesso piano e quindi esistono certamente dei numeri reali α, β, γ, con $\alpha + \beta + \gamma = 1$, per cui si abbia $P_3' = \alpha P_0' + \beta P_1' + \gamma P_2'$; precisamente, si ha

$$\alpha = \frac{5}{92}, \qquad \beta = \frac{9}{23}, \qquad \gamma = 1 - \alpha - \beta = \frac{51}{92}.$$

(*) Si osservi che non abbiamo mai usato nel corso della dimostrazione l'ipotesi che lo spazio vettoriale fosse di dimensione finita e quindi gli stessi argomenti possono essere utilizzati per dimostrare un analogo asserto negli spazi di Hilbert.

(d) Poichè le tre coordinate baricentriche di P_3' sono tutte positive, si conclude che il punto P_3' è interno al triangolo di vertici P_0', P_1', P_2' e quindi che l'area A si riduce all'area di quest'ultimo triangolo, ovvero

$$A = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1'P_0'} \times \overrightarrow{P_1'P_2'}\| = \frac{184}{15}.$$

Ciò conclude la discussione. □

Esercizio 5.29. Nello spazio tridimensionale si consideri il tetraedro Δ, di vertici

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si calcoli il volume V di Δ.

(b) Si consideri la retta r, passante per l'origine e parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si determinino gli estremi del segmento Q_1Q_2, costituito dai punti di r che cadono all'interno di Δ e se ne calcoli la lunghezza.

(c) Considerando la retta r orientata concordemente al vettore v, si dica in quale faccia del tetraedro la retta "entra" e da quale faccia "esce". □

Svolgimento. (a). Considerati i vettori

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{P_0P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{P_0P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix};,$$

il volume cercato è uguale a

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{P_0P_1} \cdot (\overrightarrow{P_0P_2} \times \overrightarrow{P_0P_3})\right| = \frac{1}{6}\left|\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}\right| = 1.$$

(*b*). Per determinare i punti interni al tetraedro è comodo usare coordinate baricentriche, basate sui quattro vertici di Δ; infatti, un punto $P = x_0P_0 + \cdots + x_3P_3$ è all'interno del tetraedro se, e solo se, le quattro coordinate baricentriche, $x_0, \ldots, x_3$, appartengono tutte all'intervallo $[0, 1]$.

Un generico punto P dello spazio ha coordinate

$$P = x_0P_0 + x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_3 \\ -3x_0+2x_2+x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Il punto P sta sulla retta r se, e solo se,

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_0 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2(x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_3) = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{8-23x_0}{7} \\ x_2 = \frac{1+5x_0}{7} \\ x_3 = \frac{11x_0-2}{7} \end{cases}.$$

Un tale punto appartiene al tetraedro se, e solo se, la coordinata x_0 soddisfa alle disuguaglianze

$$\begin{cases} 0 \le x_0 \le 1 \\ \frac{1}{23} \le x_0 \le \frac{8}{23} \\ -\frac{1}{5} \le x_0 \le \frac{6}{5} \\ \frac{2}{11} \le x_0 \le \frac{9}{11} \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad x_0 \in \left[\tfrac{2}{11}, \tfrac{8}{23}\right].$$

Quindi gli estremi del segmento cercato sono i punti

$$Q_1 = \tfrac{8}{23}P_0 + \tfrac{9}{23}P_2 + \tfrac{6}{23}P_3 = \begin{pmatrix} 9/23 \\ 6/23 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q_2 = \tfrac{2}{11}P_0 + \tfrac{6}{11}P_1 + \tfrac{3}{11}P_2 = \begin{pmatrix} 9/11 \\ 6/11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La lunghezza del segmento Q_1Q_2 è quindi uguale a

$$\|\overrightarrow{Q_1Q_2}\| = (\tfrac{3}{11} - \tfrac{3}{23})\left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \tfrac{36\sqrt{13}}{253}.$$

(*c*). Osserviamo da ultimo che, ordinando i punti della retta concordemente col verso del vettore v, il punto Q_1 precede il punto Q_2 e quindi il primo è da considerarsi il punto in cui la retta "entra" nel tetraedro ed il secondo il punto da cui la retta "esce". Guardando alle coordinate baricentriche dei due punti si conclude che Q_1 appartiene alla faccia $P_0P_2P_3$, mentre Q_2 appartiene alla faccia $P_0P_1P_2$. □

II
Spazi vettoriali ed applicazioni lineari

Nel capitolo precedente abbiamo visto come assumano un ruolo importante nello studio dello Spazio Euclideo la sua struttura di spazio affine e quindi di spazio vettoriale, una volta che si sia fissata un'origine. Inoltre, abbiamo visto come le trasformazioni "rigide" dello spazio euclideo ovvero, le applicazioni biunivoche che conservino le reciproche distanze tra i punti, siano particolari affinità e quindi siano legate a particolari applicazioni lineari tra i vettori dello spazio.

In questo capitolo vogliamo approfondire la conoscenza degli spazi vettoriali e delle applicazioni lineari in una situazione un po' più generale, che non privilegi gli scalari reali, anche in previsione di estendere gli enti che abbiamo conosciuto nel capitolo precedente dal corpo reale a quello dei numeri complessi o a corpi più generali.

1. Spazi vettoriali.

In questa sezione vogliamo formalizzare tramite una serie di definizioni precise alcune osservazioni sui vettori geometrici fatte nel capitolo precedente. In tal modo delineeremo la struttura e le proprietà fondamentali degli spazi vettoriali e vedremo che la stessa struttura algebrica astratta è condivisa anche da altri oggetti matematici, all'apparenza molto diversi dai vettori geometrici.

1.1 Definizione. Sia C un corpo. Uno *spazio vettoriale* su C è un insieme V, dotato di due operazioni

$$+ : V \times V \to V \qquad \text{e} \qquad \cdot : C \times V \to V$$

soddisfacenti alle seguenti proprietà:

$u + (v + w) = (u + v) + w$		$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
$u + v = v + u$		$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
esiste $0_V \in V$ tale che $0_V + v = v = v + 0_V$ per ogni $v \in V$	e	$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$
dato $v \in V$ esiste $-v \in V$ tale che $v + (-v) = 0_V = (-v) + v$		$1v = v$

qualunque siano u, v, w in V ed α, β in C.

Oltre ai vettori geometrici, ci sono molti altri esempi di spazi vettoriali.

1.2 Esempi. (a). Sia C un corpo qualsiasi e si consideri l'insieme C^n delle n-uple di elementi di C, ovvero

$$C^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \ldots, x_n \in C \right\}.$$

L'insieme C^n diventa un C-spazio vettoriale ponendo le operazioni di somma e prodotto definite da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad c \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}$$

qualunque siano i vettori $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in C^n$ e lo scalare $c \in C$.

Quando $C = \mathbb{R}$ abbiamo lo spazio $\mathbb{R}^n$ che abbiamo descritto nel capitolo precedente. Quanto diremo in questo capitolo, varrà quindi per tale spazio.

(b). L'insieme dei polinomi a coefficienti reali $\mathbb{R}[X]$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per una costante. In particolare, ogni polinomio si scrive (in modo unico) come somma di multipli di alcuni polinomi 'fondamentali', quali $1, X, X^2, X^3, \ldots$. Più in generale, dato un corpo C, i polinomi a coefficienti in C, formano uno spazio vettoriale su C, che indichiamo con $C[X]$.

(c). L'insieme $\mathscr{T}$ delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, che soddisfano alla condizione $f'' + f = 0$[(†)]. È immediato dedurre dalle ben note proprietà delle derivate di somme e prodotti che $\mathscr{T}$ è uno spazio vettoriale reale. Cerchiamo di utilizzare qualche facile argomento del calcolo per descrivere un po' più in dettaglio gli elementi di $\mathscr{T}$. Per prima cosa, osserviamo che a questo insieme appartengono tutte le funzioni del tipo $f(x) = a\cos x + b\sin x$, ove a e b sono due qualsiasi numeri reali ed, in particolare, si ha $f(0) = a$ ed $f'(0) = b$. Vogliamo vedere che tutti gli elementi di $\mathscr{T}$ sono di questo tipo e quindi, data $f(x) \in \mathscr{T}$, consideriamo le due costanti $f(0) = a$ ed $f'(0) = b$ e sia $g(x) = a\cos x + b\sin x$. La tesi è che la differenza $\phi(x) = f(x) - g(x) \in \mathscr{T}$ è la funzione identicamente nulla; infatti considerando la funzione $\psi(x) = \phi^2(x) + \phi'^2(x)$, si ha $\psi'(x) = 2\phi'(x)[\phi(x) + \phi''(x)] = 0$, qualunque sia x e quindi $\psi(x)$ è una costante e inoltre $\psi(0) = \phi^2(0) + \phi'^2(0) = 0$, da cui si deduce che $\psi(x)$ è la funzione identicamente nulla. Poichè, nei numeri reali, la somma di due quadrati è nulla se, e solo se, sono nulli entrambo gli addendi, si conclude che anche $\phi(x)$ è la funzione identicamente nulla.

Possiamo quindi concludere questo esempio osservando che $\mathscr{T}$ è uno spazio vettoriale e che l'applicazione $\mathscr{T} \to \mathbb{R}^2$, definita da $f(x) \mapsto (f(0), f'(0))$, è una corrispondenza biunivoca che "rispetta le operazioni".

Esercizio 1.1. Si deducano dagli assiomi di spazio vettoriale (cf. *Definizione II.1.1*) le seguenti relazioni:

$$(a)\ 0 \cdot v = 0_V; \qquad (b)\ \alpha \cdot 0_V = 0_V; \qquad (c)\ (-1) \cdot v = -v;$$

qualunque siano $v \in V$ ed $\alpha \in C$. □

Esercizio 1.2. Si consideri la semiretta $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$, e si verifichi che tale insieme ha una struttura di spazio vettoriale reale, ove si prenda come 'somma' di due vettori $x, y \in (0, +\infty)$ il loro prodotto in quanto numeri reali e come 'moltiplicazione' del vettore $x \in (0, +\infty)$ per lo scalare $c \in \mathbb{R}$ il numero reale x^c. □

Esercizio 1.3. Si consideri l'insieme $Q = \mathbb{R}^2$ con le operazioni di somma e prodotto per scalari definite ponendo

$$\tbinom{x_1}{x_2} + \tbinom{y_1}{y_2} = \tbinom{x_1+y_1}{x_2+y_2} \qquad \text{e} \qquad \alpha \tbinom{x_1}{x_2} = \tbinom{\alpha x_1}{0},$$

qualunque siano $\binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2}$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$. Si mostri che Q soddisfa a tutti gli assiomi che definiscono uno spazio vettoriale reale, ad eccezione di uno (quale?); quindi Q NON è uno spazio vettoriale. □

Dato uno spazio vettoriale V sul corpo C, vogliamo considerare i sottoinsiemi (non vuoti) di V che sono a loro volta degli spazi vettoriali sullo stesso C; tali sottoinsiemi sono i 'sottospazi' di V.

1.3 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale sul corpo C. Un sottoinsieme non vuoto W di V è un *sottospazio vettoriale* di V se è chiuso rispetto alla somma ed al prodotto per scalari; ovvero

$$u, w \in W,\ \alpha, \beta \in C \ \Rightarrow\ \alpha u + \beta w \in W.$$

1.4 Esempi. Nel capitolo precedente abbiamo visto diversi esempi di sottspazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ che possono essere tenuti in considerazione anche in questo ambito. Diamo quindi qualche esempio di natura diversa.

(a). Se V è un qualunque spazio vettoriale, il sottoinsieme $\{0\}$ è un sottospazio di V che indicheremo con il simbolo (0). Analogamente, anche V è un sottospazio di sé stesso. Chiameremo *sottospazi banali* questi due sottospazi di V.

(b). Dato uno spazio vettoriale V su C, ed un suo vettore $v \neq 0$, si consideri il sottoinsieme

$$\langle v \rangle = \{\ \alpha v \mid \alpha \in C\ \}.$$

(†) È sottointeso che, affinché la condizione che definisce $\mathscr{T}$ abbia senso, le funzioni in questione si intendono derivabili almeno due volte (e quindi un numero qualsiasi di volte).

È facile dedurre dalle definizioni di spazio vettoriale ($(\alpha+\beta v)=\alpha v+\beta v$ e $\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v$) che si tratta di un sottospazio. In particolare, osserviamo che nello spazio dei vettori geometrici il sottospazio $\langle v\rangle$ si identifica con la retta per l'origine parallela al vettore v.

(c). Si indichi con $\mathscr{C}^k(\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, derivabili k-volte e con k-esima derivata continua, ove $k=1,2,3,\dots$; inoltre, siano $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ e $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni derivabili un numero qualsiasi di volte. È facile verificare che tutti questi insiemi sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ e che tutti sono sottospazi di $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. In particolare, si ha

$$\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})=\bigcap_{k\geq 0}\mathscr{C}^k(\mathbb{R})\subset\cdots\subset\mathscr{C}^k(\mathbb{R})\subset\cdots\subset\mathscr{C}^1(\mathbb{R})\subset\mathscr{C}^0(\mathbb{R}).$$

Esercizio 1.4. Sia $\mathscr{F}$ lo spazio vettoriale reale delle funzioni $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ e si consideri il sottoinsieme

$$L=\{\,\log_a(x)\mid 0<a\neq 1\,\}\cup\{0\}.$$

Si mostri che L è un sottospazio (di dimensione 1) di $\mathscr{F}$. □

1.5 Osservazione. *Siano V uno spazio vettoriale su C ed U e W due suoi sottospazi. Allora $U\cap W$ è un sottospazio di V. Più in generale, data una qualsiasi famiglia di sottospazi di V, la sua intersezione è ancora un sottospazio di V.*

dim. Dati $u,w\in U\cap W$ ed $\alpha\in C$, allora $u-w$ ed αu, appartengono sia ad U che a W perchè questi sono entrambi sottospazi. L'argomento si può ripetere pari pari per una famiglia qualsiasi di sottospazi. **CVD** □

Se l'intersezione di due (o più) sottospazi vettoriali è ancora uno sottospazio vettoriale, *non è più vero, in generale, che l'unione di due sottospazi sia ancora un sottospazio*. Ad esempio, l'unione dei due sottospazi $r_1=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ ed $r_2=\left\langle\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ contiene i vettori $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $v_2=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, ma la loro somma $v_1+v_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ non appartiene all'unione $r_1\cup r_2$, perchè non è un multiplo di nessuno dei due vettori v_1 e v_2.

Introduciamo quindi un nuovo concetto, quello di sottospazio generato da un insieme.

1.6 Definizione. Sia S un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V. Si chiama *sottospazio generato* da S il minimo sottospazio $\langle S\rangle$, contenente il sottoinsieme S, ovvero l'intersezione di tutti i sottospazi che contengono S.

Possiamo descrivere in modo esplicito gli elementi del sottospazio generato da un sottoinsieme S. Infatti, se $\emptyset\neq S\subseteq V$, si ha

$$\langle S\rangle=\{\,\alpha_1 s_1+\cdots+\alpha_k s_k\mid \alpha_1,\dots,\alpha_k\in C,\ s_1,\dots,s_k\in S,\ k\in\mathbb{N}\,\}. \tag{1.7}$$

Infatti, è chiaro che ciascuno degli elementi $\alpha_1 s_1+\cdots+\alpha_k s_k$ è contenuto in ogni sottospazio contenente S, dato che i sottospazi sono chiusi per combinazioni lineari. Inoltre, si verifica direttamente che l'insieme descritto nella formula (II.1.7) è un sottospazio di V.

Grazie alla nozione di sottospazio generato, possiamo definire un'operazione tra sottospazi di uno spazio vettoriale che può essere pensata come l'analogo dell'unione tra sottoinsiemi.

1.8 Definizione. Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V. Si chiama *somma* di U e W il sottospazio $U+W=\langle U\cup W\rangle$. Se, inoltre $U\cap W=\langle 0\rangle$, diremo che la somma dei due sottospazi è *diretta* e scriveremo $U\oplus W$ in luogo di $U+W$.

La definizione precedente si generalizza a famiglie qualsiasi di sottospazi.

⋆Esercizio 1.5. Il lettore verifichi servendosi della sola *Definizione II.1.6* che $\langle\emptyset\rangle = \langle 0\rangle$. □

Esercizio 1.6. Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V. Si mostri che

$$U + W = \{\, u + w \mid u \in U,\ w \in W \,\}.$$

(Ciò giustifica il nome di *somma* dato a questo sottospazio.) □

Esercizio 1.7. Si mostri che in $\mathbb{Q}^4$ si ha

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\\0\\1\\-1 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\3\\-1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\\0\\1\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\3\\-1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x_1\\\vdots\\x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \,\middle|\, x_2 = 0 \right\}$$

e si dica se la somma è diretta. □

Esercizio 1.8. Sia $P = \{\, f(X) \in \mathbb{R}[X] \mid \deg f \le 4 \,\}$.
(a) Si verifichi che P è un sottospazio di $\mathbb{R}[X]$ e $P = \langle 1, X, X^2, X^3, X^4 \rangle$.
(b) Si mostri che i sottoinsiemi

$$S = \{\, f(X) \in P \mid f(X) = f(1-X) \,\}, \qquad \text{ed} \qquad A = \{\, f(X) \in P \mid f(X) = -f(1-X) \,\}$$

sono sottospazi di P e si determini per ciascuno di essi un insieme di generatori.
(c) Si mostri che $P = S \oplus A$. □

Vogliamo mettere in evidenza alcuni particolari sottoinsiemi di uno spazio vettoriale.

1.9 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale su C. Un sottoinsieme non vuoto S di V si dice *formato da vettori linearmente indipendenti* (o, più brevemente, *indipendente*) se, dati comunque dei vettori $v_1, \dots, v_r$ di S, $a_1v_1 + \cdots + a_rv_r = \mathbf{0} \Rightarrow a_1 = \cdots = a_r = 0$. Ovvero se *l'unico modo di scrivere il vettore nullo come combinazione di elementi di S sia quello di prendere tutti i coefficienti uguali a zero*.

Dei vettori che non siano linearmente indipendenti si diranno *linearmente dipendenti*.

Esercizio 1.9. Sia V uno spazio vettoriale sul campo C. Si dimostri che
(a) Un vettore v è linearmente indipendente se, e solo se, $v \neq 0$.
(b) Due vettori v, w sono linearmente indipendenti se, e solo se, non sono proporzionali.
(c) I vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti se, e solo se, nessuno di questi appartiene al sottospazio generato dai precedenti, ovvero se, e solo se, $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_k \rangle$. □

1.10 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale su C. Una *base* di V è un insieme di generatori linearmente indipendenti dello spazio V.

La seguente osservazione mette in luce l'importanza delle basi tra tutti i possibili insiemi di generatori.

1.11 Proposizione. *Siano V uno spazio vettoriale su C e $\mathscr{B}$ una sua base. Allora ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare di elementi di $\mathscr{B}$.*

dim. Poichè $V = \langle \mathscr{B} \rangle$, discende dalla *Definizione II.1.6* che ogni vettore di V si scrive come combinazione di un numero finito di elementi della base $\mathscr{B}$. Inoltre, se il vettore $v \in V$ si scrivesse in due modi come combinazione di elementi di $\mathscr{B}$, allora si avrebbe $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$, ove $v_1, \dots, v_n \in \mathscr{B}$ ed $a_1, \dots, a_n, c_1 \dots, c_n$ sono in C. Se ne deduce che $\mathbf{0} = v - v = (a_1 - c_1)v_1 + \cdots + (a_n - c_n)v_n$ e quindi che $a_1 - c_1 = \cdots = a_n - c_n = 0$, perchè gli elementi di $\mathscr{B}$ sono linearmente indipendenti. Quindi i coefficienti dei vettori di base necessari per scrivere v coincidono a due a due. **CVD** □

Esercizio 1.10. Sia $v_1, \dots, v_n$ una base di V. Si mostri che, per ogni intero $k = 1, \dots, n-1$, si ha $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle \oplus \langle v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$. □

Il risultato fondamentale sulla struttura degli spazi vettoriali asserisce che *ogni spazio vettoriale ammette una base* e che *ogni base di un dato spazio ha "lo stesso numero di elementi"*. L'ultima frase

è messa tra virgolette perchè, se può essere evidente che cosa voglia dire che due insiemi finiti hanno lo stesso numero di elementi, la cosa non è così ovvia per gli insiemi infiniti(†). Non vogliamo discutere in dettaglio gli strumenti matematici necessari per trattare il problema nella sua forma generale e ci limiteremo solo al caso in cui gli spazi vettoriali ammettano un insieme finito di generatori e quindi, come vedremo, le basi abbiano solo un numero finito di elementi e daremo una dimostrazione del teorema fondamentale per gli spazi vettoriali finitamente generati.

1.12 Definizione. Uno spazio vettoriale V su C si dice *finitamente generato* (o *di tipo finito*) se esiste un insieme finito di generatori per V.

Dimostreremo quindi il seguente Teorema, il cui enunciato –lo ripetiamo– resta valido anche senza l'ipotesi che lo spazio sia finitamente generato su C.

1.13 Teorema. [struttura degli spazi vettoriali] *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato sul corpo C. Allora esiste una base per V e due diverse basi di V hanno lo stesso numero di elementi.*

La dimostrazione discenderà dal seguente fatto

1.14 Lemma. [Lemma di scambio] *Siano $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di generatori per uno spazio vettoriale V su C e sia $C = \{w_1, \dots, w_r\}$ un insieme formato da vettori linearmente indipendenti di V; allora $r \leq n$.*

dim. Si consideri l'insieme $A' = \{w_1, v_1, \dots, v_n\}$. Poichè $V = \langle v_1, \dots, v_n\rangle$ il vettore w_1 si scrive come combinazione lineare dei generatori, ovvero esistono delle costanti $a_1, \dots, a_n$ tali che $w_1 = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$. Poichè $w_1 \neq \mathbf{0}$, tali costanti non sono tutte nulle e, a meno di scambiare l'ordine dei vettori di A, possiamo supporre che sia diverso da zero il coefficiente a_1 del vettore v_1. Se ne deduce che

$$v_1 = a_1^{-1}w_1 - a_1^{-1}a_2v_2 - \cdots - a_1^{-1}a_nv_n \in \langle w_1, v_2, \dots, v_n\rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_n\rangle = V.$$

Dunque l'insieme $A_1 = \{w_1, v_2, \dots, v_n\}$ è ancora un insieme di generatori di V e possiamo considerare l'insieme $A'' = \{w_1, w_2, v_2, \dots, v_n\}$. Ragionando come sopra, possiamo affermare che esistono delle costanti $b_1, \dots, b_n$ tali che $w_2 = b_1w_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$. Inoltre, poichè w_1, w_2 sono linearmente indipendenti, i coefficienti di $v_2, \dots, v_n$ non sono tutti nulli e quindi, a meno di scambiare l'ordine dei vettori, possiamo supporre che sia diverso da zero il coefficiente b_2 del vettore v_2. Si conclude così che

$$v_2 \in \langle w_1, w_2, v_3, \dots, v_n\rangle = \langle w_1, v_2, \dots, v_n\rangle = V.$$

Dunque procedendo ancora in tal modo possiamo sostituire tutti gli r vettori di B ad altrettanti vettori di A ed avere ancora un insieme di generatori di V. Ciò significa esattamente che A non può avere un numero di elementi minore di B. **CVD** □

Possiamo quindi andare alla dimostrazione del teorema di struttura.

dim. [del *Teorema II.1.13*] Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ un insieme di generatori per V. Se i generatori sono linearmente indipendenti, allora si tratta di una base ed il primo asserto è verificato, altrimenti, uno dei vettori dati è combinazione lineare dei rimanenti, sia v_k, e quindi i vettori $v_1, \dots, v_{k-1}$ sono ancora un insieme di generatori per V. Di nuovo, se questi generatori sono linearmente indipendenti, allora si tratta di una base, altrimenti uno di questi è combinazione lineare dei rimanenti e si può ottenere ancora un insieme di generatori di V, con un vettore in meno. Se questi formano una base il processo è terminato, altrimenti

(†) In generale, si dice che due insiemi A e B hanno *la stessa cardinalità* se esiste una applicazione biiettiva $f : A \to B$. È chiaro che, per due insiemi finiti, avere la stessa cardinalità significa esattamente avere lo stesso numero di elementi e quindi che la definizione generalizza la nozione che ci interessa, ma mettiamo in guardia il lettore dalle facili generalizzazioni, infatti un insieme infinito può avere la stessa cardinalità di un suo sottoinsieme proprio (anzi, questa può essere presa come la definizione di insieme infinito), come si vede facilmente considerando i numeri naturali $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ed i numeri pari $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \dots\}$

si continua ad eliminare vettori ottenendo insiemi di generatori con un numero minore di elementi. Dopo un numero finito di passi ci si deve arrestare ed ottenere così una base di V.

La seconda affermazione è conseguenza del Lemma di Scambio. Infatti, in base a tale risultato, poichè V ha un numero finito di generatori, allora ogni sua base ha un numero finito di elementi. Inoltre, se $v_1, \dots, v_n$ e $w_1, \dots, w_m$ sono due basi di V, allora deve aversi $m \leq n$, perchè i vettori $w_1, \dots, w_m$ sono linearmente indipendenti ed i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono generatori di V. D'altra parte, è anche vero che i vettori $w_1, \dots, w_m$ sono generatori di V ed i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti e quindi si ha anche $n \leq m$, da cui si conclude che $n = m$ ed il teorema è completamente dimostrato. **CVD** □

Possiamo quindi dare la seguente definizione.

1.15 Definizione. Sia V un spazio vettoriale (finitamente generato)sul campo C. Si chiama *dimensione* di V su C il numero di elementi di una base di V su C. In particolare, si scriverà $\dim_C V$ per indicare la dimensione dello spazio V.

*Esercizio 1.11. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C. Si usi il Lemma di Scambio (cf. *Lemma II.1.14*) per dimostrare che ogni sottospazio U di V ha dimensione minore o uguale ad n e che $\dim_C U = n$ se, e solo se, $U = V$. □

*Esercizio 1.12. [Relazioni di Grassmann] Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C ed U e W due suoi sottospazi. Si mostri che

$$\boxed{\dim_C(U+W) = \dim_C U + \dim_C W - dim_C(U \cap W)}$$

□

Esercizio 1.13. Sia fissato un polinomio a coefficienti complessi

$$Q(X) = c(X-\alpha_1)^{m_1} \cdots (X-\alpha_r)^{m_r},$$

ove $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sono le radici di $Q(X)$, a due a due distinte, $c \in \mathbb{C}$ ed $m_1 + \cdots + m_r = n = \deg Q > 0$. Si verifichi che l'insieme $V_Q = \left\{ \frac{P(X)}{Q(X)} \;\middle|\; P(X) \in \mathbb{C}[X],\ \deg P < \deg Q \right\}$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione n.

Si mostri che l'insieme $\left\{ \frac{1}{(X-\alpha_i)^j} \;\middle|\; i = 1, \dots, r,\ j = 1, \dots, m_i \right\}$ è una base di V_Q. □

Esercizio 1.14. Dati due sottoinsiemi di un insieme finito, S_1 ed S_2, vale la formula $\#(S_1 \cup S_2) = \#S_1 + \#S_2 - \#(S_1 \cap S_2)$ e vi è un analogo per le dimensioni dei sottospazi di uno spazio vettoriale di dimensione finita, nelle Relazioni di Grassmann $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$. Dati tre sottoinsiemi, si ha

$$\begin{aligned}\#(S_1 \cup S_2 \cup S_3) =& \#S_1 + \#S_2 + \#S_3 - \#(S_1 \cap S_2) - \#(S_1 \cap S_3) - \\ &- \#(S_2 \cap S_3) + \#(S_1 \cap S_2 \cap S_3);\end{aligned}$$

è vero o falso che vale l'analogo per i sottospazi, ovvero che

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + W_2 + W_3) = &\dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 - \dim(W_1 \cap W_2) - \\ &- \dim(W_1 \cap W_3) - \dim(W_2 \cap W_3) + \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)\ ?\end{aligned}$$

□

2. Applicazioni lineari e Matrici

Ripetiamo, nel contesto degli spazi vettoriali, la definizione di applicazione lineare data alla fine del capitolo precedente.

2.1 Definizione. Siano V e W due spazi vettoriali sul campo C, un'applicazione $\phi : V \to W$ si dice *applicazione lineare* o *omomorfismo di spazi vettoriali* se, per ogni coppia di vettori v, v' in V ed ogni coppia di scalari α, β in C, si ha $\phi(\alpha v + \beta v') = \alpha\phi(v) + \beta\phi(v')$.

Si dice *isomorfismo* un'applicazione lineare biiettiva.

L'insieme di tutte le applicazioni lineari tra due C-spazi vettoriali V e W, si indica con il simbolo $\mathrm{Hom}_C(V, W)$.

2.2 Esempi. (a). Si considerino nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ il sottospazio $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 - x_3 = 0 \right\}$ ed il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sia $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione che ad ogni vettore $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ associa quell'unico vettore $\pi(\mathbf{x}) \in U$, tale che $\mathbf{x} = \pi(\mathbf{x}) + \alpha\mathbf{v}$, per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$. Questa applicazione si chiama la *proiezione su U, parallela al vettore* $\mathbf{v}$ ed è un'applicazione lineare.

Per verificarlo, calcoliamo in modo preciso le componenti di $\pi(\mathbf{x})$ in funzione delle componenti di $\mathbf{x}$. Per prima cosa, dobbiamo determinare una costante $\alpha \in \mathbb{R}$ di modo che $\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \alpha\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 - 2\alpha \\ x_2 + \alpha \\ x_3 - \alpha \end{pmatrix}$ appartenga ad U, ovvero

$$(x_1 - 2\alpha) - (x_3 - \alpha) = 0 \qquad \text{e quindi} \qquad \alpha = x_1 - x_3;$$

da cui si conclude che $\pi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_3) \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}$. Poiché le componenti di $\pi(\mathbf{x})$ sono funzioni lineari (polinomi di grado 1) delle componenti del vettore $\mathbf{x}$, è immediato verificare che π è un'applicazione lineare.

(b). Sia $C[X]$ lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti nel corpo C e si consideri l'applicazione $P(x) \mapsto xP(x)$, che ad ogni polinomio $P(x)$ associa il suo prodotto con x. È facile verificare che si tratta di un'applicazione lineare. Analogamente, si può verificare che è lineare l'applicazione che associa al polinomio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, la sua derivata rispetto ad x, ovvero $P'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$.

(c). Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$ e si osservi che questo insieme può essere considerato uno spazio vettoriale sia sul corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi (su cui ha dimensione 2, essendo $\mathbf{e}_1 = \binom{1}{0}$,$\mathbf{e}_2 = \binom{0}{1}$, una sua base) che sul corpo $\mathbb{R}$ dei numeri reali, limitando la moltiplicazione per scalari ai soli numeri reali. In particolare, sul corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi $\mathbb{C}^2$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2, essendo $\mathbf{e}_1 = \binom{1}{0}$, $\mathbf{e}_2 = \binom{0}{1}$, una sua base, ma sul corpo dei numeri reali, $\mathbb{C}^2$ è uno spazio vettoriale di dimensione 4, come si può verificare considerando la base $\mathbf{e}_1 = \binom{1}{0}$, $\mathbf{e}_2 = \binom{0}{1}$, $i\mathbf{e}_1 = \binom{i}{0}$, $i\mathbf{e}_2 = \binom{0}{i}$, ove i indica, come di consueto una radice quadrata di -1. Su $\mathbb{C}^2$ l'applicazione $\gamma : \binom{z_0}{z_1} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix}$ che applica la coniugazione complessa alle componenti dei vettori di $\mathbb{C}^2$, è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare, ma non è $\mathbb{C}$-lineare, come si vede immediatamente, osservando che

$$\gamma(i\binom{z_0}{z_1}) = \begin{pmatrix} \overline{iz}_0 \\ \overline{iz}_1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix} = -i\gamma(\binom{z_0}{z_1}).$$

Osserviamo quindi che la naturale relazione di inclusione tra gli insiemi $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ è un'inclusione stretta.

(d). Dato uno spazio vettoriale V sul corpo C, scegliere una base $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V, corrisponde a dare un isomorfismo $\phi_{\mathcal{V}} : C^n \to V$, definito dalla posizione $\phi_{\mathcal{V}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$. Infatti, questa applicazione è chiaramente lineare ed il fatto che ogni vettore di V si scriva in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{V}$, significa precisamente che ogni vettore di V è immagine di uno, ed un solo, elemento di C^n.

Esercizio 2.1. Siano V e W due spazi vettoriali sul campo C e sia fissata una base $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V. Si mostri che, scelti comunque n vettori $w_1, \ldots, w_n$ di W esiste un'unica applicazione lineare $\phi : V \to W$ tale che $\phi(v_i) = w_i$ per $i = 1, \ldots, n$. □

Esercizio 2.2. Si considerino gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$ e la base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. Detta $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare che manda i vettori della base canonica ordinatamente sui vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

si scrivano esplicitamente le componenti dell'immagine di un generico vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$. □

Esercizio 2.3. Siano V e W due spazi vettoriali sul campo C e sia fissata una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V. Data un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ si verifichi che
(a) ϕ è iniettiva se, e solo se, i vettori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ sono linearmente indipendenti in W;
(b) ϕ è suriettiva se, e solo se, i vettori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ sono dei generatori di W;
(c) ϕ è un isomorfismo se, e solo se, i vettori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ sono una base W. □

2.3 Definizione. Siano V e W due spazi vettoriali sul campo C. Ad un'applicazione lineare $\phi : V \to W$, possiamo associare due sottospazi vettoriali

$$\begin{aligned} \text{il } \textit{nucleo} \text{ di } \phi \qquad & \ker \phi = \{\, v \in V \mid \phi(v) = 0 \,\}; \\ \text{l'}\textit{immagine} \text{ di } \phi \qquad & \operatorname{im} \phi = \{\, \phi(v) \in W \mid v \in V \,\}. \end{aligned}$$

Si chiamano rispettivamente *rango* e *nullità* dell'applicazione lineare ϕ le dimensioni dell'immagine e del nucleo. In simboli $\mathrm{rk}_\phi = \dim_C \operatorname{im} \phi$ e $_\phi = \dim_C \ker \phi$.

2.4 Osservazione. *Siano V e W due spazi vettoriali sul campo C e $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora*
(a) ϕ è iniettiva se, e solo se, $\ker \phi = \langle 0 \rangle$;
(b) ϕ è suriettiva se, e solo se, $\operatorname{im} \phi = W$.

dim. (*a*). Se ϕ è iniettiva, allora solo un vettore può avere come immagine il vettore nullo e quindi si ha necessariamente $\ker \phi = \langle 0 \rangle$. Viceversa, se ϕ non fosse iniettiva, allora esisterebbero due vettori distinti $v, v' \in V$ con $\phi(v) = \phi(v')$ e quindi $\phi(v - v') = \phi(v) - \phi(v') = 0$; ovvero si avrebbe $0 \neq v - v' \in \ker \phi$.
(*b*). È ovvia. **CVD** □

Esercizio 2.4. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$ ed il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Indicata con $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione su W parallelamente al vettore $\mathbf{v}$, si determinino nucleo ed immagine di questa applicazione lineare. □

2.5 Proposizione. *Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita sul campo C e $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora*

$$\dim_C \ker \phi + \dim_C \operatorname{im} \phi = \dim_C V.$$

dim. Sia $u_1, \dots, u_k$ una base di $\ker \phi$ (nessun vettore se $\ker \phi = \langle 0 \rangle$), e completiamo questi vettori ad una base di V: $u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n$. Vogliamo mostrare che i vettori $\phi(v_{k+1}), \dots, \phi(v_n)$ sono una base di $\operatorname{im} \phi$. Infatti, dato un vettore $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n$ di V, si ha $\phi(v) = \alpha_{k+1}\phi(v_{k+1}) + \cdots + \alpha_n \phi(v_n)$ e quindi i vettori $\phi(v_{k+1}), \dots, \phi(v_n)$ sono un sistema di generatori per $\operatorname{im} \phi$. D'altra parte, se $\beta_{k+1}\phi(v_{k+1}) + \cdots + \beta_n \phi(v_n) = 0$, allora il vettore $\beta_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \beta_n v_n$ appartiene a $\ker \phi$ e quindi, deve aversi necessariamente $\beta_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \beta_n v_n = 0$, ovvero $\beta_{k+1} = \cdots = \beta_n = 0$.
CVD □

Lasciamo al lettore il compito di dedurre dalla Proposizione qui sopra delle condizioni necessarie sulle dimensioni degli spazi coinvolti per l'esistenza di applicazioni lineari iniettive (risp. suriettive, risp. biiettive) tra questi spazi.

⋆Esercizio 2.5. Una *sequenza esatta* di omomorfismi di spazi vettoriali è una collezione di applicazioni lineari

$$V_0 \xrightarrow{\alpha_0} V_1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} V_{n+1}$$

tale che, per ogni coppia di omomorfismi consecutivi, α_i ed α_{i+1}, si abbia $\operatorname{im}\alpha_i = \ker\alpha_{i+1}$.

(a) Si mostri che, per una *sequenza esatta breve*,

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W \longrightarrow 0$$

si ha $\dim_C V = \dim_C U + \dim_C W$.

(b) Più in generale, si mostri che, per una *sequenza esatta* del tipo,

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} V_n \longrightarrow 0$$

si ha $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^j \dim_C V_j = 0$. □

⋆Esercizio 2.6. Sia C un corpo e consideriamo il sottospazio M_k^n di $C[x_1,\dots,x_n]$, generato da tutti i monomi di grado k, ovvero

$$M_k^n = \langle\, x_1^{r_1}\cdots x_n^{r_n} \mid r_1+\cdots+r_n = k \,\rangle\,.$$

(a) Si mostri che, qualunque sia l'intero n, si ha $\dim_C M_n^1 = 1$ e $\dim_C M_1^n = n$.

(b) Fissati gli interi n e k, si mostri che si ha una sequenza esatta breve

$$0 \longrightarrow M_k^{n+1} \xrightarrow{\alpha} M_{k+1}^{n+1} \xrightarrow{\beta} M_{k+1}^{n} \longrightarrow 0$$

ove $\alpha(m) = x_{n+1}m$, per ogni $m \in M_k^{n+1}$, e $\beta(x_1^{r_1}\cdots x_n^{r_n}x_{n+1}^{r_{n+1}}) = \begin{cases} 0 & \text{se } r_{n+1}>0 \\ x_1^{r_1}\cdots x_n^{r_n} & \text{altrimenti} \end{cases}$.

(c) Servendosi delle osservazioni precedenti, si dimostri per induzione che $\dim_C M_k^n = \binom{n+k-1}{k}$. □

Esercizio 2.7. Si considerino gli spazi vettoriali U, V, W, Z, di dimensione finita sul corpo C, e le applicazioni lineari

$$U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W \xrightarrow{\gamma} Z.$$

Si mostri che

(a) $\operatorname{rk}(\gamma\circ\beta) + \operatorname{rk}(\beta\circ\alpha) \le \operatorname{rk}\beta + \operatorname{rk}(\gamma\circ\beta\circ\alpha)$;

(b) $\operatorname{rk}\alpha + \operatorname{rk}\beta - \dim V \le \operatorname{rk}(\beta\circ\alpha) \le \min\{\operatorname{rk}\alpha, \operatorname{rk}\beta\}$. □

Introduciamo ora qualche nuova definizione.

2.6 Definizione. Fissati due interi positivi m ed n, chiameremo *matrice* di ordine $m\times n$, ad elementi nel corpo C, ogni tabella di scalari del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}},$$

ove a_{ij} indica l'elemento posto nella i-esima riga e nella j-esima colonna della tabella.

Indicheremo con $M_{m\times n}(C)$ l'insieme di tutte le matrici di ordine $m\times n$, ad elementi nel corpo C, che formano uno spazio vettoriale con le operazioni di somma e prodotto per scalari, definite elemento per elemento, ovvero

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{e} \qquad \alpha\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Si tratta di un C spazio vettoriale, isomorfo a C^{mn}, ed indicheremo con $\{\, \varepsilon(ij) \mid 1\le i\le m,\ 1\le j\le n \,\}$, la base canonica di $M_{m\times n}(C)$, ove $\varepsilon(ij)$ è la matrice che ha tutte le entrate uguali a 0, ad eccezione di quella di posto (i,j), che è uguale ad 1.

Il motivo per cui ci interessiamo agli spazi vettoriali di matrici è che queste ultime sono uno strumento per rappresentare le applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita.

2.7 Definizione. Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita su C e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ basi dei rispettivi spazi. Data un'applicazione lineare $\phi : V \to W$, si chiama *matrice* di ϕ, rispetto alle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, la matrice avente ordinatamente come colonne le componenti dei vettori $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$, rispetto alla base $\mathcal{W}$ di W; ovvero, se

$$\begin{aligned} \phi(v_1) &= a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \\ &\vdots \\ \phi(v_n) &= a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned} \qquad \text{la matrice è} \qquad \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2.8 Esempio. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la proiezione sul piano $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \right\}$, parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero l'applicazione lineare $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $\pi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1+6x_2-2x_3 \\ -2x_1+4x_2-x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Si ha

$$\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \pi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \pi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e quindi la matrice di π rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora i vettori $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ed $u_3 = v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed osserviamo che si tratta di tre vettori linearmente indipendenti e quindi di una base $\mathcal{U}$ di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ e quindi si conclude facilmente che $\pi(u_1) = u_1$, $\pi(u_2) = u_2$, $\pi(u_3) = \mathbf{0}$ ovvero che la matrice di π rispetto a questa nuova base di $\mathbb{R}^3$ è

$$B = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infine, ricordando le coordinate dei vettori della base $\mathcal{U}$ rispetto alla base canonica, possiamo scrivere anche la matrice di π rispetto alla base $\mathcal{U}$ nello spazio di partenza ed alla base canonica $\mathcal{E}$ nello spazio di arrivo, ovvero

$$B = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita su C e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ basi dei rispettivi spazi. La matrice dell'applicazione lineare $\phi : V \to W$ può essere usata per calcolare le coordinate delle immagini dei vettori di V, rispetto alle basi date. Sia

$$\begin{aligned} \phi(v_1) &= a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \\ &\vdots \\ \phi(v_n) &= a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

e consideriamo un vettore $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$. Allora, l'immagine di v è il vettore

$$\phi(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = x_1\phi(v_1) + \cdots + x_n\phi(v_n);$$

ovvero, indicando in colonna le componenti dei vettori di V rispetto alla base $\mathcal{V}$ e le componenti dei vettori di W rispetto alla base $\mathcal{W}$, si ha che le coordinate del vettore $\phi(v)$ rispetto alla base $\mathcal{W}$ sono il prodotto della matrice $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ per la colonna delle coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{V}$, ovvero

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.} \tag{2.9}$$

Esercizio 2.8. Si considerino gli spazi vettoriali reali V e W con le rispettive basi: $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$.

(a) Si scriva la matrice, rispetto alle basi date, dell'applicazione lineare $\phi\colon V \to W$, così definita:

$$\begin{array}{ll} \phi(v_1) = w_1 - w_2, & \phi(v_2) = 2w_2 - 6w_3, \\ \phi(v_3) = -2w_1 + 2w_2, & \phi(v_4) = w_2 - 3w_3 \end{array}.$$

(b) Si determinino le dimensioni dei sottospazi $\ker\phi$ ed $\operatorname{im}\phi$ e si scrivano delle basi per tali sottospazi.

(c) È vero o falso che $w_1 + w_2 + w_3 \in \operatorname{im}\phi$? □

Esercizio 2.9. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una sua base. Si considerino, al variare di λ tra i numeri reali, gli endomorfismi ϕ_λ di V definiti dalle condizioni

$$\phi_\lambda(v_1) = (\lambda - 1)v_1 + 2v_2 - (\lambda + 1)v_3 \quad \phi_\lambda(v_2) = 2v_1 - \lambda v_3 \quad \phi_\lambda(v_3) = -\lambda v_1 - v_2 + (\lambda + 2)v_3$$

(a) Si determinino, al variare di λ le dimensioni di nucleo ed immagine di ϕ_λ.

(b) Si dica per quali valori di λ il vettore $v_1 + 2v_2 + 2v_3$ appartiene all'immagine di ϕ_λ. □

Esercizio 2.10. Si indichi con $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ la base canonica di $V = \mathbb{C}^4$ e si considerino i seguenti sottospazi (complessi) di V

$$E = \langle e_1, e_2 \rangle \quad \text{e} \quad D = \langle e_3 - (1 + 3i)e_1, e_4 - 2ie_2 \rangle .$$

(a) Si dimostri che $V = E \oplus D$.

(b) Si indichino con $\pi : E \oplus D \to E$ la proiezione canonica e con L il sottospazio reale di V generato dalla base canonica. Si dimostri che la restrizione di π ad L è un isomorfismo di spazi vettoriali reali.

(c) Si osservi che, tramite l'isomorfismo del punto precedente, la moltiplicazione per i dei vettori del sottospazio E diviene un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare dello spazio L in sé. Si scriva la matrice J di tale endomorfismo rispetto alla base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di L. □

⋆Esercizio 2.11. Si considerino gli spazi vettoriali V e W sul corpo C con le rispettive basi: $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$. Si verifichi dettagliatamente che la corrispondenza

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}} : \operatorname{Hom}_C(V, W) \to M_{m\times n}(C)$$

che ad ogni applicazione lineare $\phi : V \to W$ associa la sua matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ rispetto alle basi date, è un isomorfismo di spazi vettoriali su C.

Si concluda che $\dim_C \operatorname{Hom}_C(V, W) = (\dim_C V)(\dim_C W)$. □

⋆Esercizio 2.12. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C. Siano U ed E due sottospazi di V di dimensioni k ed $n - k$ rispettivamente, tali che $V = U \oplus E$. Fissato comunque $\psi \in \operatorname{Hom}_C(U, E)$ si consideri il sottoinsieme di V

$$U_\psi = \{\, u + \psi(u) \mid u \in U \,\}.$$

(a) Si mostri che U_ψ è un sottospazio di V di dimensione k e che $V = U_\psi \oplus E$.

(b) Si mostri che la corrispondenza $\psi \mapsto U_\psi$ induce una biiezione tra $\operatorname{Hom}_C(U, E)$ e l'insieme S_E dei sottospazi X di V tali che $V = X \oplus E$. □

Esercizio 2.13. Siano U e W due spazi vettoriali di dimensioni r e k rispettivamente, e sia $\phi : U \to W$ un omomorfismo.

(a) Si mostri che $\Gamma_\phi = \{\, u + \phi(u) \in U \oplus W \mid u \in U \,\}$ (il *grafico* di ϕ) è un sottospazio di $U \oplus W$, di dimensione r e tale che $\Gamma_\phi \cap W = (0)$.
(b) Siano U e W due spazi vettoriali di basi $\{u_1, \dots, u_4\}$ e $\{w_1, \dots, w_3\}$, rispettivamente e sia

$$\Gamma = \langle 2u_1 + 3w_1 - w_3, 4u_2 + w_1 - 2w_2 + 4w_3, u_3 + 5w_1, u_4 + w_2 + 2w_3 \rangle \subset U \oplus W.$$

Si mostri che $\Gamma \cap W = (0)$ e si scriva la matrice, rispetto alle basi date, dell'omomorfismo $\phi : U \to W$ che ha Γ come grafico. □

Esercizio 2.14. Nello spazio vettoriale $\mathbb{Q}^4$ siano dati i vettori

$$w_1 = e_1 - e_3 + 2e_4, \quad w_2 = e_1 + e_2 - 2e_4, \quad w_3 = 3e_4 - e_1 - 2e_2 - e_3, \quad w_4 = 2e_1 + e_2 - e_3,$$

ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ indica la base canonica.
(a) Si scriva, in tutti i modi possibili, il vettore $e_1 + e_2 - e_4$ come combinazione lineare di $w_1, \dots, w_4$.
(b) Indicata con $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ l'applicazione lineare che manda la base canonica ordinatamente su $w_1, \dots, w_4$, si determinino una base del nucleo e dell'immagine di ϕ e di $\ker \phi \cap \operatorname{im} \phi$. □

Possiamo generalizzare il prodotto di una matrice $A \in M_{m\times n}(C)$ per una colonna $x \in C^n$ (cf. II.2.9) ad un prodotto tra matrici nel modo seguente.

2.10 Definizione. Siano date le matrici $A \in M_{m\times n}(C)$ e $B \in M_{n\times t}(C)$, il *prodotto righe per colonne* della matrice A con la matrice B è la matrice $AB \in M_{m\times t}(C)$, le cui colonne sono il prodotto della matrice A per le colonne della matrice B. Ovvero, se

$$A = (a_{hk})_{\substack{1\le h\le m\\ 1\le k\le n}}, \qquad B = (b_{rs})_{\substack{1\le r\le n\\ 1\le s\le t}}, \qquad AB = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le t}},$$

allora

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j}, \qquad \text{qualunque siano } (i,j) \text{ con } 1 \le i \le m, 1 \le j \le t.$$

Esercizio 2.15. Si verifichi che il prodotto tra matrici definito sopra soddisfa alla proprietà associativa $[(AB)C = A(BC)]$ e distribuisce rispetto alla somma di matrici [ovvero $(A+B)C = AC + BC$ e $A(D+E) = AD + AE$].

Al variare di k tra gli interi positivi, si indichi con $\mathbf{1}_k$ la matrice $\mathbf{1}_k = (\delta_{ij})_{1\le i,j\le k}$ ove

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{[simbolo di Kronecker]}$$

per $1 \le i, j \le k$. Si verifichi che, presa comunque una matrice $A \in M_{m\times n}(C)$, si ha $A\mathbf{1}_n = A = \mathbf{1}_m A$. □

Esercizio 2.16. Si considerino le matrici $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ e $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ e si verifichi che $AB \neq BA$. □

Esercizio 2.17. Sia $X \in M_{n\times n}(C)$ una matrice tale che $AX = XA$ per tutte le matrici $A \in M_{n\times n}(C)$. Si mostri che X è una matrice scalare, ovvero che esiste uno scalare $\alpha \in C$ tale che $X = \alpha \mathbf{1}_n$. □

Il prodotto tra matrici ha un preciso corrispettivo in termini di applicazioni lineari, ovvero il prodotto tra due matrici è la matrice della composizione delle due applicazioni lineari corrispondenti ai fattori.

Precisamente, dati tre spazi vettoriali U, V, W sul corpo C e le applicazioni lineari $\psi : U \to V$ e $\phi : V \to W$ e fissate delle basi $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_t\}$ di U, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W. Le matrici $B = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\psi)$, $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ e $C = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\phi \circ \psi)$; sono legate dalla relazione $C = AB$, ovvero

$$\boxed{\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\phi \circ \psi) = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)\, \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\psi).} \tag{2.11}$$

Infatti, la matrice B ha come colonne le componenti dei vettori $\psi(u_1), \dots, \psi(u_t)$, rispetto alla base $\mathcal{V}$ di V e, moltiplicando la matrice A per queste colonne, si ottengono le componenti delle immagini tramite ϕ di questi vettori, rispetto alla base $\mathcal{W}$ di W; ovvero le componenti dei vettori $\phi(\psi(u_1)), \dots, \phi(\psi(u_t))$, rispetto alla base $\mathcal{W}$ di W, che sono esattamente le colonne della matrice dell'applicazione lineare composta $\phi \circ \psi$, rispetto alle basi $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$.

Esercizio 2.18. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo C e sia $1_V : V \to V$ l'applicazione che manda ogni vettore in se stesso (la moltiplicazione per lo scalare 1). Si mostri che, qualunque sia la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, si ha $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(1_V) = \mathbf{1}_n$. □

Esercizio 2.19. Si considerino in $V = \mathbb{R}^3$, la base canonica $\mathcal{E}$ e la base $\mathcal{U}$ costituita dai vettori $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ed $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si scrivano le *matrici di cambiamento di base* $P = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{U}}(1_V)$ e $Q = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}}(1_V)$ e si calcolino i prodotti PQ e QP. □

Esercizio 2.20. Si considerino due basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ dello spazio vettoriale V sul corpo C e le matrici $P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(1_V)$ e $Q = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(1_V)$. Si verifichi che $PQ = \mathbf{1}_n = QP$. □

Esercizio 2.21. Si considerino due spazi vettoriali V e W sul corpo C ed un'applicazione lineare $\phi : V \to W$. Fissate delle basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{V}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ di V e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ $\mathcal{W}' = \{w'_1, \dots, w'_m\}$ di W, si considerino le matrici $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$, $B = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{W}'}(\phi)$, $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}'}(1_W)$ e $Q = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(1_V)$. Si verifichi che $B = PAQ$. □

Esercizio 2.22. Una matrice $A \in M_{n\times n}(C)$ si dice *invertibile*, se esiste una matrice $B \in M_{n\times n}(C)$ tale che $AB = \mathbf{1}_n = BA$. In tal caso, si scrive A^{-1} in luogo di B. Si mostri che l'insieme delle matrici invertibili di $M_{n\times n}(C)$ è un *gruppo* rispetto all'operazione di prodotto. Ovvero che il prodotto di due matrici invertibili è ancora una matrice invertibile e che $\mathbf{1}_n$ si comporta da elemento neutro per il prodotto. Tale gruppo si indica con il simbolo $\mathrm{GL}_n(C)$ e si chiama *gruppo lineare* di ordine n. □

⋆Esercizio 2.23. Si mostri che una matrice $A \in M_{n\times n}(C)$ è invertibile se, e solo se, le sue colonne sono una base di C^n. □

⋆Esercizio 2.24. Sia $A \in M_{m\times n}(C)$.

(a) Si mostri che $\mathrm{rk}\, A = r$ se, e solo se, esistono due matrici invertibili $P \in \mathrm{GL}_m(C)$ e $Q \in \mathrm{GL}_n(C)$, tali che $PAQ = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Indicata con ${}^tA \in M_{n\times m}(C)$ la matrice che si ottiene scambiando tra loro le righe e le colonne di A, si mostri che $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, {}^tA$. □

Esercizio 2.25. Si consideri la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Si determinino (se esistono) tutte le matrici $B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tali che $AB = \mathbf{1}_2$.

(b) Si determinino (se esistono) tutte le matrici $C \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tali che $CA = \mathbf{1}_3$. □

Esercizio 2.26. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_3\}$, si considerino i vettori

$$v_1 = -6e_2 + 2e_3, \quad v_2 = e_1 - e_2 + 2e_3, \quad v_3 = -e_1 - 2e_2 - e_3$$

e

$$w_1 = 2e_1, \quad w_2 = 2e_3, \quad w_3 = e_1 - 2e_3.$$

Si scrivano le matrici, rispetto alla base canonica, di tutti gli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ che mandano ordinatamente v_i su w_i per $i = 1, 2, 3$. □

Esercizio 2.27. Siano U e W due sottospazi di uno spazio vettoriale V, con $U \cap W = (0)$.

(a) Si dimostri che un sottospazio $Z \subseteq U \oplus W$ è il grafico di un'applicazione (lineare) $\psi : U \to W$ se, e solo se, $\dim Z = \dim U$ e $Z \cap W = (0)$.

(b) Si considerino i sottospazi di $\mathbb{Q}^5$

$$U = L(e_3, e_1 + e_2, e_5 - 2e_4), \quad W = L(e_1 - e_2 + 2e_4, e_2 + e_5),$$
$$Z = L(2e_1{+}2e_2 + 2e_4 - e_5,\ e_2,\ e_3 + e_1).$$

Si verifichi che Z è il grafico di un'applicazione lineare $\psi : U \to W$ e si scriva la matrice di ψ rispetto alle basi date di U e W. □

⋆Esercizio 2.28. Siano V, W e Z tre spazi vettoriali sul corpo C, di dimensioni n, m e k, rispettivamente.

(a) Sia data un'applicazione lineare $\psi : W \to Z$, di rango r, e si consideri l'insieme

$$S = \{\ \phi \in \mathrm{Hom}_C(V, W) \mid \psi \circ \phi = 0\ \}.$$

Si mostri che S è un sottospazio di $\mathrm{Hom}_C(V,W)$ e se ne calcoli la dimensione.

(b) Si supponga ora $C=\mathbb{R}$ ed $n=3$, $m=4$, $k=2$, e si fissino delle basi $\mathcal{V}=\{v_1,\dots,v_3\}$, $\mathcal{W}=\{w_1,\dots,w_4\}$, $\mathcal{Z}=\{z_1,z_2\}$ degli spazi dati. Nell'ipotesi che ψ abbia matrice

$$B=\begin{pmatrix}2&0&-1&1\\0&1&0&-1\end{pmatrix},$$

si scriva una base di $S\subset M_{4\times 3}(\mathbb{R})$. □

Esercizio 2.29. Si consideri l'endomorfismo $\psi:\mathbb{Q}^3\to\mathbb{Q}^3$ di matrice

$$P=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&1&0\\0&-2&4\end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica e si determinino le matrici, rispetto alle basi canoniche, di tutte le applicazioni lineari $\phi:\mathbb{Q}^2\to\mathbb{Q}^3$ tali che $\psi\circ\phi=0$. □

Esercizio 2.30. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ dotato della base canonica $\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_5\}$, e sia H il sottospazio

$$H=\langle 2e_1-e_2-e_3-3e_4+2e_5,\, e_1+3e_2+e_3,\, 2e_2+6e_4-4e_5\rangle\,.$$

Posto $U=\langle e_1,e_2,e_3\rangle$ e $W=\langle e_4,e_5\rangle$, si mostri che H è il *grafico* di un'applicazione lineare $\phi:U\to W$ e si determinino il nucleo, l'immagine e la matrice di ϕ rispetto alle basi date. □

Esercizio 2.31. Sia $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ e si consideri l'applicazione $\phi_A:M_2(\mathbb{Q})\to M_2(\mathbb{Q})$, definita ponendo $\phi_A(X)=AX-XA$, al variare di $X\in M_2(\mathbb{Q})$. Si mostri che si tratta di un'applicazione lineare e si determinino, al variare di A in $M_2(\mathbb{Q})$, il nucleo e l'immagine di ϕ_A. □

Esercizio 2.32. Si considerino le matrici

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-4\\2&4&-8\\3&6&-12\end{pmatrix}\qquad\text{e}\qquad C=\begin{pmatrix}0&1&1&-2\\2&0&-2&2\\3&2&-1&-1\end{pmatrix}.$$

Si determini la dimensione del sottospazio

$$U=\{\,B\in M_3(\mathbb{R})\mid ABC=\mathbf{0}\,\}$$

e si determini una base di U. □

Esercizio 2.33. Siano date due matrici $A\in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ e $B\in M_{3\times 3}(\mathbb{Q})$ e si consideri l'applicazione $\tau:M_{2\times 3}(\mathbb{Q})\to M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$, definita da $\tau(X)=AXB$, per ogni $X\in M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$.

(a) Dopo aver osservato che τ è un'applicazione lineare, si mostri che τ è invertibile se, e solo se, entrambo le matrici A e B lo sono.

(b) Considerata la base canonica di $M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$, nell'ordine (lessicografico)

$$\varepsilon(11)=\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right),\quad \varepsilon(12)=\left(\begin{smallmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right),\quad \varepsilon(13)=\left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right),$$
$$\varepsilon(21)=\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right),\quad \varepsilon(22)=\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right),\quad \varepsilon(23)=\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right),$$

si scrivano gli elementi della matrice di τ rispetto a tale base, in termini degli elementi delle matrici A e B. □

2.12 Somme dirette, proiezioni e simmetrie. Sia V uno spazio vettoriale ed U, W, due suoi sottospazi tali che $V = U \oplus W$ (cf. *Definizione II.1.8*). Dunque, ogni vettore $x \in V$ si scrive, in modo unico come somma, $x = u + w$, di un vettore $u \in U$ e di un vettore $w \in W$. A questa decomposizione possiamo associare alcune applicazioni lineari:

(a) $\pi_U : V \to V$, la *proiezione su U, parallelamente a W*, che manda $x \in V$ su quell'unico vettore $u \in U$, tale che $x - u \in W$.
(b) $\pi_W : V \to V$, l'analoga *proiezione su W, parallelamente ad U*, che manda $x \in V$ su quell'unico vettore $w \in W$, tale che $x - w \in U$.
(c) $\sigma_U : V \to V$, la *simmetria di asse U e direzione W*, che manda $x = u + w \in V$ su $\sigma_U(x) = u - w$.
(d) $\sigma_W : V \to V$, la *simmetria di asse W e direzione U*, che manda $x = u + w \in V$ su $\sigma_W(x) = -u + w$.

Esercizio 2.34. Siano V uno spazio vettoriale ed U, W, due suoi sottospazi tali che $V = U \oplus W$.
(a) Indicata con π una qualunque delle due proiezioni associate alla decomposizione di V, si verifichi che $\pi \circ \pi = \pi$, ovvero che, per ogni vettore $x \in V$, si ha $\pi(\pi(x)) = \pi(x)$.
(b) Indicata con σ una qualunque delle due simmetrie associate alla decomposizione di V, si verifichi che $\sigma \circ \sigma = 1$, ovvero che, per ogni vettore $x \in V$, si ha $\sigma(\sigma(x)) = x$.
(c) Si determinino nucleo ed immagine di π_U, π_W, σ_U e σ_W. Inoltre, per ciascuna delle applicazioni, si determini l'insieme dei vettori uniti. □

Esercizio 2.35. Sia $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $\phi \circ \phi = \phi$. Si mostri che ϕ è la proiezione su $\operatorname{im} \phi$, parallelamente a $\ker \phi$. □

Esercizio 2.36. Sia $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $\phi \circ \phi = 1$. Si mostri che le due applicazioni π_1 e π_2, definite ponendo $\pi_1(x) = \frac{1}{2}[x + \phi(x)]$ e $\pi_2(x) = \frac{1}{2}[x - \phi(x)]$ per ogni $x \in V$, sono due proiezioni e si ha $\pi_1 + \pi_2 = 1$, $\pi_1 - \pi_2 = \phi$. Si concluda che ϕ è una simmetria associata ad una decomposizione di V e si determini tale decomposizione. □

Esercizio 2.37. Si consideri l'applicazione lineare $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(a) Si verifichi che $\pi(\pi(v)) = \pi(v)$ per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$.
(b) Si determinino i sottospazi $U = \ker \pi$ e $W = \operatorname{im} \pi$ e si mostri che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
(c) Si scriva la matrice della proiezione su U parallelamente a W.
(d) Si scriva la matrice della simmetria di asse U e direzione W. □

Esercizio 2.38. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, ove

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si verifichi che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
(b) Si scriva la matrice rispetto alla base canonica dell'applicazione $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, che si ottiene proiettando i vettori di $\mathbb{R}^4$ su W, parallelamente al sottospazio U.
(c) Si determinino i vettori w_1' e w_2', simmetrici rispettivamente dei vettori w_1 e w_2 rispetto al piano $U^\perp$.
(d) Indicato con W' il sottospazio generato da w_1' e w_2', è vero o falso che (la restrizione di) π induce un'isometria tra W' e W? □

⋆Esercizio 2.39. [Spazio vettoriale quoziente] Sia V uno spazio vettoriale sul campo C e sia W un suo sottospazio. Si chiama *classe laterale* del vettore $v \in V$ rispetto a W l'insieme $v + W = \{\, v + w \mid w \in W \,\}$[(†)].
(a) Si verifichi che $v + W = \{\, x \in V \mid x - v \in W \,\}$.

[(†)] Nel linguaggio dello spazio affine $\mathbb{A}(V)$, associato allo spazio vettoriale V, la classe laterale $v + W$ altri non è che la sottovarietà lineare passante per v (pensato come *punto*) e parallela al sottospazio direttore W.

(b) Dati due vettori v, v' di V, si mostri che $v + W = v' + W$ oppure $(v + W) \cap (v' + W) = \emptyset$.
(c) Date due classi laterali $v + W$ e $v' + W$, la loro *somma* è la classe $(v + v') + W$. Si verifichi che la somma è indipendente dalla scelta dei rappresentanti v e v' delle due classi laterali.
(d) Data una classe laterale $v + W$ ed uno scalare $\alpha \in C$, il loro *prodotto* è la classe $(\alpha v) + W$. Si verifichi che il prodotto per scalari è indipendente dalla scelta del rappresentante v della classe laterale.
(e) Si indichi con V/W l'insieme delle classi laterali dei vettori di V rispetto a W. Si verifichi che V/W con le operazioni definite nei punti precedenti è uno spazio vettoriale su C, detto lo *Spazio vettoriale quoziente di V rispetto a W*.
(f) Si verifichi che l'applicazione naturale $\pi : V \to V/W$, definita ponendo $\pi(v) = v + W$, è un'applicazione lineare suriettiva. Tale applicazione è detta la *proiezione canonica* di V sul quoziente V/W. □

Esercizio 2.40. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e W un sottospazio di dimensione k. Data una base $v_1, \dots, v_k$ di W siano $v_{k+1}, \dots, v_n$ dei vettori che la completano ad una base di V. Nelle notazioni dell'esercizio precedente, si mostri che le classi laterali $v_{k+1} + W, \dots, v_n + W$ sono una base di V/W. Si concluda che $\dim V/W = \dim V - \dim W$. □

⋆Esercizio 2.41. Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare. Si mostri che l'applicazione $\phi_0 : V/\ker\phi \to W$, definita ponendo $\phi_0(v + \ker\phi) := \phi(v)$, è ben definita ed induce un isomorfismo di spazi vettoriali tra $V/\ker\phi$ ed $\operatorname{im}\phi$, tale da rendere commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow[\phi]{} & W \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \uparrow{\scriptstyle j} \\ V/\ker\phi & \xrightarrow[\phi_0]{} & \operatorname{im}\phi \end{array}$$

ove π è la proiezione canonica (cf. `Esercizio II.2.39`) e j è l'inclusione naturale. □

Esercizio 2.42. Sia V uno spazio vettoriale su C e si considerino due sottospazi $U \subseteq W \subseteq V$. Si mostri che l'applicazione $\phi : V/U \to V/W$, definita ponendo $\phi(x + U) = x + W$, è un'applicazione lineare suriettiva che induce (cf. `Esercizio II.2.41`) un isomorfismo $\phi_0 : V/W \cong \frac{V/U}{W/U}$. □

Esercizio 2.43. Sia V uno spazio vettoriale su C e si considerino due sottospazi H, K di V e l'applicazione composta $\pi \circ j : K \to (H + K)/K$, ove $j : K \to H + K$ è l'inclusione naturale e $\pi : H + K \to (H + K)/K$ è la proiezione canonica. Si mostri che $\pi \circ j$ induce (cf. `Esercizio II.2.41`) un isomorfismo $\dfrac{H + K}{K} \cong \dfrac{H}{H \cap K}$. □

3. Sistemi di Equazioni lineari.

Iniziamo questa sezione richiamando alcune notazioni sui sistemi di equazioni lineari.

3.1 Definizione. Chiameremo *sistema di m equazioni lineari* nelle n incognite $x_1, \dots, x_n$, a coefficienti nel corpo C, ogni scrittura del tipo

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} .$$

ove i *coefficienti* a_{ij} ed i *termini noti* b_i, $0 \le i \le m$, $0 \le j \le n$ sono elementi del corpo C.

Il sistema si dirà *omogeneo* se $b_1 = \cdots = b_m = 0$. Dato un sistema Σ, si chiamerà *sistema omogeneo associato* il sistema che si ottiene da Σ sostituendo la colonna dei termini noti con una colonna di zeri.

Dato un sistema di m equazioni lineari Σ, nelle n incognite $x_1, \dots, x_n$, a coefficienti nel corpo C, possiamo considerare la *matrice dei coefficienti* A e la *colonna dei termini noti* b, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(C) \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} .$$

Infine, considerando la colonna $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, possiamo scrivere il sistema nella forma $\Sigma : Ax = b$.

Possiamo quindi intepretare il problema di risolvere il sistema Σ nel linguaggio degli Spazi Vettoriali. In corrispondenza alla matrice $A \in M_{m\times n}(C)$, possiamo considerare l'unica applicazione lineare $\phi : C^n \to C^m$ che ha matrice A rispetto alle basi canoniche dei due spazi. Dunque, dato un vettore $\xi \in C^n$, la sua immagine $\phi(\xi)$ ha coordinate $A\xi$ rispetto alla base canonica di C^m e quindi, risolvere il sistema lineare $\Sigma : Ax = b$, significa determinare i vettori di C^n, che vengono mandati su b da ϕ; ovvero la *controimmagine* di b tramite ϕ: $\phi^{-1}(b) = \{\, \xi \in C^n \mid \phi(\xi) = b \,\}$.

È facile descrivere la controimmagine di un vettore tramite un'applicazione lineare; dati un omomorfismo $\phi : C^n \to C^m$ ed un vettore $b \in C^m$, si ha

$$\phi^{-1}(b) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } b \notin \operatorname{im}\phi \\ u_0 + \ker\phi = \{\, u_0 + z \mid z \in \ker\phi \,\} & \text{se } \phi(u_0) = b \end{cases} . \tag{3.2}$$

Infatti, è ovvio che non vi può essere controimmagine per un vettore che non appartenga all'immagine di ϕ. Inoltre, se $\phi(u_0) = b$ e $z \in \ker\phi$, allora $\phi(u_0 + z) = b$ e quindi $u_0 + \ker\phi \subseteq \phi^{-1}(b)$; e, d'altra parte, preso un qualunque vettore $v \in \phi^{-1}(b)$, si ha $\phi(v - u_0) = b - b = 0$ e quindi $v = u_0 + (v - u_0) \in u_0 + \ker\phi$, e si conclude che $\phi^{-1}(b) = u_0 + \ker\phi$.

Per quanto riguarda il problema di capire se un vettore stia o meno nell'immagine di un'applicazione lineare, possiamo fare la seguente

3.3 Osservazione. *Siano dati un'applicazione lineare $\phi : C^n \to C^m$, di matrice A rispetto alle basi canoniche dei due spazi, ed un vettore $b \in C^m$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*
(a) $b \in \operatorname{im}\phi$*;*
(b) b *è combinazione lineare delle colonne della matrice* A*;*
(c) $\operatorname{rk}(A|b) = \operatorname{rk} A$.

dim. $(a) \Rightarrow (b)$; Ricordiamo che $\operatorname{im}\phi = \langle \phi(e_1), \dots, \phi(e_n) \rangle$, ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica di C^n, e che le colonne della matrice A sono esattamente le coordinate dei vettori $\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)$, rispetto alla base canonica di C^m.

$(b) \Rightarrow (c)$; È chiaro che $\mathrm{rk}(A|b) \geq \mathrm{rk}\, A$, dato che tutte le colonne della seconda matrice sono anche colonne della prima. I due ranghi quindi coincidono se la colonna b è combinazione lineare delle colonne della matrice A.
$(c) \Rightarrow (a)$; Se i due ranghi sono uguali, il vettore b di C^m si scriverà come combinazione lineare delle colonne della matrice A, ovvero devono esistere delle costanti $\xi_1, \ldots, \xi_n$ tali che $b = \xi_1\phi(e_1) + \cdots + \xi_n\phi(e_n) = \phi(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n)$. **CVD** □

Mantenendo le notazioni sin qui introdotte, osserviamo che gli elementi di $\ker\phi$, altro non sono che i vettori $z \in C^n$ tali che $Az = 0$, ovvero tutte e sole le soluzioni del sistema omogeneo associato a $\Sigma : Ax = b$. Infine, se $\mathrm{rk}\,\phi = \mathrm{rk}\, A = r$, allora (cf. *Proposizione II.2.5*) la dimensione di $\ker\phi$ è uguale a $n - r$.

Possiamo quindi raccogliere tutte le osservazioni sin qui fatte in un unico enunciato.

3.4 Teorema. [Rouché-Capelli] *Il sistema di equazioni lineari $\Sigma : Ax = b$, con $A \in Mm \times n(C)$ e $b \in C^m$, ha soluzione se, e solo se, $\mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}\, A$. In tal caso, ogni soluzione del sistema Σ si ottiene sommando ad una soluzione particolare del sistema, ogni soluzione del sistema omogeneo associato $\Sigma' : Ax = 0$. Le soluzioni di Σ' formano uno spazio vettoriale di dimensione $n - \mathrm{rk}\, A$.*

Esercizio 3.1. Si considerino, al variare di λ tra i numeri reali, i sistemi lineari:

$$\Sigma_\lambda = \begin{cases} (\lambda-1)x & +2y & -\lambda z & = 0 \\ 2x & & -z & = 0 \\ -(\lambda+1)x & -\lambda y & +(\lambda+2)z & = 0 \end{cases}.$$

(a) Si indichi con S_λ l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_λ. Si determini al variare di λ la dimensione del sottospazio S_λ.
(b) Si dica se l'unione dei sottoinsiemi S_λ, al variare di λ, genera tutto $\mathbb{R}^3$. In caso contrario, si determini la dimensione del sottospazio generato da tale unione. □

Esercizio 3.2. Si considerino i sistemi lineari omogenei:

$$\begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & & -x_4 & = 0 \\ & 3x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & & & +x_4 & = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \lambda x_1 & +2x_2 & -3\lambda x_3 & & = 0 \\ (\lambda+1)x_1 & +2x_2 & -3\lambda x_3 & +x_4 & = 0 \\ & 2\lambda x_2 & -3x_3 & +2\lambda x_4 & = 0 \end{cases}.$$

Si determinino i valori di λ per cui i due sistemi ammettono soluzioni non banali in comune. □

Esercizio 3.3. Si considerino, al variare di λ tra i numeri reali, i sistemi lineari:

$$\Sigma_\lambda = \begin{cases} (\lambda-1)x_1 & +2x_2 & -\lambda x_3 & +2\lambda x_4 & = 0 \\ 2x_1 & & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ -(\lambda+1)x_1 & -\lambda x_2 & +(\lambda+2)x_3 & -2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +(\lambda-2)x_2 & -2x_3 & & = 0 \end{cases}.$$

(a) Si indichi con S_λ l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_λ. Si determini al variare di λ la dimensione del sottospazio S_λ.
(b) Si dica se l'unione dei sottoinsiemi S_λ, al variare di λ, genera tutto $\mathbb{R}^4$. In caso contrario, si determinino le equazioni del sottospazio generato da tale unione. □

Esercizio 3.4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le terne di piani

$$\pi_1(\lambda) : y - \lambda x + (\lambda-2)(z+1) = 0, \quad \pi_2(\lambda) : (\lambda-1)x + \lambda z = 2, \quad \pi_3(\lambda) : x + \lambda y + 2\lambda^2 z = 0,$$

al variare di λ in $\mathbb{R}$.

Si dica per quali valori di λ le intersezioni $\pi_1(\lambda) \cap \pi_2(\lambda)$, $\pi_1(\lambda) \cap \pi_3(\lambda)$, $\pi_2(\lambda) \cap \pi_3(\lambda)$ sono tre rette parallele, a due a due, distinte. □

3.5 La tecnica di Eliminazione. [Gauss] Uno dei metodi più efficaci di risoluzione dei sistemi di equazioni lineari consiste nella cosiddetta "tecnica di eliminazione", tradizionalmente attribuita a Gauss.

La tecnica consiste nel fare "operazioni elementari" sulle equazioni di un sistema lineare in modo da ridurre il numero di coefficienti non nulli senza modificarne le soluzioni. Queste cosiddette *operazioni elementari* sono di tre tipi:

- scambio di due equazioni in un sistema lineare (e quindi di due righe nella corrispondente matrice);
- moltiplicazione di tutti i coefficienti di un'equazione (e quindi di una riga della corrispondente matrice) per una costante diversa da zero;
- sostituzione di un'equazione con la somma della stessa con un multiplo dell'equazione che la precede (e quindi sostituire una riga della corrispondente matrice con la somma della riga stessa con un multiplo della riga soprastante).

Iterando opportunamente queste operazioni si può ottenere un sistema lineare che abbia le stesse soluzioni del sistema di partenza, ma con un maggior numero di coefficienti uguali a zero e quindi un sistema per cui sia più facile scrivere le soluzioni. Prima di utilizzare il linguaggio dell'algebra lineare per spiegare la validità di questa tecnica, diamo un esempio esplicito della sua applicazione alla risoluzione di un sistema lineare.

Vogliamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \quad x_2 \quad -2x_4+2x_5=0 \\ x_1 \ +x_2-3x_3 \quad +x_5=1 \\ -x_1 \quad +2x_3-2x_4 \ -x_5=-1 \\ x_1+2x_2-3x_3 \ -x_4+2x_5=2 \end{cases} \tag{3.6}$$

e quindi applichiamo operazioni elementari in modo che la variabile x_1 non compaia nelle equazioni successive alla prima, x_2 non compaia nelle equazioni successive alla seconda, ecc. Poichè x_1 non compare nella prima equazione, scambiamo tra loro le prime due righe.

$$\begin{cases} x_1 \ +x_2-3x_3 \quad +x_5=1 & \text{(II)} \\ \quad x_2 \quad -2x_4+2x_5=0 & \text{(I)} \\ -x_1 \quad +2x_3-2x_4 \ -x_5=-1 & \\ x_1+2x_2-3x_3 \ -x_4+2x_5=2 & \end{cases}.$$

Modifichiamo quindi il sistema, scrivendo a destra delle equazioni le operazioni fatte sulle righe del sistema precedente, indicando ogni riga con il numero romano ad essa corrispondente. Ora sostituiamo alla terza equazione la sua somma con la prima e poi sostituiamo la quarta equazione con la sua differenza con la prima.

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3 \quad +x_5=1 & \\ \quad x_2 \quad -2x_4+2x_5=0 & \\ \quad x_2 \ -x_3-2x_4 \quad =0 & \text{(III+I)} \\ \quad x_2 \quad -x_4 \ +x_5=1 & \text{(IV-I)} \end{cases}.$$

In questo modo abbiamo 'eliminato' x_1 dalle equazioni successive alla prima. Operiamo analogamente con la seconda equazione e la variabile x_2, ovvero:

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3 \quad +x_5=1 & \\ \quad x_2 \quad -2x_4+2x_5=0 & \\ \quad x_3 \quad +2x_5=0 & \text{-(III-II)} \\ \quad x_4 \ -x_5=1 & \text{(IV-II)} \end{cases}.$$

Si osservi che nella terza riga abbiamo effettuato due operazioni elementari, perchè, dopo aver sottratto le due righe abbiamo moltiplicato l'equazione che ne risultava per la costante -1. Il sistema ottenuto in questo modo non richiede altre operazioni elementari perchè la variabile x_3 è già assente dalla quarta equazione.

A questo punto è immediato osservare che quest'ultimo sistema ha rango 4 e che le sue soluzioni sono(†)

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Queste sono anche soluzioni del sistema di partenza, come si può verificare andandole a sostituire in quel sistema. In realtà sono *le* soluzioni del sistema di partenza, perchè *due sistemi ottenuti l'uno dall'altro con il procedimento di eliminazione hanno le stesse soluzioni*. Useremo il linguaggio dell'algebra lineare per spiegare questo fatto (e quindi la validità del metodo di Gauss).

Sappiamo che risolvere il sistema (II.3.6)significa trovare la controimmagine del vettore $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ rispetto all'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche dei due spazi. Le *operazioni elementari che applichiamo alle righe del sistema corrispondono a cambiamenti di base nello spazio* $\mathbb{R}^4$ e quindi i sistemi che otteniamo in questo modo hanno la matrice di ϕ e le coordinate del vettore w rispetto a questa nuova base. Trattandosi della stessa applicazione lineare e dello stesso vettore, non cambia certo la sua controimmagine e quindi non cambiano le soluzioni.

Scriviamo quindi ordinatamente le matrici dei cambiamenti di base operati in $\mathbb{R}^4$ durante la risoluzione del sistema, facendoli agire *dopo* l'omomorfismo ϕ, e quindi operando *a sinistra* della matrice di ϕ. Si ha quindi

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ove B è la matrice dell'ultimo sistema ed è immediato verificare che le tre matrici che moltiplicano A sono tutte di rango massimo e quindi matrici di cambiamento di base. Invitiamo il lettore a verificare che, moltiplicando le stesse tre matrici nell'ordine per il vettore w, si ottiene la colonna dei termini noti del sistema finale, ovvero $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$(†). Il lettore più scrupoloso, può verificare che le basi di $\mathbb{R}^4$ sono,

---

(†) Volendo, si poteva continuare ulteriormente il procedimento di eliminazione ed ottenere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 7x_5 = -1 & \text{(I+3III-II)} \\ x_2 = 2 & \text{(II+2IV)} \\ x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 1 \end{cases}.$$

le cui soluzioni sono evidentemente quelle scritte.

(†) La continuazione del procedimento di eliminazione fatta nella nota precedente corrisponde a moltiplicare la matrice B a sinistra per la matrice di cambiamento di base

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed operare analogamente con la colonna dei termini noti.

ordinatamente: $\{e_2, e_1, e_3, e_4\}$, $\{e_2 - e_3 + e_4, e_1, e_3, e_4\}$, $\mathcal{V} = \{e_2 - e_3 + e_4, e_1 + e_3 + e_4, -e_3, e_4\}$; e quindi $B = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{V}}(\phi)$.

Riepilogando quanto detto, il metodo di eliminazione di Gauss, consiste nell'applicare operazioni elementari sulle righe di un sistema lineare, fino ad ottenere un sistema che abbia una *matrice a scalini*, ovvero una matrice A tale che, per ogni indice di riga i, esista un indice di colonna $j \geq i$, tale che si abbia $a_{hk} = 0$ quando $h \geq i$ e $k < j$ (cioè tutte le righe successive alla i-esima hanno le prime entrate nulle fino alla j-esima colonna). Il sistema così ottenuto ha le stesse soluzioni del sistema di partenza.

Concludiamo la discussione dando un altro esempio di risoluzione di un sistema lineare con la tecnica di eliminazione di Gauss. Vogliamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2 \quad +4x_4-x_5= 4 \\ x_1 \quad -x_3+2x_4-x_5= 1 \\ \quad x_2+2x_3 \ +x_4 \quad = 2 \\ x_1+x_2 \ +x_3+3x_4-x_5= 3 \end{cases}$$

e quindi applichiamo operazioni elementari che, come nell'esempio precedente indichiamo a destra del sistema.

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3+2x_4-x_5= 1 & (II) \\ \quad x_2+2x_3 \ +x_4 \quad = 2 & (III) \\ 2x_1+x_2 \quad +4x_4-x_5= 4 & (I) \\ x_1+x_2 \ +x_3+3x_4-x_5= 3 & \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 \quad -x_3+2x_4-x_5= 1 & \\ \quad x_2+2x_3 \ +x_4 \quad = 2 & \\ \quad +x_2+2x_3 \quad +x_5= 2 & (III-2I) \\ \quad x_2+2x_3 \ +x_4 \quad = 2 & (IV-I) \end{cases}.$$

In questo modo abbiamo eliminato x_1 dalle equazioni successive alla prima e possiamo operare analogamente con la variabile x_2, ed ottenere

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3+2x_4-x_5= 1 & \\ \quad x_2+2x_3 \ +x_4 \quad = 2 & \\ \quad x_4-x_5= 0 & -(III-II) \\ \quad 0= 0 & (IV-II) \end{cases}$$

che è già un sistema con la matrice a scalini. A questo punto possiamo concludere che il sistema ha rango 3 e che le sue soluzioni sono la varietà lineare

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

ovvero un piano nello spazio affine di dimensione 5. Il lettore più attento è invitato a scrivere esplicitamente le matrici dei cambiamenti di base coinvolti nella risoluzione del sistema.

Esercizio 3.5. Si chiamano *matrici elementari* le matrici dei cambiamenti di base corrispondenti alle operazioni elementari della tecnica di eliminazione; ovvero una matrice quadrata X è una matrice elementare se, moltiplicata *a sinistra* della matrice completa di un sistema, produce un'operazione elementare sulle *righe* del sistema.

(a) Si verifichi che la matrice elementare di ordine n che scambia tra loro le righe i e j di un sistema, con $1 \leq i < j \leq n$ è la matrice $H(i,j) = \mathbf{1}_n + \varepsilon(ij) + \varepsilon(ji) - \varepsilon(ii) - \varepsilon(jj)$, ove $\{\, \varepsilon(hk) \mid 1 \leq h,k \leq n \,\}$, è la base canonica di $M_{n\times n}(C)$ (cf. *Definizione II.2.6*).

(b) Si verifichi che la matrice elementare di ordine n che moltiplica l'i-esima riga di un sistema per lo scalare $\beta \neq 0$ è la matrice $C(i,\beta) = \mathbf{1}_n + (\beta - 1)\varepsilon(ii)$.

(c) Si verifichi che la matrice elementare di ordine n che somma all'i-esima riga di un sistema la j-esima riga moltiplicata per lo scalare $\alpha \neq 0$ è la matrice $E(i,j,\alpha) = \mathbf{1}_n + \alpha\varepsilon(ij)$. □

Esercizio 3.6. Sia B una matrice $m \times n$. Si descriva l'effetto che si ottiene su B, moltiplicando B *a destra* per le matrici elementari descritte nell'esercizio precedente. □

⋆Esercizio 3.7. Si verifichi che le matrici elementari sono tutte invertibili e che ogni matrice invertibile, ad elementi in un corpo C, è prodotto di un numero finito di matrici elementari. □

Esercizio 3.8. Si considerino i sistemi lineari omogenei:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 - (\lambda+1)x_3 = 0 \\ 2\lambda x_2 + x_3 - \lambda x_4 = 0 \end{cases}.$$

Si determinino i valori di $\lambda \in \mathbb{C}$ per cui i due sistemi ammettono soluzioni non banali in comune. □

Esercizio 3.9. Al variare di t in $\mathbb{Q}$, si scrivano tutte le matrici X tali che $AXB = A$, ove $A = \begin{pmatrix} 2 & t \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 3.10. Due matrici $A, B \in M_{n\times m}(C)$ si dicono *riga-equivalenti* se esiste una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}_n(C)$ tale che $B = PA$. Analogamente, due sistemi di equazioni lineari si dicono *riga-equivalenti* se lo sono le loro matrici complete.

(a) Si verifichi che due sistemi lineari riga-equivalenti hanno lo stesso insieme di soluzioni.
(b) È vero o falso che due matrici $A, B \in M_{n\times m}(C)$ sono riga-equivalenti se, e solo se, i sistemi omogenei $AX = 0$ e $BX = 0$ hanno lo stesso insieme di soluzioni?
(c) È vero o falso che due sistemi non-omogenei di equazioni lineari, $AX = c$ e $BX = d$, sono riga-equivalenti se, e solo se, hanno lo stesso insieme di soluzioni? □

Esercizio 3.11. Due matrici $A, B \in M_{n\times m}(C)$ si dicono *equivalenti* se esistono delle matrici invertibili $P \in \mathrm{GL}_n(C)$ e $Q \in \mathrm{GL}_m(C)$ tali che $B = PAQ$.

(a) Si mostri che una matrice $A \in M_{n\times m}(C)$ ha rango r se, e solo se, A è equivalente ad una matrice (a blocchi) del tipo $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ove $r = \mathrm{rk}\, A$.
(b) Data una matrice $A \in M_{n\times m}(C)$, la sua *trasposta* è la matrice ${}^tA \in M_{m\times n}(C)$, che si ottiene scambiando tra loro righe e colonne; ovvero l'elemento di posto (i, j) di ${}^tA$ è l'elemento di posto (j, i) di A. Si deduca dal punto precedente che A e ${}^tA$ hanno lo stesso rango. □

Esercizio 3.12. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$. Si mostri che l'insieme delle matrici $X \in M_2(\mathbb{Q})$ tali che $AX = XA$ è un sottospazio di $M_2(\mathbb{Q})$, la cui dimensione è uguale a 2 oppure a 4, e quest'ultimo caso accade se, e solo se, A è una matrice scalare ($a = d$ e $b = c = 0$). □

Esercizio 3.13. Al variare di λ in $\mathbb{Q}$, si dica quante soluzioni vi sono in $\mathbb{Q}^4$ per il seguente sistema di equazioni lineari

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} (\lambda-1)x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ \lambda x_2 + (\lambda+1)x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_3 + x_4 = 0 \\ (\lambda-1)x_1 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

□

Esercizio 3.14. Si determinino i valori del parametro t per cui il sistema

$$\Sigma_t : \begin{cases} (t+1)x_1 + 2x_2 - tx_4 = 1 \\ (2-t)x_2 + x_3 = 1 \\ (2-t)x_2 + 2tx_4 = 1 \\ (t+1)x_1 + 2x_2 + (2-t)x_3 = 1 \end{cases}$$

ha soluzione.

Per i valori di t per cui il sistema ammette un'unica soluzione, si determini tale soluzione in funzione del parametro t. □

Esercizio 3.15. Unendo il cloro (Cl_2) all'idrossido di potassio (KOH), si ottengono cloruro di potassio (KCl), clorato di potassio ($KClO_3$) e acqua (H_2O). Bilanciare la reazione

$$Cl_2 + KOH \to KCl + KClO_3 + H_2O;$$

ovvero trovare dei numeri naturali $n_1, \dots, n_5$ tali che il numero di atomi di ciascun elemento nel termine di sinistra $n_1Cl_2 + n_2KOH$ sia uguale al numero di atomi di ciascun elemento presente nel termine di destra $n_3KCl + n_4KClO_3 + n_5H_2O$. □

Esercizio 3.16. Siano dati tre spazi vettoriali V, W, Z, di dimensione finita sul campo C, e due applicazioni lineari $\phi : V \to W$, $\psi : W \to Z$. Si mostri che

(a) $\operatorname{rk}(\psi \circ \phi) = \operatorname{rk}\phi$ se, e solo se, $\ker\psi \cap \operatorname{im}\phi = \langle 0 \rangle$;
(b) $\operatorname{rk}(\psi \circ \phi) = \operatorname{rk}\psi$ se, e solo se, $\ker\psi + \operatorname{im}\phi = W$.
(c) Si concluda che, dato un endomorfismo $f : V \to V$, si ha $\operatorname{rk}(f \circ f) = \operatorname{rk} f$ se, e solo se, $V = \ker f \oplus \operatorname{im} f$. □

Esercizio 3.17. *Sia $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ una matrice di rango k.*

(a) Si mostri che, se ${}^tBB = \mathbf{1}_k$, allora $B{}^tB$ è la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^n$, dotato dell'usuale prodotto scalare, sul sottospazio generato dalle colonne della matrice B.
(b) In generale, si mostri che $P = B({}^tBB)^{-1}{}^tB$ è la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^n$, dotato dell'usuale prodotto scalare, sul sottospazio generato dalle colonne della matrice B.
(c) Si mostri infine che, preso comunque un vettore $b \in \mathbb{R}^k$, il sistema lineare ${}^tBx = b$ ha soluzione e che le soluzioni sono tutti e soli gli elementi $p \in \mathbb{R}^n$ della forma $p = B({}^tBB)^{-1}b + (\mathbf{1}_n - P)y$, al variare di y in $\mathbb{R}^n$.

Svolgimento. (a). La condizione ${}^tBB = \mathbf{1}_k$ dice che le colonne della matrice B sono una base ortonormale $\{b_1, \dots, b_k\}$ del sottospazio da esse generato. È chiaro allora che, dato un vettore $x \in \mathbb{R}^n$, il vettore $B{}^tBx$ è $(b_1 \cdot x)b_1 + \cdots + (b_k \cdot x)b_k$ che è esattamente la proiezione ortogonale di x sul sottospazio generato da $b_1, \dots, b_k$, perché la differenza tra x e questo vettore è ortogonale ai generatori $b_1, \dots, b_k$.

(b). Con un calcolo diretto, si verifica che $P^2 = P$; quindi P è una matrice di proiezione. Inoltre, ${}^tP = P$ e quindi si tratta di una proiezione ortogonale, essendo ${}^t(x - Px)Px = {}^txPx - {}^tx{}^tPPx = 0$, per ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$. Osserviamo infine che, per costruzione, l'immagine di P è contenuta nel sottospazio generato dalle colonne di B e coincide con questo sottospazio perché $({}^tBB)^{-1}{}^tB$ è la matrice di un'applicazione lineare suriettiva di $\mathbb{R}^n$ su $\mathbb{R}^k$ e quindi $\operatorname{rk} P = k = \operatorname{rk} B$.

(c). La matrice ${}^tB$ ha rango $k = \operatorname{rk} B$, e quindi, per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema lineare ${}^tBx = b$ ha soluzione, qualunque sia $b \in \mathbb{R}^k$. Osserviamo che ${}^tB(B({}^tBB)^{-1}b) = ({}^tBB)({}^tBB)^{-1}b = b$; e quindi $B({}^tBB)^{-1}b$ è una soluzione particolare del sistema. Inoltre, se u è un'altra soluzione del sistema, si ha

$$u - B({}^tBB)^{-1}b = u - B({}^tBB)^{-1}{}^tBu = (\mathbf{1}_n - P)u$$

e quindi le soluzioni si scrivono tutte nel modo descritto.

La matrice $C = B({}^tBB)^{-1}$ è detta la *pseudoinversa di Penrose-Moore* della matrice ${}^tB$. □

4. Appendice. Spazio Affine, applicazioni affini.

Nel primo capitolo abbiamo introdotto rapidamente la nozione di spazio affine; ora che siamo in possesso della definizione di spazio vettoriale, possiamo dare una definizione generale di Spazio Affine che precisa quanto detto nel Capitolo I sullo spazio $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$ e lo situa in un ambito un po' più generale (ad esempio, può essere applicata su corpi di base qualunque).

4.1 Definizione. Uno *Spazio Affine* è costituito da un insieme, $\mathbb{A}$, di *punti*, da uno spazio vettoriale, V, e da un'applicazione $+ : \mathbb{A} \times V \to \mathbb{A}$, che manda la coppia (P, v) sul punto $P + v$, e soddisfa alle seguenti proprietà:

- $(P + v) + w = P + (v + w)$ per ogni $P \in \mathbb{A}$ e per ogni $v, w \in V$;
- $P + v = P \Leftrightarrow v = 0$, qualunque sia $P \in \mathbb{A}$;
- presi comunque P e Q in $\mathbb{A}$, esiste un (unico) vettore $v \in V$ tale che $Q = P + v$. Si chiama *dimensione* dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ la dimensione dello spazio vettoriale V.

Il vettore v, descritto nell'ultima proprietà, è usualmente indicato come $Q - P$, o $\overrightarrow{PQ}$, e l'operazione di "differenza tra punti" così definita è compatibile con le operazioni tra vettori e tra punti e vettori.

Osserviamo inoltre che, fissato un punto P, resta definita un'applicazione $\alpha_P : V \to \mathbb{A}$, definita da $\alpha_P(v) = P + v$, che è una biezione, avendo come inversa $\beta_P : \mathbb{A} \to V$, definita da $\beta(Q) = Q - P$. Infine, per ogni vettore $v \in V$, è ben definita la *traslazione* $\tau_v : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, che manda P in $P + v$.

4.2 Definizione. Dati due spazi affini, $(\mathbb{A}, V, +)$ ed $(\mathbb{A}', V', +')$, un'*applicazione affine* è un'applicazione (insiemistica), $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$, per cui esista un'applicazione lineare $\phi : V \to V'$ tale che

$$f(P + v) = f(P) +' \phi(v), \quad \text{per ogni punto } P \in \mathbb{A} \text{ ed ogni vettore } v \in V.$$

Le applicazioni affini $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, che siano biiezioni di $\mathbb{A}$ in sé, sono dette *affinità*.

Nelle notazioni precedenti, possiamo quindi scrivere che $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ è un'applicazione affine se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to V$ tale che $f = \alpha_{f(P)} \circ \phi \circ \beta_P$, qualunque sia $P \in \mathbb{A}$. Viceversa, è facile verificare (Esercizio!) che, dati due punti P e Q di $\mathbb{A}$ ed un'applicazione lineare $\psi : V \to V$, l'applicazione composta $\alpha_Q \circ \psi \circ \beta_P$ è un'applicazione affine, che manda P su Q ed è associata all'applicazione lineare ψ.

Esercizio 4.1. Si dimostri che la composizione di due applicazioni affini $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ e $g : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}''$ è ancora un'applicazione affine. Si dimostri che l'applicazione identica $1 : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ è un'affinità. □

Esercizio 4.2. Si dimostri che un'applicazione affine $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ è un'affinità se, e solo se, l'applicazione lineare associata, $\phi : V \to V'$, è un isomorfismo di spazi vettoriali. □

4.3 Esempi. *Spazio affine associato ad uno spazio vettoriale.* Dato uno spazio vettoriale V, gli si può associare uno Spazio affine $\mathbb{A}(V)$, prendendo gli elementi di V sia come *punti* che come *vettori* ed utilizzando come operazione la somma dello spazio vettoriale. La differenza sostanziale tra V ed $\mathbb{A}(V)$ è che nel primo l'origine è posta nel vettore nullo che resta invariato per ogni trasformazione lineare dello spazio, mentre nello Spazio Affine l'origine può essere posta arbitrariamente su qualsiasi punto e venir trasformata in altri punti dalle applicazioni affini, perchè alle applicazioni lineari si sono aggiunte le traslazioni come possibili trasformazioni dello spazio. Le applicazioni affini tra $\mathbb{A}(V)$ ed $\mathbb{A}(W)$ non sono quindi le sole applicazioni lineari tra V e W, ma la composizione di queste con traslazioni.

Lo spazio affine standard, $\mathbb{A}^n(C)$. Dato un corpo C, si considera lo spazio vettoriale C^n e lo spazio affine ad esso associato $\mathbb{A}(C^n)$. Questo spazio è anche detto lo *spazio affine standard* di dimensione n su C e viene indicato con $\mathbb{A}^n(C)$. Si pone la convenzione di scrivere $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ per indicare il *punto*

$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in C^n$. e di scrivere $\begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ per indicare il *vettore* $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n \in C^n$. Le operazioni di somma tra punti e vettori e di differenza tra punti dello spazio affine si trasformano nelle naturali operazioni sulle coordinate, compresa l'ulteriore coordinata utilizzata per distinguere punti da vettori. Lo spazio affine standard nasce quindi con un fissato sistema di coordinate.

Possiamo introdurre le coordinate in un qualsiasi spazio affine introducendo la nozione di sistema di riferimento.

4.4 Definizione. Dare un *riferimento* in uno spazio affine, $(\mathbb{A}, V, +)$, significa fissare un'origine $O \in \mathbb{A}$ ed una base $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V. Fissato un riferimento, $\mathscr{R} = \{O, v_1, \ldots, v_n\}$, possiamo associare ad ogni punto $P \in \mathbb{A}$ le coordinate del vettore $P - O = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ ed aggiungere un'ulteriore coordinata uguale ad 1 per ricordare che si tratta di un punto, scriveremo cioè $P = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ per indicare le *coordinate affini* del punto P. Dato un vettore, $v = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n$ in V, scriveremo $v = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, utilizzando l'ulteriore coordinata uguale a 0, per indicare le *coordinate affini* di un vettore.

Esercizio 4.3. Si consideri lo spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$, con $\dim_C V = n$. Si verifichi che scegliere un riferimento in $(\mathbb{A}, V, +)$, significa fissare un'affinità tra $(\mathbb{A}, V, +)$ e lo spazio affine standard $\mathbb{A}^n(C)$. □

Fissato un riferimento le operazioni di somma tra punti e vettori e di differenza tra punti dello spazio affine si trasformano nelle naturali operazioni sulle coordinate. Inoltre, ad ogni applicazione affine $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, possiamo associare una matrice (quadrata di ordine $n+1$): posto $t = f(O) - O$, per ogni punto $P \in \mathbb{A}$, si ha $f(P) = f(O + (P - O)) = O + t + \phi(P - O)$, e quindi le coordinate del punto $f(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sono completamente determinate a partire dalle coordinate di $P = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, dalla conoscenza della matrice $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ e dalla conoscenza delle coordinate del vettore $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$, ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ t_1 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_n & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Date due applicazioni affini f ed f', di $\mathbb{A}$ in sé, associate rispettivamente ai vettori $t = f(O) - O$ e $t' = f'(O) - O$ ed alle applicazioni lineari ϕ e ϕ', lasciamo al lettore il compito di scrivere esplicitamente il vettore $t'' = f'(f(O)) - O$ e l'applicazione lineare ϕ'' associati all'applicazione composta $f' \circ f$, e di verificare che la matrice dell'applicazione composta corrisponde al prodotto delle matrici delle applicazioni componenti.

Il lettore diligente è invitato anche a scrivere la matrice di un'applicazione affine tra due spazi affini diversi, rispetto a dei fissati riferimenti su tali spazi.

Come negli spazi vettoriali, i sottospazi sono quei sottoinsiemi che ereditano la struttura di spazio vettoriale, così possiamo considerare quei sottoinsiemi dello spazio affine che ereditano una struttura di spazio affine; parleremo di *sottospazi affini* o *sottovarietà lineari*, come andiamo a definire qui sotto.

4.5 Definizione. Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine. Dato un punto, P di $\mathbb{A}$, ed un sottospazio vettoriale W di V, chiameremo *sottovarietà lineare, passante per P, di sottospazio direttore W*, il sottoinsieme $\mathbb{L} = P + W = \{ P + w \mid w \in W \}$ e chiameremo *dimensione* di $\mathbb{L}$ la dimensione del sottospazio vettoriale W.

L'insieme vuoto, $\varnothing \subset \mathbb{A}$, è una sottovarietà lineare, di dimensione -1.

Esercizio 4.4. Nelle notazioni della *Definizione II.4.5*, se $\mathbb{L} \neq \varnothing$ è una sottovarietà lineare, si verifichi che la restrizione a $\mathbb{L} \times W$ dell'operazione $+ : \mathbb{A} \times V \to \mathbb{A}$, rende $(\mathbb{L}, W, +)$ uno spazio affine. Ciò giustifica il nome di sottospazi affini dato talvolta alle sottovarietà lineari. □

Esercizio 4.5. Sia $\mathbb{L} \neq \varnothing$ la sottovarietà lineare passante per P e di sottospazio direttore W. Dato un punto $Q \in \mathbb{L}$, si verifichi che $\mathbb{L} = Q + W = \{ Q + w \mid w \in W \}$, ovvero che tutti i punti di $\mathbb{L}$ si ottengono applicando ad un *qualunque suo punto* i vettori di W. □

Esercizio 4.6. Sia $\mathbb{L} \neq \varnothing$ una sottovarietà lineare e sia P un suo punto. Si mostri che il sottospazio direttore W di $\mathbb{L}$ è uguale all'insieme $\{ X - P \mid X \in \mathbb{L} \}$. □

Dato uno spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$, di dimensione n, osserviamo che i punti di $\mathbb{A}$, sono le sottovarietà lineari di dimensione 0 e che $\mathbb{A}$ stesso è l'unica sottovarietà lineare di dimensione n. Chiameremo, come di consueto, *rette* le sottovarietà lineari di dimensione 1, *piani* le sottovarietà lineari di dimensione 2, *iperpiani* le sottovarietà lineari di dimensione $n-1$ di $\mathbb{A}$. Osserviamo che l'intersezione di sottovarietà lineari è ancora una sottovarietà lineare mentre, in generale, l'unione di due sottovarietà lineari *non* è una sottovarietà lineare.

Riprendiamo in questo contesto le definizioni date nel Capitolo I

4.6 Definizione. Due sottovarietà lineari non vuote, $\mathbb{L} = P + W$ ed $\mathbb{M} = Q + U$, si dicono
- *incidenti* se $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \varnothing$;
- *parallele* se $W \subset U$, oppure $U \subset W$;
- *sghembe* se $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \varnothing$ ed $U \cap W = \langle 0 \rangle$.

Esercizio 4.7. Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine di dimensione n e sia $S \neq \varnothing$ un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{A}$. Fissati arbitrariamente due punti P e Q in S si considerino i sottoinsiemi di V, $H_P = \{ X - P \mid X \in S \}$ ed $H_Q = \{ X - Q \mid X \in S \}$. Si mostri che $\langle H_P \rangle = \langle H_Q \rangle$ e che $P + \langle H_P \rangle = Q + \langle H_Q \rangle$. La sottovarietà lineare $P + \langle H_P \rangle$ costruita sopra sarà detta, la *sottovarietà lineare generata da S*[(†)]. □

⋆Esercizio 4.8. Date due sottovarietà lineari, $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$, indicheremo con $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$ la sottovarietà lineare generata dall'unione insiemistica $\mathbb{L} \cup \mathbb{M}$. Siano $\mathbb{L} \neq \varnothing \neq \mathbb{M}$, con $\mathbb{L} = P + U$, $\mathbb{M} = Q + W$.
(a) Si verifichi che $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$ è la sottovarietà lineare, passante per P, di sottospazio direttore $U + W + \langle Q - P \rangle$.
(b) Si verifichi che $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \varnothing$ se, e solo se, $Q - P \in U + W$.
(c) Si dimostri che $\dim(\mathbb{L} \vee \mathbb{M}) \leq \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} - \dim(\mathbb{L} \cap \mathbb{M})$ e che vale l'uguaglianza se, e solo se, $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ sono incidenti oppure sghembe. □

4.7 Definizione. Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine di dimensione n. Diremo che i punti $P_0, P_1, \ldots, P_r$ di $\mathbb{A}$ sono *in posizione generale* se la sottovarietà lineare da essi generata, $P_0 \vee P_1 \vee \cdots \vee P_r$, ha dimensione r.

Esercizio 4.9. Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine di dimensione n. Si mostri che dare un riferimento nello spazio affine equivale a dare $n+1$ punti, $P_0, P_1, \ldots, P_n$, in posizione generale, prendendo P_0 come origine ed i vettori $\{P_1 - P_0, \ldots, P_n - P_0\}$ come base di V. □

Siano $P_0, P_1, \ldots, P_r$ dei punti dello spazio affine in posizione generale e sia X un punto della sottovarietà lineare $P_0 \vee P_1 \vee \cdots \vee P_r$. Allora $X - P_0 = c_1(P_1 - P_0) + \cdots + c_r(P_r - P_0)$, per opportuni coefficienti $c_1, \ldots, c_r$, univocamente determinati da X. Applicando il vettore $X - P_0$ nel punto P_0, si ha $X = P_0 + c_1(P_1 - P_0) + \cdots + c_r(P_r - P_0)$ e, posto $c_0 = 1 - (c_1 + \cdots + c_r)$, si sarebbe tentati di scrivere

$$X = c_0 P_0 + c_1 P_1 + \cdots + c_r P_r, \qquad \text{ove } c_0 + c_1 + \cdots + c_r = 1.$$

Questa scrittura non è solo una manipolazione "algebrica" dei coefficienti, ma ha senso per qualsiasi scelta di coefficienti $c_0, c_1, \ldots, c_r$ con $c_0 + c_1 + \cdots + c_r = 1$.

(†) Dalla definizione sappiamo che l'insieme vuoto è una sottovarietà lineare. Quindi il vuoto è la sottovarietà lineare generata dall'insieme vuoto.

4.8 Proposizione. *Siano $P_0, P_1, \dots, P_r$ dei punti dello spazio affine in posizione generale e sia fissato ad arbitrio un punto O dello spazio affine. Dati dei coefficienti $c_0, c_1, \dots, c_r$ con $c_0 + c_1 + \cdots + c_r = 1$, il punto X tale che*

$$X - O = c_0(P_0 - O) + c_1(P_1 - O) + \cdots + c_r(P_r - O)$$

è univocamente determinato ed è indipendente dalla scelta del punto O.

dim. Se O' è un altro punto di $\mathbb{A}$, si ha $P - O' = (P - O) - (O' - O)$, per ogni punto P di A. Dunque,

$$\begin{aligned} c_0(P_0 - O') + c_1(P_1 - O') + \cdots + c_r(P_r - O') = \\ = c_0(P_0 - O) + c_1(P_1 - O) + \cdots + c_r(P_r - O) - (c_0 + \cdots + c_r)(O' - O) = \\ = (X - O) - (O' - O) = X - O', \end{aligned}$$

che ci mostra l'indipendenza di X dalla scelta di O. **CVD** □

D'ora in poi scriveremo quindi, senza preoccupazioni di abuso di linguaggio,

$$X = c_0P_0 + c_1P_1 + \cdots + c_rP_r, \qquad \text{ove } c_0 + c_1 + \cdots + c_r = 1.$$

ed i coefficienti $c_0, c_1, \dots, c_r$, saranno detti le *coordinate baricentriche* del punto X rispetto ai punti $P_0, P_1, \dots, P_r$. Si osservi che, essendo i punti $P_0, P_1, \dots, P_r$ in posizione generale, c'è corrispondenza biunivoca tra i punti della sottovarietà lineare $P_0 \vee P_1 \vee \cdots \vee P_r$ e le $(r+1)$-uple $(c_0, c_1, \dots, c_r)$ di elementi di C con $c_0 + c_1 + \cdots + c_r = 1$.

La scrittura può essere applicata alle coordinate affini dei punti, ovvero, fissato un riferimento nello spazio affine,

$$\text{se } P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ p_{10} \\ \vdots \\ p_{n0} \end{pmatrix}, \dots, P_r = \begin{pmatrix} 1 \\ p_{1r} \\ \vdots \\ p_{nr} \end{pmatrix} \quad \text{allora} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ p_{10} \\ \vdots \\ p_{n0} \end{pmatrix} + \cdots + c_r \begin{pmatrix} 1 \\ p_{1r} \\ \vdots \\ p_{nr} \end{pmatrix}.$$

Ciò è vero, prendendo il punto O, uguale all'origine del riferimento; inoltre, la condizione $c_0 + \cdots + c_r = 1$ ci garantisce che la combinazione lineare può essere fatta su tutte le coordinate dei punti, compresa quella iniziale.

Esercizio 4.10. Si verifichi che la scrittura $X = c_0P_0 + c_1P_1 + \cdots + c_rP_r$,con $c_0 + c_1 + \cdots + c_r = 1$ ha senso anche se i punti $P_0, \dots, P_r$ non sono in posizione generale. Si verifichi che, in tal caso, questa scrittura esiste per tutti i punti $X \in P_0 \vee P_1 \vee \cdots \vee P_r$, ma non è unica. Per distinguerlo dal caso precedente, parleremo di *combinazioni baricentriche*. □

Esercizio 4.11. Siano $(\mathbb{A}, V, +)$ ed $(\mathbb{A}', V', +')$ due spazi affini ed $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ un'applicazione affine. Si verifichi che f rispetta le combinazioni baricentriche, ovvero, dati i punti $P_0, \dots, P_r$, ed $X = c_0P_0 + c_1P_1 + \cdots + c_rP_r$,con $c_0 + c_1 + \cdots + c_r = 1$, si verifichi che $f(X) = c_0f(P_0) + c_1f(P_1) + \cdots + c_rf(P_r)$. □

Esercizio 4.12. Siano $(\mathbb{A}, V, +)$ ed $(\mathbb{A}', V', +')$ due spazi affini e $P_0, \dots, P_n$ un riferimento su $\mathbb{A}$. Si mostri che, presi comunque $n+1$ punti, $Q_0, \dots, Q_n$, in $\mathbb{A}'$, esiste un'unica applicazione affine $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ tale che $f(P_i) = Q_i$, per $i = 0, \dots, n$. Se $X = c_0P_0 + \cdots + c_nP_n$,con $c_0 + \cdots + c_n = 1$, si mostri che $f(X) = c_0Q_0 + \cdots + c_nQ_n$. □

*Esercizio 4.13. Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ un piano affine sul corpo C.

(a) Si mostri che tre punti P, Q, R di $\mathbb{A}$ sono allineati se, e solo se, esiste un'applicazione affine e suriettiva, $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}^1(C)$, tale che $f(P) = f(Q) = f(R)$.

(b) Sia fissato un riferimento, P_0, P_1, P_2, su $\mathbb{A}$ e siano (p_0, p_1, p_2), (q_0, q_1, q_2), (r_0, r_1, r_2), le coordinate baricentriche dei punti P, Q, R nel riferimento dato. Si mostri che P, Q, R sono allineati se, e solo se, esistono delle costanti a_0, a_1, a_2, non tutte uguali tra loro, tali che $a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 = a_0q_0 + a_1q_1 + a_2q_2 = a_0r_0 + a_1r_1 + a_2r_2 = 0$. Le costanti a_0, a_1, a_2 sono determinate a meno di un fattore di proporzionalità.

(c) Siano r ed s due rette di $\mathbb{A}$ determinate ripettivamente dalle costanti a_0, a_1, a_2 e b_0, b_1, b_2. Si mostri che r ed s sono parallele se, e solo se, esistono due costanti, c e $d \neq 0$, tali che $db_0 = a_0 - c$, $db_1 = a_1 - c$, $db_2 = a_2 - c$.

(d) Date tre rette distinte di $\mathbb{A}$, determinate ripettivamente dalle costanti (a_0, a_1, a_2), (b_0, b_1, b_2) e (c_0, c_1, c_2), si mostri che le tre rette concorrono ad uno stesso punto oppure sono parallele se, e solo se, la matrice

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2. □

4.9 I Teoremi di Ceva e Menelao. Vogliamo concludere le osservazioni generali sullo spazio affine ricordando due celebri teoremi sulla geometria dei triangoli, il primo attribuito al matematico alessandrino Menelao (70-140 dC) e l'altro al matematico italiano Giovanni Ceva (1647–1734). Li riportiamo qui anche se nella loro dimostrazione useremo la nozione di determinante che sarà introdotta in un capitolo successivo, data la stretta relazione con gli argomenti sin qui svolti.

Iniziamo introducendo alcune notazioni. Dati due punti distinti P_0 e P_1 dello spazio affine, sia $X = \lambda P_0 + (1-\lambda)P_1$ un punto della retta $P_0 \vee P_1$, distinto dai precedenti. Osserviamo che si ha

$$X - P_1 = \lambda(P_0 - P_1), \quad X - P_0 = (1-\lambda)(P_1 - P_0) = (\lambda - 1)(P_0 - P_1), \quad \text{e quindi } X - P_0 = \frac{\lambda - 1}{\lambda} X - P_1.$$

Con un abuso di linguaggio scriveremo $\frac{X-P_0}{X-P_1} = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ per indicare il rapporto tra i due vettori paralleli. Possiamo quindi enunciare il seguente

4.10 Teorema. *Siano dati tre punti non allineati, P_0, P_1, P_2, del piano affine $(\mathbb{A}, V, +)$ sul corpo C e si prendano tre punti $Q_0 \in P_1 \vee P_2$, $Q_1 \in P_0 \vee P_2$, $Q_2 \in P_1 \vee P_0$, nessuno dei quali coincida con P_0, P_1, P_2.*

(a) [Teorema di Menelao] *I tre punti Q_0, Q_1, Q_2 sono allineati se, e solo se,*

$$\frac{Q_0 - P_1}{Q_0 - P_2} \cdot \frac{Q_1 - P_2}{Q_1 - P_0} \cdot \frac{Q_2 - P_0}{Q_2 - P_1} = 1.$$

(b) [Teorema di Ceva] *Le tre rette $P_0 \vee Q_0$, $P_1 \vee Q_1$, $P_2 \vee Q_2$ concorrono ad uno stesso punto oppure sono parallele se, e solo se,*

$$\frac{Q_0 - P_1}{Q_0 - P_2} \cdot \frac{Q_1 - P_2}{Q_1 - P_0} \cdot \frac{Q_2 - P_0}{Q_2 - P_1} = -1.$$

dim. I punti P_0, P_1, P_2, sono un riferimento nel piano affine e quindi possiamo usare le coordinate baricentriche riferite a questi tre punti. Si ha quindi

$$Q_0 = \lambda P_1 + (1-\lambda)P_2, \quad Q_1 = \mu P_2 + (1-\mu)P_0, \quad Q_2 = \nu P_0 + (1-\nu)P_1$$

per opportune costanti $\lambda, \mu, \nu \notin \{0, 1\}$. (a). Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1-\mu & \nu \\ \lambda & 0 & 1-\nu \\ 1-\lambda & \mu & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice che ha come colonne le coordinate baricentriche dei tre punti. Se i tre punti sono allineati, esistono delle costanti non nulle a_0, a_1, a_2 tali che $(a_0, a_1, a_2)A = (0, 0, 0)$ (cf. `Esercizio II.4.13`). Dunque la matrice A ha rango 2 ed il suo determinante si annulla. Dall'osservazione che $\det A = (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) + \lambda\mu\nu = 0$ si ottiene il rapporto $\frac{(\lambda-1)(\mu-1)(\nu-1)}{\lambda\mu\nu} = 1$ che è quanto volevamo.

(*b*). Il punto P_0 ha coordinate baricentriche $1P_0 + 0P_1 + 0P_2$ e quindi, nelle notazioni dell'`Esercizio II.4.13`, la retta $P_0 \vee Q_0$ è determinata dalle costanti $(0, \lambda - 1, \lambda)$. Analogamente le rette $P_1 \vee Q_1$ e $P_2 \vee Q_2$ sono determinate dalle costanti $(\mu, 0, \mu - 1)$ e $(\nu - 1, \nu, 0)$ rispettivamente. Dunque, sempre per l'esercizio citato, le tre rette concorrono ad uno stesso punto oppure sono parallele se, e solo se,

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \lambda - 1 & \lambda \\ \mu & 0 & \mu - 1 \\ \nu - 1 & \nu & 0 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\mu - 1)(\nu - 1) + \lambda\mu\nu = 0$$

Ovvero $\frac{(\lambda-1)(\mu-1)(\nu-1)}{\lambda\mu\nu} = -1$. **CVD** □

Osserviamo che dal Teorema di Ceva si deduce che, nel piano affine reale, le tre mediane di un triangolo concorrono ad uno stesso punto (il baricentro) e quindi che questa proprietà è legata alla struttura affine dello spazio e non dipende dalla metrica.

Ci fermiamo qui, senza addentrarci nello studio della Geometria affine del piano. Lasciamo al lettore più attento il compito di verificare cosa succede delle mediane o del baricentro di un triangolo nel caso di un piano affine su un corpo C di caratteristica 2 o 3.

Nel caso in cui il corpo C è il corpo $\mathbb{R}$ dei numeri reali (o, comunque, è un corpo ordinato), dati due punti distinti P_0, P_1 (quindi in posizione generale) possiamo considerare il *segmento* di estremi PQ, ovvero l'insieme

$$S_{PQ} = \{\, c_0P_0 + c_1P_1 \mid c_0, c_1 \in [0,1], c_0 + c_1 = 1 \,\} = \{\, P_0 + c(P_1 - P_0) \mid c \in [0,1] \,\}.$$

Più in generale, dati $r+1$ punti in posizione generale, $P_0, \dots, P_r$, si definisce il *simplesso* di vertici $P_0, \dots, P_r$, ovvero l'insieme

$$\Delta(P_0, \dots, P_r) = \{\, c_0P_0 + \cdots + c_rP_r \mid c_0, \dots, c_r \in [0,1], c_0 + \cdots + c_r = 1 \,\}.$$

La j-esima faccia del simplesso $\Delta(P_0, \dots, P_r)$ è il sottoinsieme

$$F_j = \{\, c_0P_0 + \cdots + c_rP_r \in \Delta(P_0, \dots, P_r) \mid c_j = 0 \,\}.$$

Si tratta ancora di un simplesso (di dimensione $r-1$) che ha come vertici tutti i vertici di Δ, eccetto P_j.

Esercizio 4.14. Dati i tre punti

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

del piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ si disegni il simplesso $\Delta(P_0, P_1, P_2)$, giustificando il disegno. □

Esercizio 4.15. Dati $r+1$ punti in posizione generale, $P_0, \dots, P_r$, si mostri che, presi due punti $P, Q \in \Delta(P_0, \dots, P_r)$ tutti i punti del segmento di estremi PQ sono contenuti in $\Delta(P_0, \dots, P_r)$[(†)] □

Esercizio 4.16. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e si determini l'insieme $\mathscr{D} = \{\, B \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) \mid AB = A \,\}$. Posto $V = M_{3\times3}(\mathbb{R})$, si mostri che $\mathscr{D}$ è una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(V)$ e se ne determini la dimensione. □

Esercizio 4.17. Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$ e si considerino le basi $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di V e $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$ di W. Siano date inoltre, le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ e $\psi_{(a,b)} : V \to W$, definite dalle condizioni

$$\phi(v_1 + v_2) = w_1, \qquad \phi(v_3) = w_1 + w_2, \qquad \phi(v_1 + v_3) = 3w_2;$$
$$\psi_{(a,b)}(v_2) = 2w_1 - 2w_2, \qquad \psi_{(a,b)}(2v_1) = -2w_1 + 4w_2, \qquad \psi_{(a,b)}(3v_1 + 3v_2 + 3v_3) = aw_1 + bw_2.$$

(a) Si scriva la matrice di $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$.
(b) Si mostri che $\mathbb{L} = \left\{\, \psi_{(a,b)} \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \,\right\}$ è una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,W))$, se ne calcoli la dimensione, e si dica se $\phi \in \mathbb{L}$. □

Esercizio 4.18. Ricordiamo che si chiama *quadrato magico* ogni matrice quadrata ad elementi interi (positivi) in cui la somma degli elementi di ciascuna riga è uguale alla somma degli elementi di ciascuna colonna ed è anche uguale alla somma degli elementi posti su ciascuna delle due diagonali.

(†) Ciò significa che un simplesso è un sottoinsieme *convesso* dello spazio affine reale.

(a) Si mostri che gli unici quadrati magici di ordine 2 sono banali, ovvero hanno tutte le entrate uguali.
(b) Si determinino i quadrati magici di ordine 3. □

Esercizio 4.19. Siano V, W e Z tre spazi vettoriali sul corpo C, di dimensioni n, m e k, rispettivamente.

(a) Sia data un'applicazione lineare $\psi : W \to Z$, di rango r, e si consideri l'insieme

$$S = \{\, \phi \in \mathrm{Hom}_C(V, W) \mid \psi \circ \phi = 0 \,\}.$$

Si mostri che S è un sottospazio di $\mathrm{Hom}_C(V, W)$ e se ne calcoli la dimensione.

(b) Si supponga ora $C = \mathbb{R}$ ed $n = 3$, $m = 4$, $k = 2$, e si fissino delle basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$ degli spazi dati. Nell'ipotesi che ψ abbia matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

si scriva una base di $S \subset M_{4\times 3}(\mathbb{R})$. □

Esercizio 4.20. Si consideri l'endomorfismo $\psi : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ di matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica e si determinino le matrici, rispetto alle basi canoniche, di tutte le applicazioni lineari $\phi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ tali che $\psi \circ \phi = 0$. □

Esercizio 4.21. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -8 \\ 3 & 6 & -12 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si determini la dimensione del sottospazio

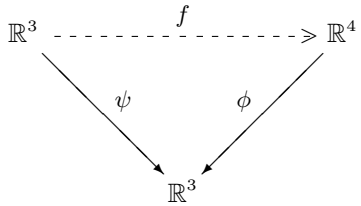
$$U = \{\, B \in M_3(\mathbb{R}) \mid ABC = \mathbf{0} \,\}$$

e si determini una base di U. □

Esercizio 4.22. Si considerino le applicazioni lineari $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le cui matrici, rispetto alle basi canoniche, sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Si dica se esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, tale che $\psi = \phi \circ f$, ovvero tale da rendere commutativo il diagramma



(b) Si scrivano le matrici rispetto alle basi canoniche di tutte le applicazioni f (se esistono) soddisfacenti alla condizione del punto (a). □

Esercizio 4.23. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Si determinino le dimensioni dei sottospazi

$$R = \{\, X \in M_3(\mathbb{R}) \mid AX = \mathbf{0} \,\} \qquad \text{ed} \qquad L = \{\, Y \in M_3(\mathbb{R}) \mid YA = \mathbf{0} \,\}$$

e si scriva una base per ciascuno di tali sottospazi. □

Esercizio 4.24. Siano date due matrici $A, B \in M_4(\mathbb{R})$ e si consideri l'insieme $L = \{\, X \in M_4(\mathbb{R}) \mid AX = B \,\}$. Si mostri che L è una sottovarietà lineare dello spazio affine $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$ e se ne calcoli la dimensione in funzione del rango della matrice A.

Si scrivano esplicitamente gli elementi di L nel caso in cui

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 4.25. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Si mostri che l'insieme $L = \{\, X \in M_n(\mathbb{R}) \mid XA = B \,\}$ è una sottovarietà lineare dello spazio affine $\mathbb{A}(M_n(\mathbb{R}))$ e se ne calcoli la dimensione, al variare di A e B.

Si scrivano esplicitamente gli elementi di L nel caso in cui $n = 4$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

III
Indipendenza lineare e determinanti

1. Un test per l'indipendenza lineare: applicazioni multilineari alternanti

Nei capitoli precedenti si è vista l'importanza degli insiemi di vettori linearmente indipendenti ed, in particolare, delle basi. In questa sezione, vogliamo descrivere un *"test"* che ci permetta di riconoscere se un insieme di vettori dati in uno spazio di dimensione finita sia una base dello spazio.

Il modello è la nozione di Volume che abbiamo incontrato nello spazio tridimensionale, ovvero il prodotto misto di tre vettori. Sappiamo che il prodotto misto $u \cdot v \times w$ misura il volume (con segno) del parallelepipedo che ha i tre vettori come spigoli; in particolare, il prodotto misto è un'applicazione lineare rispetto a ciascuno dei tre fattori e si annulla se, e solo se, la figura degenera, ovvero se i tre vettori sono linearmente dipendenti.

Le funzioni che andremo a costruire saranno quindi la generalizzazione della nozione di volume a spazi vettoriali di dimensione qualsiasi.

1.1 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo C. Un'applicazione

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r\text{-volte}} \to C$$

si dice *multilineare* (o, più precisamente, *r-lineare*) se è lineare in ciascuno dei suoi argomenti.

Si osservi che, se F è r-lineare, allora F assume il valore 0 non appena uno degli argomenti è nullo.
Se $g : V \times V \to C$ è bilineare (ovvero 2-lineare), allora si ha

$$\begin{aligned} g(\alpha_1 v_1 + \beta_1 w_1, \alpha_2 v_2 + \beta_2 w_2) &= \alpha_1 g(v_1, \alpha_2 v_2 + \beta_2 w_2) + \beta_1 g(w_1, \alpha_2 v_2 + \beta_2 w_2) = \\ &= \alpha_1\alpha_2 g(v_1, v_2) + \alpha_1\beta_2 g(v_1, w_2) + \beta_1\alpha_2 g(w_1, v_2) + \beta_1\beta_2 g(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Analogamente, se $G : V \times V \times V \to C$ è trilineare (ovvero 3-lineare), allora si ha

$$\begin{aligned} G(\alpha_1 v_1 + \beta_1 w_1, &\alpha_2 v_2 + \beta_2 w_2, \alpha_3 v_3 + \beta_3 w_3) = \\ &= \alpha_1 G(v_1, \alpha_2 v_2 + \beta_2 w_2, , \alpha_3 v_3 + \beta_3 w_3) + \beta_1 G(w_1, \alpha_2 v_2 + \beta_2 w_2, \alpha_3 v_3 + \beta_3 w_3) = \\ &= \alpha_1\alpha_2 G(v_1, v_2, \alpha_3 v_3 + \beta_3 w_3) + \alpha_1\beta_2 G(v_1, w_2, \alpha_3 v_3 + \beta_3 w_3) + \\ &\quad + \beta_1\alpha_2 G(w_1, v_2, \alpha_3 v_3 + \beta_3 w_3) + \beta_1\beta_2 G(w_1, w_2, \alpha_3 v_3 + \beta_3 w_3) = \\ &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 G(v_1, v_2, v_3) + \alpha_1\alpha_2\beta_3 G(v_1, v_2, w_3) + +\alpha_1\beta_2\alpha_3 G(v_1, w_2, v_3) + \\ &\quad + \alpha_1\beta_2\beta_3 G(v_1, w_2, w_3) + \beta_1\alpha_2\alpha_3 G(w_1, v_2, v_3) + \beta_1\alpha_2\beta_3 G(w_1, v_2, w_3) \\ &\quad + \beta_1\beta_2\alpha_3 G(w_1, w_2, v_3) + \beta_1\beta_2\beta_3 G(w_1, w_2, w_3). \end{aligned}$$

Lasciamo al lettore il compito di fare qualche analogo sviluppo e scriviamo in forma compatta delle analoghe relazioni soddisfatte da una generica applicazione r-lineare $F : V \times \cdots \times V \to C$: dati k vettori $v_1, \ldots, v_k$, si ha

$$F\left(\sum_{i_1=1}^{k} a_{i_1} v_{i_1}, \ldots, \sum_{i_r=1}^{k} a_{i_r} v_{i_r}\right) = \sum_{0 \le i_1, \ldots, i_r \le k} a_{i_1} \cdots a_{i_r} F(v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}). \tag{1.2}$$

Il lettore è caldamente invitato a scrivere esplicitamente i membri di questa formula, per qualche valore di k, nel caso in cui F sia 2- o 3- lineare.

Esercizio 1.1. Sia V uno spazio vettoriale su C e siano $\phi_1, \dots, \phi_r$ in $\mathrm{Hom}_C(V, C)$. Si verifichi che l'applicazione $(v_1, \dots, v_r) \mapsto \phi_1(v_1) \cdots \phi_r(v_r)$ è r-lineare. In particolare, si calcoli esplicitamente tale applicazione come funzione delle coordinate dei vettori coinvolti, nel caso in cui $V = \mathbb{R}^3$ e $\phi_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1 - x_2$, $\phi_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3x_1 + 2x_2 - x_3$, $\phi_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 + x_3$. □

Le funzioni importanti nella determinazione dell'indipendenza lineare sono una classe particolare di funzioni multilineari e, precisamente, le funzioni multilineari e alternanti.

1.3 Definizione. Sia S un insieme, C un corpo ed $r \geq 2$ un intero. Un'applicazione

$$F : \underbrace{S \times \cdots \times S}_{r\text{-volte}} \to C$$

si dice *alternante* se si annulla ogniqualvolta due degli argomenti vengano a coincidere.

Osserviamo che, se F è una funzione r-lineare e alternante, allora il suo valore cambia di segno ogni qualvolta si scambino tra loro due degli argomenti; infatti se, per fissare le idee, consideriamo i primi due argomenti di F, si ha

$$0 = F(v_1 + v_2, v_1 + v_2, \dots, v_r) = F(v_1, v_2, \dots, v_r) + F(v_2, v_1, \dots, v_r),$$

qualunque siano i vettori $v_1, \dots, v_r$, e ciò perchè $F(v_1, v_1, \dots, v_r) = 0 = F(v_2, v_2, \dots, v_r)$, essendo F alternante.

1.4 Proposizione. *Sia V uno spazio vettoriale sul corpo C e sia $F : V \times \cdots \times V \to C$ un'applicazione r-lineare e alternante. Allora, se $v_1, \dots, v_r$ sono vettori linearmente dipendenti, si ha $F(v_1, \dots, v_r) = 0$.*

dim. Se uno dei vettori è nullo, allora la tesi è vera perchè F è r-lineare. Supponiamo quindi che $v_1, \dots, v_r$ siano vettori non-nulli e linearmente dipendenti. Allora v_r può essere scritto come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_{r-1}$, cioè esistono delle costanti $a_1, \dots, a_{r-1} \in C$ tali che $v_r = \sum_{i=1}^{r-1} a_i v_i$. Quindi, per la linearità nell'ultimo argomento, si ha

$$F(v_1, \dots, v_r) = \sum_{i=1}^{r-1} a_i F(v_1, \dots, v_i),$$

e ciascuno degli addendi è nullo, perchè F è alternante. **CVD** □

1.5 Esempio. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ e l'applicazione

$$D : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \text{definita ponendo} \qquad D(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Si verifica con calcoli diretti che D è bilineare ed alternante. In particolare, $D(v, w) = 0$ se, e solo se, i due vettori sono proporzionali, ovvero se, e solo se, sono linearmente dipendenti. In realtà, ogni applicazione bilineare alternante di $\mathbb{R}^2$ è un multiplo di D. Sia G una tale applicazione ed indichiamo con $\{e_1, e_2\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Allora, dati i vettori $v = x_1 e_1 + x_2 e_2$ e $w = y_1 e_1 + y_2 e_2$, si ha

$$\begin{aligned} G(v, w) &= x_1 y_1 G(e_1, e_1) + x_1 y_2 G(e_1, e_2) + x_2 y_1 G(e_2, e_1) + x_2 y_2 G(e_2, e_2) = \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) G(e_1, e_2), \end{aligned}$$

perchè G è bilineare ed alternante. Ciò significa esattamente che $G(v,w) = \beta D(v,w)$, ove $\beta = G(e_1, e_2)$. In particolare, possiamo concludere che, se un'applicazione bilineare alternante si annulla su una base di $\mathbb{R}^2$, allora si annulla su ogni coppia di vettori di $\mathbb{R}^2$ (cioè è l'applicazione nulla).

Esercizio 1.2. Sia V uno spazio vettoriale su C e siano ϕ, ψ in $\mathrm{Hom}_C(V, C)$. Si verifichi che l'applicazione $(v,w) \mapsto \phi(v)\psi(w) - \psi(v)\phi(w)$ è bilineare e alternante. In particolare, si calcoli esplicitamente tale applicazione come funzione delle coordinate dei vettori coinvolti, nel caso in cui $V = \mathbb{R}^3$ e $\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1 - x_2$, $\psi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3x_1 + 2x_2 - x_3$. □

Esercizio 1.3. Sia $D : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un'applicazione trilineare alternante ed indichiamo con $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Dati i vettori $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $w = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$, $z = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$, si scriva esplicitamente $D(v,w,z)$ come funzione delle coordinate dei vettori e del valore $D(e_1, e_2, e_3)$.

(b) Nelle notazioni precedenti, si consideri l'applicazione $(v,w) \mapsto D(e_1, v, w)$. Indicata con $\pi : \mathbb{R}^3 \to \langle e_2, e_3 \rangle$, la proiezione parallela al vettore e_1, si mostri che $D(e_1, v, w) = D(e_1, \pi(v), \pi(w))$. Si mostri infine che la restrizione di tale applicazione ad ogni sottospazio complementare di $\langle e_1 \rangle$ è diversa dall'applicazione nulla.

(c) Nelle notazioni precedenti, si mostri che due vettori v, w di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti se, e solo se, $D(e_1, v, w) = D(e_2, v, w) = D(e_3, v, w) = 0$. □

Siamo quindi in grado di dimostrare il risultato fondamentale di questa sezione.

1.6 Proposizione. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo C e sia D un'applicazione n-lineare alternante non-nulla su V. Allora i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti se, e solo se, $D(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.*

dim. Abbiamo già visto che se n vettori $x_1, \ldots, x_n$ sono linearmente dipendenti allora, per ogni $G \in A^n(V)$, deve aversi $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$ (cf. *Proposizione III.1.4*). Quindi la condizione $D(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$ è sufficiente per verificare l'indipendenza di $v_1, \ldots, v_n$.

Per quanto riguarda l'implicazione inversa, si può ragionare così. Poichè D è un'applicazione n-lineare alternante non-nulla su V, esiste una n-upla $y_1, \ldots, y_n$ di vettori tale che $D(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$. D'altro canto se i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, allora sono una base ($\dim_C V = n$) e quindi esistono delle costanti c_{ij}, tali che $y_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} v_i$, per $j = 1, \ldots, n$. Poichè D è n-lineare ed alternante, esiste una costante δ, tale che $D(y_1, \ldots, y_n) = \delta D(v_1, \ldots, v_n)$; poichè il primo membro dell'uguaglianza è diverso da zero, ne consegue $D(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$. **CVD** □

Servendosi del fatto che D è un'applicazione multilineare ed alternante si può calcolare esplicitamente la costante δ che compare nella dimostrazione precedente. Siano quindi dati una base $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ed n vettori $y_1, \ldots, y_n$ e delle costanti c_{ij}, tali che $y_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} v_i$, per $j = 1, \ldots, n$. Allora, in base a (III.1.2), si ha

$$D(y_1, \ldots, y_n) = D\left(\sum_{i_1=1}^{n} c_{i_1,1} v_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} c_{i_n,n} v_{i_n} \right) = \sum_{0 \leq i_1, \ldots, i_n \leq n} c_{i_1,1} \cdots c_{i_n,n}\, D(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n});$$

inoltre, poichè D è alternante, se gli indici $i_1, \ldots, i_n$ non sono a due a due distinti, l'addendo corrispondente è nullo. Dunque i possibili addendi non nulli della somma sono in corrispondenza con le applicazioni biiettive dell'insieme $\{1, \ldots, n\}$ in sé, ovvero con l'insieme Σ_n delle *permutazioni* su n oggetti. Infine, osserviamo che, per una data permutazione $\sigma \in \Sigma_n$, si ha

$$D(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = (\mathrm{sgn}\, \sigma) D(v_1, \ldots, v_n),$$

ove $\operatorname{sgn}\sigma$ è uguale a ± 1 a seconda del numero di scambi necessario per riordinare gli argomenti della funzione D. Possiamo quindi concludere che

$$D(y_1,\dots,y_n)=\left[\sum_{\sigma\in\Sigma_n}(\operatorname{sgn}\sigma)\,c_{\sigma(1),1}\cdots c_{\sigma(n),n}\right]D(v_1,\dots,v_n). \tag{1.7}$$

Quest'ultima può quindi essere considerata una formula esplicita per la funzione D, in termini del valore $D(v_1,\dots,v_n)$ su di una base di V e delle coordinate dei vettori ad argomento.

1.8 Esistenza di applicazioni n-lineari alternanti. [*Regola di Laplace*] La formula (III.1.7) è una descrizione esplicita di un'applicazione n-lineare alternante come funzione delle coordinate rispetto ad una base data. È possibile dare un'altra dimostrazione dell'esistenza di un'applicazione n-lineare alternante come funzione delle coordinate, facendo induzione sulla dimensione n dello spazio.

Siano fissati uno spazio vettoriale V di dimensione n sul corpo C ed una base $\mathcal{V}=\{v_1,\dots,v_n\}$ e quindi, per semplificare le notazioni, supporremo di lavorare nello spazio C^n con la base canonica.

- Se $n=1$, allora, c'è un'unica applicazione lineare (alternante) che valga 1 sulla base fissata ed è quella che associa ad ogni vettore $(x)\in C^1$ la sua coordinata x rispetto alla base canonica.
- Se $n=2$, abbiamo visto che l'unica applicazione bilineare alternante $D: C^2\times C^2\to C$, per cui $D(e_1,e_2)=1$, è data da $D\left(\binom{a}{c},\binom{b}{d}\right)=ad-bc$, ovvero, con una notazione più tradizionale $\left|\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right|=ad-bc$.

Supponiamo quindi di aver dimostrato che, per ogni intero k, minore di n, esiste un'unica applicazione k-lineare alternante D su C^k, che valga 1 sulla base canonica, e scriviamo seguendo le notazioni tradizionali

$$D\left(\begin{pmatrix}x_{11}\\ \vdots\\ x_{k1}\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}x_{1k}\\ \vdots\\ x_{kk}\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}x_{11}&\cdots&x_{1k}\\ \vdots&&\vdots\\ x_{k1}&\cdots&x_{kk}\end{vmatrix}.$$

Siano dati n vettori di C^n, $\begin{pmatrix}x_{11}\\ \vdots\\ x_{n1}\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}x_{1n}\\ \vdots\\ x_{nn}\end{pmatrix}$ ed indichiamo con

$$A_{1j}=\begin{vmatrix}x_{21}&\cdots&x_{2,j-1}&x_{2,j+1}&\cdots&x_{2n}\\ \vdots&&&&&\vdots\\ x_{n1}&\cdots&x_{n,j-1}&x_{n,j+1}&\cdots&x_{nn}\end{vmatrix},\qquad\text{per } j=1,\dots,n,$$

il valore dell'unica applicazione $(n-1)$-lineare alternante su C^{n-1}, che valga 1 sulla base canonica, calcolata sui vettori che si ottengono trascurando il j-esimo tra i vettori dati e cancellando la prima componente dei vettori rimanenti.

Vogliamo quindi mostrare che

$$\begin{vmatrix}x_{11}&\dots&x_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ x_{n1}&\dots&x_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}x_{1j}A_{1j}\qquad[\textit{Regola di Laplace}]. \tag{1.9}$$

Si tratta di verificare che questa formula definisce una funzione n-lineare ed alternante delle colonne, che valga 1 quando le colonne sono le coordinate dei vettori della base canonica, nel loro ordine naturale.

Si ha

$$\begin{vmatrix}x_{11}&\dots&x_{1i}+y_{1i}&\dots&x_{1n}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ x_{n1}&\dots&x_{ni}+y_{ni}&\dots&x_{nn}\end{vmatrix}=x_{11}\begin{vmatrix}x_{22}&\cdots&x_{2i}+y_{2i}&\cdots&x_{2n}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ x_{n2}&\cdots&x_{ni}+y_{ni}&\cdots&x_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+$$

$$+(-1)^{i+1}(x_{1i}+y_{1i})\begin{vmatrix}x_{21}&\cdots&x_{2,i-1}&x_{2,i+1}&\cdots&x_{2n}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ x_{n1}&\cdots&x_{n,i-1}&x_{n,i+1}&\cdots&x_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{n+1}x_{1n}\begin{vmatrix}x_{21}&\cdots&x_{2i}+y_{2i}&\cdots&x_{2,n-1}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ x_{n1}&\cdots&x_{ni}+y_{ni}&\cdots&x_{n,n-1}\end{vmatrix};$$

e ricordando che, in base all'ipotesi induttiva, gli addendi che compaiono a destra del segno di uguale sono funzioni multilineari delle colonne, si ha

$$\begin{vmatrix} x_{22} & \dots & x_{2i}+y_{2i} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n2} & \dots & x_{ni}+y_{ni} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{22} & \dots & x_{2i} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n2} & \dots & x_{ni} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{22} & \dots & y_{2i} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n2} & \dots & y_{ni} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$
$$\begin{vmatrix} x_{21} & \dots & x_{2i}+y_{2i} & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{ni}+y_{ni} & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{21} & \dots & x_{2i} & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{ni} & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{21} & \dots & y_{2i} & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & y_{ni} & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix};$$

da cui si deduce che

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1i}+y_{1i} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{ni}+y_{ni} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1i} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{ni} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & y_{1i} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & y_{ni} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

Analogamente, si ha che

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & \alpha x_{1i} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & \alpha x_{ni} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = x_{11} \begin{vmatrix} x_{22} & \dots & \alpha x_{2i} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n2} & \dots & \alpha x_{ni} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \dots +$$
$$+ (-1)^{i+1} \alpha x_{1i} \begin{vmatrix} x_{21} & \dots & x_{2,i-1} & x_{2,i+1} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{n,i-1} & x_{n,i+1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1} x_{1n} \begin{vmatrix} x_{21} & \dots & \alpha x_{2i} & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & \alpha x_{ni} & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix};$$

e ricordando che, in base all'ipotesi induttiva, gli addendi che compaiono a destra del segno di uguale sono funzioni multilineari delle colonne, si ha

$$\begin{vmatrix} x_{22} & \dots & \alpha x_{2i} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n2} & \dots & \alpha x_{ni} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} x_{22} & \dots & x_{2i} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n2} & \dots & x_{ni} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \dots, \qquad \begin{vmatrix} x_{21} & \dots & \alpha x_{2i} & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & \alpha x_{ni} & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} x_{21} & \dots & x_{2i} & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{ni} & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix};$$

da cui si deduce che

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & \alpha x_{1i} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & \alpha x_{ni} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1i} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{ni} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dunque si tratta di una funzione multilineare delle colonne.

Sia $i < j$ e supponiamo infine che la i-esima e la j-esima colonna siano entrambe uguali ad $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, ed osserviamo che si ha

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & y_1 & \dots & y_1 & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ x_{n1} & \dots & y_n & \dots & y_n & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = x_{11} \begin{vmatrix} x_{22} & \dots & y_2 & \dots & y_2 & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ x_{n2} & \dots & y_n & \dots & y_n & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{i+1} y_1 \begin{vmatrix} x_{21} & \dots & x_{2,i-1} & x_{2,i+1} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{n,i-1} & x_{n,i+1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} +$$
$$+ \dots + (-1)^{j+1} y_1 \begin{vmatrix} x_{21} & \dots & x_{2,j-1} & x_{2,j+1} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{n,j-1} & x_{n,j+1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1} x_{1n} \begin{vmatrix} x_{21} & \dots & y_2 & \dots & y_2 & \dots & x_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ x_{n1} & \dots & y_n & \dots & y_n & \dots & x_{n,n-1} \end{vmatrix};$$

e ricordando che, in base all'ipotesi induttiva, gli addendi che compaiono a destra del segno di uguale sono funzioni multilineari alternanti delle colonne, si ha che tutti gli addendi sono certamente nulli, ad eccezione di

$$(-1)^{i+1} y_1 \begin{vmatrix} x_{21} & \dots & x_{2,i-1} & x_{2,i+1} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{n,i-1} & x_{n,i+1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \qquad \text{e} \qquad (-1)^{j+1} y_1 \begin{vmatrix} x_{21} & \dots & x_{2,j-1} & x_{2,j+1} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{n,j-1} & x_{n,j+1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

D'altra parte le due funzioni qui scritte hanno gli stessi argomenti, ad eccezione dell'ordine, perchè la $j-1$-esima colonna della prima, si trova al posto i della seconda e le colonne tra queste sono spostate di conseguenza. Quindi, sempre per l'ipotesi induttiva, si ha

$$\begin{vmatrix} x_{21} & \cdots & x_{2,i-1} & x_{2,i+1} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{n,i-1} & x_{n,i+1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-i-1} \begin{vmatrix} x_{21} & \cdots & x_{2,j-1} & x_{2,j+1} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{n,j-1} & x_{n,j+1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

e quindi, anche gli ultimi due addendi si elidono a vicenda; ed abbiamo così verificato che si tratta di una funzione multilineare alternante delle colonne.

Infine, è immediato dedurre dall'ipotesi induttiva che

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

e ciò conclude la verifica della Regola di Laplace.

Vi è un'importante conseguenza della formula (III.1.7).

1.10 Proposizione. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo C, allora le applicazioni n-lineari alternanti formano uno spazio vettoriale di dimensione* 1 *su C.*

dim. È facile verificare a partire dalle definizioni che la somma di due applicazioni n-lineari è ancora tale e che lo stesso vale per le applicazioni alternanti. Inoltre, moltiplicando un'applicazione multilineare alternante, si ottiene ancora una tale applicazione. Ciò significa precisamente che le applicazioni n-lineari alternanti formano uno spazio vettoriale su C. Per calcolarne la dimensione, possiamo osservare che, in base alla formula (III.1.7), date due applicazioni n-lineari alternanti D e G, con $D \neq 0$, e fissata una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, si ha

$$G(y_1, \dots, y_n) = \frac{G(v_1, \dots, v_n)}{D(v_1, \dots, v_n)}\, D(y_1, \dots, y_n),$$

qualunque siano gli n vettori $y_1, \dots, y_n$. Dunque, si conclude che G è un multiplo di D, ovvero che D è una base dello spazio vettoriale delle applicazioni n-lineari alternanti. **CVD** □

Esercizio 1.4. Sia Σ_n l'insieme delle permutazioni su n oggetti, ovvero l'insieme delle applicazioni biiettive $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$. Si mostri che $\#\Sigma_n = n!$. □

Esercizio 1.5. Siano $r \leq n$ due numeri interi positivi e si consideri l'insieme $\mathscr{I}_{r,n}$ delle applicazioni strettamente crescenti di $\{1, \dots, r\}$ in $\{1, \dots, n\}$.

(a) Dato un sottoinsieme $U \subset \{1, \dots, n\}$ con $\#(U) = r$, si mostri che esiste un'unica applicazione $I \in \mathscr{I}_{r,n}$ la cui immagine è uguale ad U.

(b) Si mostri che $\#(\mathscr{I}_{r,n}) = \binom{n}{r}$. □

Esercizio 1.6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo C. Per ogni intero r, con $2 \leq r \leq n$, si indichi con $A^r(V)$ l'insieme delle applicazioni r-lineari alternanti su V.

(a) Si verifichi che $A^r(V)$ è uno spazio vettoriale su C.

(b) Siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V ed $F \in A^r(V)$. Si mostri che, dati i vettori $y_1, \dots, y_r$, con $y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$, per $j = 1, \dots, r$, si ha

$$F(y_1, \dots, y_r) = \sum_{I \in \mathscr{I}_{r,n}} \left[\sum_{\sigma \in \Sigma_r} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{I(\sigma(1)),1} \cdots a_{I(\sigma(r)),r} \right] F(v_{I(1)}, \dots, v_{I(r)}).$$

□

Esercizio 1.7. Si deduca dai due esercizi precedenti che, se $\dim_C V = n$, allora $\dim_C A^r(V) = \binom{n}{r}$, per $2 \leq r \leq n$(*). In particolare si mostri che, data una base $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V, si costruisce una base di $A^r(V)$, prendendo le funzioni D_I, al variare di $I \in \mathscr{I}_{r,n}$, definite nel modo seguente: fissato I, si pone $D_I(v_{J(1)}, \ldots, v_{J(r)}) = \delta_{IJ}$, al variare di $J \in \mathscr{I}_{r,n}$.

Si mostri infine che si ha

$$F = \sum_{I \in \mathscr{I}_{r,n}} F(v_{I(1)}, \ldots, v_{I(r)})\, D_I$$

per ogni $F \in A^r(V)$, □

2. Determinanti e Minori

2.1 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo C e sia D un'applicazione n-lineare alternante non-nulla su V. Dato un endomorfismo $\phi : V \to V$, si pone

$$\det \phi := \frac{D(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n))}{D(v_1, \ldots, v_n)}, \tag{2.2}$$

ove $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V.

Affinchè la definizione sia ben posta, è necessario verificare che il valore di $\det \phi$ non dipende né dalla scelta dell'applicazione n-lineare e alternante D, né dalla scelta della base $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Per quanto riguarda la scelta di D, si osservi che, in base a (III.1.10), ogni altra applicazione n-lineare alternante è del tipo αD, per qualche costante $\alpha \in C^\times$, e poiché nella definizione del determinante la forma alternante compare sia al numeratore che al denominatore, il contributo di α non modifica il valore della frazione. Per quanto riguarda poi la scelta della base di V, si osservi che l'applicazione $D^\phi : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto D(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n))$ è n-lineare ed alternante su V, e quindi, sempre per (III.1.10), $D^\phi = cD$ per qualche costante $c \in C$. Questa costante è proprio il valore del determinante di ϕ, che perciò non dipende dalla base scelta per calcolarlo.

Possiamo sintetizzare le proprietà fondamentali del determinante nella seguente

2.3 Proposizione. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo C. Valgono le seguenti asserzioni:*

(i) un omomorfismo $\phi : V \to V$ è invertibile se, e solo se, $\det \phi \neq 0$;
(ii) dati due endomorfismi $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_C(V, V)$, si ha

$$\det(\psi \circ \phi) = (\det \psi)(\det \phi). \qquad [\textit{Teorema di Binet}]$$

dim. (i) Un omomorfismo ϕ è invertibile se, e solo se, l'immagine di una base è una base (cf. `Esercizio II.2.3`). Data una base $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V, i vettori $\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)$ sono une base se, e solo se, sono linearmente indipendenti. Fissata comunque un'applicazione n-lineare alternante non-nulla D, ciò accade se, e solo se, $D(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)) \neq 0$ (cf. *Proposizione III.1.6*), che è quanto volevamo.

(ii) Siano fissate un'applicazione n-lineare alternante $D \neq 0$ ed una base $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Se i vettori $\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)$ sono linearmente dipendenti, allora anche i vettori $\psi(\phi(v_1)), \ldots, \psi(\phi(v_n))$ lo sono e quindi

(*) Si osservi che, per $r > n$, si ha necessariamente $A^r(V) = \{0\}$. Si definiscono infine $A^0(V) = C$ ed $A^1(V) = \mathrm{Hom}_C(V, C)$ e quindi la formula sulla dimensione è vera per $0 \leq r \leq n$.

si ha $\det\phi = 0 = \det(\psi\circ\phi)$ (cf. *Proposizione III.1.4*); e quindi vale la formula dell'enunciato. Se, invece, i vettori $\phi(v_1),\dots,\phi(v_n)$ sono linearmente indipendenti e quindi sono una base di V, allora si ha

$$\det(\psi\circ\phi) = \frac{D(\psi(\phi(v_1)),\dots,\psi(\phi(v_n)))}{D(v_1,\dots,v_n)} = \\ = \frac{D(\psi(\phi(v_1)),\dots,\psi(\phi(v_n)))}{D(\phi(v_1),\dots,\phi(v_n))}\ \frac{D(\phi(v_1),\dots,\phi(v_n))}{D(v_1,\dots,v_n)} = (\det\psi)(\det\phi);$$

ove l'ultima uguaglianza discende dal fatto che il valore del determinante non dipende dalla base usata per calcolarlo. **CVD** □

2.4 Esempio. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e $\mathcal{V} = \{v_1,\dots,v_3\}$ una sua base. Consideriamo l'omomorfismo $\phi : V \to V$ che, rispetto alla base data, ha matrice

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sia D un'applicazione trilineare alternante non-nulla e calcoliamo

$$\det\phi = \frac{D(\phi(v_1),\phi(v_2),\phi(v_3))}{D(v_1,v_2,v_3)}.$$

Poichè D è multilineare ed alternante, il numeratore della frazione è uguale a

$$\begin{aligned} D(2v_1 - v_2 + v_3, 3v_2 - 2v_3, v_1 + 2v_3) &= \\ &= 2D(v_1, 3v_2 - 2v_3, v_1 + 2v_3) - D(v_2, 3v_2 - 2v_3, v_1 + 2v_3) + D(v_3, 3v_2 - 2v_3, v_1 + 2v_3) \\ &= 6D(v_1, v_2, v_1 + 2v_3) - 4D(v_1, v_3, v_1 + 2v_3) + 2D(v_2, v_3, v_1 + 2v_3) + 3D(v_3, v_2, v_1 + 2v_3) \\ &= 12D(v_1, v_2, v_3) + 2D(v_2, v_3, v_1) + 3D(v_3, v_2, v_1) \\ &= 11D(v_1, v_2, v_3), \end{aligned}$$

e quindi $\det\phi = 11$.

Introduciamo ora la definizione di *determinante di una matrice*.

2.5 Definizione. Sia A una matrice quadrata ad elementi nel corpo C. Si definisce il *determinante* di A il determinante dell'endomorfismo $\phi : C^n \to C^n$ che ha matrice A rispetto alla base canonica.

In particolare, dalla *Proposizione III.2.3*, discende che

- Una matrice $A \in M_n(C)$ è invertibile se, e solo se, $\det A \neq 0$.
- Date $A, B \in M_n(C)$, si ha $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

2.6 Esempi. (*a*). Sia C un corpo e consideriamo la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \in M_2(C)$. Indicando con $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ la base canonica di C^2, possiamo considerare l'unico endomorfismo $\phi : C^2 \to C^2$ tale che $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$. Se D è un'applicazione bilineare ed alternante (non nulla) su C^2, allora si ha

$$D(\phi(e_1),\phi(e_2)) = D(a_{11}e_1 + a_{21}e_2,\ a_{12}e_1 + a_{22}e_2) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})D(e_1,e_2),$$

e quindi possiamo scrivere $\det\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

(*b*). Analogamente al punto precedente, sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(C)$. Indicando con $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di C^3, possiamo considerare l'unico endomorfismo $\phi : C^3 \to C^3$ tale che $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$. Se D è un'applicazione bilineare ed alternante (non nulla) su C^3, allora si ha

$$\begin{aligned} D(\phi(e_1),\phi(e_2),\phi(e_3)) &= D(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3,\ a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3,\ a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3) = \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13})D(e_1,e_2,e_3), \end{aligned}$$

e quindi possiamo scrivere

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

Le formule scritte sopra si possono generalizzare a matrici quadrate di ordine qualunque. Nell'osservazione qui sotto diamo qualche approfondimento su una notazione utile per scrivere una formula generale per il determinante di una matrice di ordine n.

2.7 Osservazione. [*Segnatura di una permutazione*] Ricordiamo che si chiamano *permutazioni* su n oggetti tutte le applicazioni biiettive $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$, ovvero tutti i modi di riordinare gli n elementi distinti di un insieme. Indichiamo con Σ_n l'insieme di tutte le permutazioni su n oggetti e ricordiamo che tale insieme è un gruppo rispetto all'operazione di composizione delle applicazioni.

Fissato uno spazio vettoriale V, di dimensione n sul corpo C, ed una sua base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ (ad esempio lo spazio C^n con la base canonica), ad ogni permutazione $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ possiamo associare un'applicazione lineare $\phi_\sigma : V \to V$, definita da $\phi_\sigma(v_i) = v_{\sigma(i)}$, per $i = 1, \dots, n$ e quindi una matrice $B_\sigma = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi_\sigma)$. Si possono dedurre direttamente dalla definizione le seguenti proprietà

$$\phi_\tau \circ \phi_\sigma = \phi_{\tau\circ\sigma}, \qquad \phi_{\sigma^{-1}} = \phi_\sigma^{-1}, \qquad \phi_1 = 1_V,$$

e quindi le analoghe proprietà per le matrici, ovvero

$$B_\tau B_\sigma = B_{\tau\circ\sigma}, \qquad B_{\sigma^{-1}} = B_\sigma^{-1}, \qquad B_1 = \mathbf{1}_n.$$

Ciò significa che abbiamo definito una *rappresentazione lineare* del gruppo delle permutazioni su n oggetti, ovvero un isomorfismo tra tale gruppo ed un sottogruppo di $\mathrm{GL}_n(C)$ (o di $GL(V)$, se si preferisce). Quando non vi sia rischio di confusione, useremo sempre lo stesso simbolo Σ_n per denotare uno qualsiasi di questi gruppi.

Possiamo quindi definire un'applicazione $\operatorname{sgn} : \Sigma_n \to \{\pm 1\}$, ponendo $\operatorname{sgn}\sigma := \det\phi_\sigma$ ed osservare che dal Teorema di Binet si deduce $\operatorname{sgn}(\tau\circ\sigma) = (\operatorname{sgn}\tau)(\operatorname{sgn}\sigma)$ e quindi che $\operatorname{sgn} : \Sigma_n \to \{\pm 1\}$ è un omomorfismo di gruppi. In particolare, fissata la consueta applicazione n-lineare alternante $D \neq 0$ su V, si ha

$$\operatorname{sgn}\sigma = \frac{D(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})}{D(v_1, \dots, v_n)} = (-1)^s,$$

ove s è un numero di scambi necessario a riordinare l'argomento del numeratore(†).

Gazie alla notazione introdotta sulle permutazioni, possiamo scrivere una formula per il determinante che generalizza i calcoli fatti nel caso di matrici di ordine 2 e 3. Sia $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_n(C)$, allora

$$\det A = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{\sigma(1)\,1} \cdots a_{\sigma(n)\,n}. \tag{2.8}$$

La formula si verifica formalizzando i calcoli svolti negli esempi detti. Indicando con $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di C^n, possiamo considerare l'unico endomorfismo $\phi : C^n \to C^n$ tale che $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$. Se D è un'applicazione bilineare ed alternante (non nulla) su C^n, allora si ha

$$D(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)) = D\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1\,1}e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n\,n}e_{i_n}\right) = \sum_{1\le i_1,\dots,i_n\le n} a_{i_1\,1}\cdots a_{i_n\,n}\, D(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}).$$

(†) Si osservi a margine che non vi è un'unica maniera di riordinare gli elementi della base, ma da quanto osservato discende che il fatto che sia necessario un numero pari o dispari di scambi è indipendente dalla maniera scelta per riordinare.

Ora bisogna ricordare che D è un'applicazione alternante e quindi che i fattori $D(e_{i_1},\dots,e_{i_n})$ si annullano se gli indici $i_1,\dots,i_n$ non sono a due a due distinti, ovvero se l'applicazione $1\mapsto i_1,\dots,n\mapsto i_n$ non è una permutazione dell'insieme $\{1,\dots,n\}$. Quindi, trascurando gli addendi nulli, possiamo scrivere,

$$D(\phi(e_1),\dots,\phi(e_n)) = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} a_{\sigma(1)\,1}\cdots a_{\sigma(n)\,n} D(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)});$$

ed osservando che, per ogni permutazione σ, si ha $D(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)}) = (\operatorname{sgn}\sigma)D(e_1,\dots,e_n)$, si ottiene la formula (III.2.8), che dovrebbe essere una vecchia conoscenza, essendo già comparsa in (III.1.7).

Si osservi inoltre che, qualunque sia la permutazione σ, si ha

$$a_{\sigma(1)\,1}\cdots a_{\sigma(n)\,n} = a_{1\,\sigma^{-1}(1)}\cdots a_{n\,\sigma^{-1}(n)} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$$

e quindi si ha l'uguaglianza

$$\det A = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{\sigma(1)\,1}\cdots a_{\sigma(n)\,n} = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) a_{1\,\sigma^{-1}(1)}\cdots a_{n\,\sigma^{-1}(n)} = \det {}^tA. \tag{2.9}$$

Dunque, *il determinante di una matrice coincide col determinante della sua trasposta.*

Nei paragrafi precedenti abbiamo mostrato come si possa scrivere una formula ricorsiva per calcolare le applicazioni multilineari alternanti (cf. III.1.9), ovvero lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima riga. Ora vogliamo dedurre da multilinearità ed alternanza del determinante uno sviluppo analogo rispetto alle colonne di una matrice. In tal modo otterremo sia un'altra dimostrazione che il determinante di una matrice coincide con quello della sua trasposta che una generalizzazione di tale formula ad uno sviluppo del determinante rispetto a qualsiasi riga o colonna della matrice.

2.10 Lemma. *Sia $A\in M_n(C)$ e siano fissati due indici $1\le i,j\le n$. Indicato con $\phi: C^n\to C^n$ l'endomorfismo di matrice A rispetto alla base canonica $\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_n\}$, allora*

$$\frac{D(\phi(e_1),\dots,\phi(e_{j-1}),e_i,\phi(e_{j+1}),\dots,\phi(e_n))}{D(e_1,\dots,e_n)} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$$

ove A_{ij} indica la matrice di ordine $n-1$ che si ottiene da A cancellando l'i-esima riga e la j-esima colonna.

dim. Poichè D è multilineare ed alternante, si ha

$$\begin{aligned} D(\phi(e_1),\dots,\phi(e_{j-1}),e_i,\phi(e_{j+1}),\dots,\phi(e_n)) = \\ = D(\phi(e_1)-a_{i1}e_i,\dots,\phi(e_{j-1})-a_{i\,j-1}e_i,e_i,\phi(e_{j+1})-a_{i\,j+1}e_i,\dots,\phi(e_n)-a_{in}e_i); \end{aligned}$$

ovvero possiamo sostituire tutte le entrate diverse da quella di posto j (che è uguale ad e_i) con la proiezione parallela ad e_i dei vettori $\phi(e_1),\dots,\phi(e_n)$ sul sottospazio $W_i=\langle e_1,\dots,e_{i-1},e_{i+1},\dots,e_n\rangle$. Indichiamo con $\pi: C^n\to W_i$ la proiezione parallela ad e_i, e con $\iota: W_i\to C^n$ l'immersione del sottospazio W_i in C^n che manda ordinatamente i vettori $e_1,\dots,e_{i-1},e_{i+1},\dots,e_n$ sui vettori $e_1,\dots,e_{j-1},e_{j+1},\dots,e_n$. Possiamo osservare che la matrice A_{ij} è proprio la matrice dell'applicazione composta $\pi\circ\phi\circ\iota$, rispetto alla base $\{e_1,\dots,e_{i-1},e_{i+1},\dots,e_n\}$ di W_i. A questo punto basta osservare che l'applicazione

$$(x_1,\dots,x_{n-1})\mapsto D(x_1,\dots,x_{j-1},e_i,x_j,\dots,x_{n-1})$$

è un'applicazione $(n-1)$-lineare ed alternante su W_i non-nulla (si prendano, ad esempio, i vettori della base data di W_i). Dunque, questa applicazione alternente può essere usata per calcolare il determinante della matrice A_{ij}, ovvero il determinante dell'applicazione composta $\pi\circ\phi\circ\iota$. Tale determinante viene a coincidere quindi con la frazione scritta nell'enunciato, a meno del segno, perchè cambia l'ordine nell'argomento del denominatore, avendo posto il vettore e_i al j-esimo posto. È chiaro che bastano $i+j-2$ scambi per riordinare i vettori, perchè $j-1$ scambi portano e_i al primo posto ed altri $i-1$ scambi lo riportano al suo posto naturale ed, ovviamente si ha $(-1)^{i+j}=(-1)^{i+j-2}$. Ciò conclude la discussione. **CVD** □

Possiamo quindi enunciare la formula cercata.

2.11 Proposizione. [Regola di Laplace] *Sia $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(C)$; allora, fissato comunque un indice j, con $1 \leq j \leq n$, si ha*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

ove A_{ij} indica la matrice di ordine $n-1$ che si ottiene da A cancellando l'i-esima riga e la j-esima colonna.

dim. Sia $\phi : C^n \to C^n$ l'endomorfismo di matrice A rispetto alla base canonica, $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ e sia fissata un'applicazione D n-lineare, alternante e non-nulla. Allora

$$\det A := \det \phi = \frac{D(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n))}{D(e_1, \ldots, e_n)}.$$

Se j è l'indice fissato, ricordando che $\phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ e che D è un'applicazione multilineare, si può quindi scrivere

$$D(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} D(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_{j-1}), e_i, \phi(e_{j+1}), \ldots, \phi(e_n))$$

e grazie al *Lemma III.2.10*, ciò permette di concludere la dimostrazione. **CVD** □

Lasciamo al lettore il compito di verificare come dalla Regola di Laplace si possa dedurre una formula esplicita per la matrice inversa e di dimostrare qualche facile risultato sui determinanti.

Esercizio 2.1. (a). Sia $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(C)$; fissati comunque due indici $h \neq j$, si ha

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ih} \det A_{ij} = 0.$$

(b) Se $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(C)$ è una matrice invertibile, allora la matrice inversa A^{-1} ha l'entrata di posto (i,j) uguale a $\frac{(-1)^{i+j} \det A_{ji}}{\det A}$, ove A_{ji} indica la matrice di ordine $n-1$ che si ottiene da A cancellando l'j-esima riga e la i-esima colonna. □

Esercizio 2.2. Una matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(C)$ si dice *triangolare superiore* se sono nulli tutti gli elementi posti al di sotto della digonale principale, ovvero $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

(a) Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo e $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V, allora $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ è una matrice triangolare superiore se, e solo se, per ogni $i = 1, \ldots, n$, si ha $\phi(v_i) \in \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$.

(b) Se $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ è una matrice triangolare superiore, allora il determinante di A è uguale al prodotto degli elementi posti sulla diagonale principale, ovvero $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(c) Si enunci e si dimostri un risultato analogo per le matrici *triangolari inferiori*. □

Esercizio 2.3. Si usino i risultati dell'esercizio precedente per calcolare i determinanti delle matrici elementari (cf. `Esercizio II.3.5`). □

Abbiamo visto che, in uno spazio vettoriale di dimensione n, le applicazioni n-lineari alternanti sono un test per verificare l'indipendenza lineare di n vettori. Ora vogliamo mostrare che a partire da una tale applicazione e da una base di V, si può costruire un numero finito di tests per verificare l'indipendenza lineare di un numero qualsiasi di vettori.

2.12 Proposizione. *Siano V uno spazio vettoriale su C, $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una sua base e $0 \neq D$ un'applicazione n-lineare ed alternante su V. I vettori $y_1, \ldots, y_k$ di V sono linearmente indipendenti se, e solo se, esistono $n-k$ vettori della base data, siano $v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-k}}$, tali che $D(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-k}}, y_1, \ldots, y_k) \neq 0$.*

dim. ($\Leftarrow$) In base alla *Proposizione III.1.4*, se i vettori $y_1, \ldots, y_k$ di V sono linearmente dipendenti, allora comunque si scelgano $v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-k}}$, si ha necessariamente $D(v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-k}}, y_1, \ldots, y_k) = 0$.

($\Rightarrow$) Viceversa, in base al lemma di scambio (cf. *Lemma II.1.14*), se i vettori $y_1, \dots, y_k$ di V sono linearmente indipendenti, allora possono essere sostituiti a k dei vettori della base data per ottenere ancora una base di V. Ciò significa precisamente che esistono $n-k$ vettori della base data, siano $v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-k}}$, tali da completare i vettori dati ad una base di V. Dunque, data un'applicazione n-lineare alternante $D \neq 0$, in base alla *Proposizione III.1.6*, si deve avere $D(v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-k}}, y_1, \dots, y_k) \neq 0$. **CVD** □

Vogliamo scrivere le condizioni di indipendenza lineare espresse nel risultato precedente in una forma che coinvolga esplicitamente le coordinate dei vettori $y_1, \dots, y_k$ rispetto alla base data. Sia $y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$, per $j = 1, \dots, k$ e scegliamo $n-k$ vettori della base data che, per fissare le idee supponiamo siano $v_{k+1}, \dots, v_n$.

Poichè D è un'applicazione multilineare alternante, il valore di $D(v_{k+1}, \dots, v_n, y_1, \dots, y_k)$, non cambia se si sostituiscono i vettori $y_1, \dots, y_k$ con i vettori $y'_1, \dots, y'_k \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, ove $y_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} v_i$, per $j = 1, \dots, k$. Inoltre, l'applicazione

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto D(v_{k+1}, \dots, v_n, x_1, \dots, x_k)$$

induce, per restrizione, un'applicazione k-lineare alternante sul sottospazio $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ di dimensione k. Si conclude che $D(v_{k+1}, \dots, v_n, y_1, \dots, y_k)$ è proporzionale (per una costante non nulla) al determinante della matrice $k \times k$ che si ottiene cancellando le ultime $n-k$ righe alla matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,k}}$, le cui colonne sono le coordinate dei vettori $y_1, \dots, y_k$.

Ragionando analogamente, se si considerano i vettori $v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-k}}$ in luogo di $v_{k+1}, \dots, v_n$, si ha che $D(v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-k}}, y_1, \dots, y_k)$ è proporzionale al determinante della matrice $k \times k$ che si ottiene cancellando le $n-k$ righe di indici $i_1, \dots, i_{n-k}$ alla matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,k}}$, le cui colonne sono le coordinate dei vettori $y_1, \dots, y_k$.

Possiamo concludere questa sezione con un applicazione di queste osservazioni alla determinazione del rango di una matrice, facendola precedere da una definizione.

2.13 Definizione. Sia $A \in M_{m \times n}(C)$. Si dice *minore* di ordine r di A ogni determinante di una sottomatrice $r \times r$ estratta dalla matrice A (ovvero una sottomatrice ottenuta cancellando $m-r$-righe ed $n-r$-colonne).

2.14 Proposizione. *Sia $A \in M_{m \times n}(C)$. Allora A ha rango maggiore o uguale ad r se uno almeno tra i minori di ordine r di A è diverso da zero. In tal caso, il rango di A è esattamente uguale ad r se, e solo se, tutti i minori di ordine $r+1$ di A sono nulli.*

dim. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una sua base, W uno spazio vettoriale di dimensione m e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ una sua base, e sia $\phi : V \to W$ l'applicazione lineare di matrice A rispetto alle basi date ($A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$). Allora ϕ ha rango maggiore o uguale ad r se vi sono almeno r vettori linearmente indipendenti tra $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ ed ha rango esattamente uguale ad r se non vi sono $r+1$ di tali vettori indipendenti.

Ora r vettori $\phi(v_{j_1}), \dots, \phi(v_{j_r})$ sono linearmente indipendenti se, e solo se, esistono $m-r$ vettori della base $\mathcal{W}$, siano $w_{i_1}, \dots, w_{i_{m-r}}$, tali che $D(w_{i_1}, \dots, w_{i_{m-r}}, \phi(v_{j_1}), \dots, \phi(v_{j_r})) \neq 0$. Per quanto visto sopra, ciò significa esattamente che la sottomatrice di ordine r che si ottiene da A considerando le colonne $j_1, \dots, j_r$ e cancellando le righe $i_1, \dots, i_{m-r}$ ha il determinante diverso da zero e quindi vi sono almeno r vettori linearmente indipendenti tra $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$ se, e solo se, esiste un minore di ordine r di A che non sia nullo. Ciò è sufficiente per concludere. **CVD** □

Vogliamo esporre in una breve serie di esercizi un'interpretazione più elegante dei minori di una matrice.

Esercizio 2.4. Siano V e W due spazi vettoriali, rispettivamente di dimensione n ed m sul corpo C e sia dato un omomorfismo $\phi : V \to W$.

(a) Dato un intero r, con $1 \le r \le \min\{n, m\}$, si verifichi che, per ogni $G \in A^r(W)$ (cf. `Esercizio III.1.6`), l'applicazione $G^\phi : (x_1, \dots, x_r) \mapsto G(\phi(x_1), \dots, \phi(x_r))$ appartiene ad $A^r(V)$.

(b) Si verifichi inoltre che l'applicazione $A^r(\phi) : A^r(W) \to A^r(V)$, definita da $G \mapsto G^\phi$, è un'applicazione lineare (detta l'*omomorfismo di ordine r associato* a ϕ).

(c) Dati tre spazi vettoriali U, V e W di dimensioni $\ge r$ e due applicazioni lineari $\psi : U \to V$, $\phi : V \to W$, si verifichi che si ha $A^r(\phi \circ \psi) = A^r(\psi) \circ A^r(\phi)$.

(d) Si verifichi infine che $A^r(1_V) = 1_{A^r(V)}$. □

Esercizio 2.5. Siano V, W e ϕ come nell'esercizio precedente. Fissate una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V ed una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W, sia $A = (a_{ij}) = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$, e si considerino la base $A^r(\mathcal{V}) = \{\, D_I \mid I \in \mathscr{I}_{r,n} \,\}$ di $A^r(V)$ e la base $A^r(\mathcal{W}) = \{\, G_J \mid J \in \mathscr{I}_{r,m} \,\}$ di $A^r(W)$, definite come in `Esercizio III.1.7`. Si mostri che

$$G_J^\phi = \sum_{I \in \mathscr{I}_{r,n}} C_{IJ} D_I$$

ove C_{IJ} è il minore di ordine r estratto dalla matrice A considerando le righe $J(1), \dots, J(r)$ e le colonne $I(1), \dots, I(r)$; ovvero

$$C_{IJ} = \det \begin{pmatrix} a_{J(1)\,I(1)} & \cdots & a_{J(1)\,I(r)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{J(r)\,I(1)} & \cdots & a_{J(r)\,I(r)} \end{pmatrix}.$$

Si concluda che i minori di ordine r della matrice A sono le entrate della matrice di $A^r(\phi)$ rispetto alle basi $A^r(\mathcal{W})$ ed $A^r(\mathcal{V})$. □

Esercizio 2.6. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n e $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Allora si mostri che, fissata comunque una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, la matrice di $A^n(\phi)$ rispetto alla base $A^n(\mathcal{V})$ è $(\det \phi)$. □

3. Applicazioni e complementi

In questa sezione vogliamo illustrare qualche applicazione della teoria dei determinanti.

3.1 Osservazione. [*Formule di Cramer*] Si consideri un sistema lineare (non-omogeneo) $Ax = b$ di n equazioni in n incognite. Per il Teorema di Rouché-Capelli, se la matrice A è invertibile (e quindi ha rango n) il sistema ammette un'unica soluzione e le formule di Cramer permetteranno di scrivere esplicitamente tale soluzione tramite un calcolo di determinanti. Sia $\phi : C^n \to C^n$ l'applicazione lineare di matrice A rispetto alla base canonica ($A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$) e sia $b = b_1 + \cdots + b_n e_n$ il vettore corrispondente alla colonna dei termini noti del sistema. Se indichiamo con $\xi = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$ una soluzione del sistema, deve aversi

$$b = \phi(\xi) = \xi_1 \phi(e_1) + \cdots + \xi_n \phi(e_n)$$

e quindi, fissata una qualsiasi applicazione D, n-lineare, alternante, non-nulla su C^n, si ha

$$D(\phi(e_1), \dots, \phi(e_{j-1}), b, \phi(e_{j+1}), \dots, \phi(e_n)) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \xi_i D(\phi(e_1), \dots, \phi(e_{j-1}), \phi(e_i), \phi(e_{j+1}), \dots, \phi(e_n)) = \xi_j D(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)).$$

Se la matrice A è invertibile e quindi i vettori $\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)$ sono linearmente indipendenti, possiamo ricavare il coefficiente ξ_j da questa identità e scrivere

$$\begin{aligned} \xi_j &= \frac{D(\phi(e_1), \dots, \phi(e_{j-1}), b, \phi(e_{j+1}), \dots, \phi(e_n))}{D(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n))} = \\ &= \frac{D(\phi(e_1), \dots, \phi(e_{j-1}), b, \phi(e_{j+1}), \dots, \phi(e_n))}{D(e_1, \dots, e_n)} \, \frac{D(e_1, \dots, e_n)}{D(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n))} = \frac{\det B_j}{\det A}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

ove B_j è la matrice che si ottiene da A sostituendo la j-esima colonna con la colonna b dei termini noti. Queste formule sono dette le *Formule di Cramer*.

Esercizio 3.1. Si consideri un sistema lineare (non-omogeneo) $Ax = b$ di n equazioni in n incognite con $\det A \neq 0$. Servendosi della descrizione della matrice A^{-1} data nell'`Esercizio III.2.1`, si deduca la regola di Cramer dall'osservazione che $\xi = A^{-1}b$. □

3.3 Osservazione. [*Orientamento. Volume*] Sia C un campo ordinato (ad esempio $C = \mathbb{Q}$ o $C = \mathbb{R}$) e sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su C. Consideriamo l'insieme $\mathscr{B}$ delle *basi ordinate* di V, ovvero l'insieme delle n-uple ordinate di vettori di V, linearmente indipendenti, ove $n = \dim_C V$. Definiamo su $\mathscr{B}$ una relazione di equivalenza.

3.4 Definizione. Due basi ordinate $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ di V si dicono *equiorientate* se la matrice del cambiamento di base ha determinante positivo. Ovvero

$$\mathcal{V} \sim \mathcal{W} \Leftrightarrow 0 < \det \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(1_V) = \frac{D(v_1, \dots, v_n)}{D(w_1, \dots, w_n)},$$

ove D è un'applicazione n-lineare, alternante e non-nulla su V.

La relazione così definita è chiaramente un'equivalenza. Infatti, guardando all'ultima espressione del determinante del cambiamento di base, si deduce facilmente che la relazione è riflessiva ($\mathcal{V} \sim \mathcal{V}$), simmetrica ($\mathcal{V} \sim \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{W} \sim \mathcal{V}$) e transitiva ($\mathcal{V} \sim \mathcal{W}$, $\mathcal{W} \sim \mathcal{Z} \Rightarrow \mathcal{V} \sim \mathcal{Z}$).

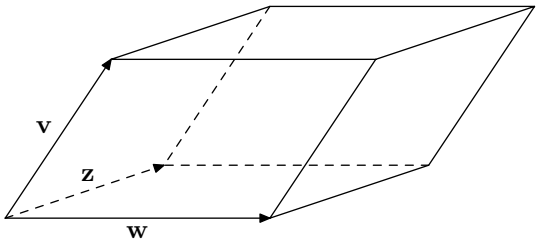
Questa relazione di equivalenza suddivide l'insieme $\mathscr{B}$ in due classi disgiunte. Chiameremo *orientamento* su V la scelta di una delle due classi di basi ordinate e diremo che tutte le basi appartenenti alla classe scelta sono *concordi con l'orientamento* fissato su V. Ciò significa che restringiamo le possibili scelte di base di V a quelle che sono concordi con l'orientamento ovvero tra le basi appartenenti alla classe fissata.

Non vogliamo discutere del significato "fisico" di questa limitazione nei possibili cambiamenti di base, ci limitiamo ad osservare che nello spazio $\mathbb{R}^3$ le due basi ordinate e_1, e_2, e_3 ed e_2, e_1, e_3 non sono equiorientate e possono essere quindi prese come rappresentanti dei due possibili orientamenti dello spazio.

Vogliamo ora introdurre una nozione legata all'orientamento, ovvero vogliamo definire il *volume orientato* di una n-upla di vettori.

3.5 Definizione. Siano C un campo ordinato, V uno spazio vettoriale su C, e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base (ordinata) di V. Dati n vettori $x_1, \dots, x_n$, chiamiamo *parallelepipedo* generato da $x_1, \dots, x_n$ l'insieme

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;\middle|\; 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \dots, n \right\}.$$



(cf. il disegno a fianco in $\mathbb{R}^3$.)

Chiameremo *volume orientato* del parallelepipedo $\mathcal{P}$, rispetto alla base $\mathcal{V}$, il numero

$$\mathit{Vol}(x_1, \dots, x_n; \mathcal{V}) := \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(v_1, \dots, v_n)},$$

ove D è un'applicazione n-lineare alternante e non-nulla su V. Chiameremo *volume* (non-orientato) di $\mathcal{P}$, rispetto alla base $\mathcal{V}$ il valore assoluto di tale numero(†).

(†) Si osservi che su qualunque corpo ordinato si può definire un valore assoluto con le usuali proprietà valide su $\mathbb{R}$ (ovvero $|x+y| \leq |x| + |y|$ e $|xy| = |x|\,|y|$), ponendo $|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

È chiaro che il volume di una n-upla di vettori dipende dalla scelta della base ordinata $\mathcal{V}$ (che è da considerarsi come generatrice del "parallelepipedo unitario" di volume 1). Precisamente, possiamo osservare che, se $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ sono basi ordinate di V, allora si ha

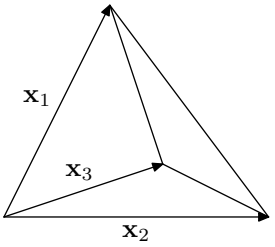
$$\begin{aligned} \mathit{Vol}(x_1, \dots, x_n; \mathcal{W}) &= \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(w_1, \dots, w_n)} = \\ &= \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(v_1, \dots, v_n)} \frac{D(v_1, \dots, v_n)}{D(w_1, \dots, w_n)} = \mathit{Vol}(x_1, \dots, x_n; \mathcal{V}) \det \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(1_V). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Da questa relazione si vede chiaramente che il segno del volume orientato dipende solo dall'orientamento dello spazio e non dalla scelta della base. Inoltre, possiamo osservare che le matrici di determinante 1 si caratterizzano come le matrici di trasformazioni lineari che conservano il volume.

Si può verificare che una trasformazione lineare $\phi : V \to V$ che conservi la lunghezza di tutti i vettori, deve avere matrice $P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$, che soddisfa alla condizione ${}^tPP = \mathbf{1}_n$ e quindi $\det P = \pm 1$. In particolare, le trasformazioni che conservano la lunghezza e l'orientamento sono trasformazioni che conservano il volume (orientato) dei parallelepipedi. Nello spazio euclideo tridimensionale, il volume così definito coincide con quello definito nella geometria elementare ed è quindi una generalizzazione di tali concetti ed una tecnica di calcolo dei volumi. Daremo maggiori dettagli in una successiva sezione; qui ci limitiamo ad osservare che l'annullarsi del volume definito sopra equivale alla dipendenza lineare dei vettori $x_1, \dots, x_n$, ovvero al fatto che il parallelepipedo $\mathcal{P}$ degenera.

3.7 Definizione. Siano C un campo ordinato, V uno spazio vettoriale su C, e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base (ordinata) di V. Dati n vettori $x_1, \dots, x_n$, chiamiamo *n-simplesso* generato da $x_1, \dots, x_n$ l'insieme

$$\Delta_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \leq 1, \text{ e } \lambda_i \in [0,1] \text{ per } i = 1, \dots, n \right\}.$$



(cf. il disegno a fianco in $\mathbb{R}^3$)

Chiameremo *volume orientato* dell'n-simplesso Δ_n, rispetto alla base $\mathcal{V}$, il numero $\frac{1}{n!}\frac{D(x_1,\dots,x_n)}{D(v_1,\dots,v_n)}$ ove D è un'applicazione n-lineare alternante e non-nulla su V. Si parlerà di volume (non-orientato) per indicare il valore assoluto di tale numero.

Esercizio 3.2. Si mostri, nei casi in cui $n = 2$ ed $n = 3$, che esiste una decomposizione del parallelepipedo $\mathcal{P}$ come unione di simplessi e che la somma dei volumi (non-orientati) dei simplessi corrisponde con il volume di $\mathcal{P}$ definito sopra (cf. *Definizione III.3.5*). □

3.8 Osservazione. [*determinante di Van der Monde*] Vogliamo calcolare un determinante, spesso utile in molte applicazioni. Precisamente, vogliamo mostrare che, dati comunque gli elementi $z_0, \dots, z_k$, si ha

$$V(z_0, \dots, z_k) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & \dots & z_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0^k & z_1^k & \dots & z_k^k \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i). \tag{3.9}$$

Dimostreremo la tesi per induzione su k. Infatti, la tesi è ovviamente vera per $k = 1$, essendo

$$V(z_0, z_1) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z_0 & z_1 \end{pmatrix} = z_1 - z_0.$$

Sia quindi $k > 1$, supponiamo che la tesi sia vera per $k-1$ e dimostriamola per k. Si consideri il prodotto di matrici

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -z_k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -z_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & \dots & z_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_0^k & z_1^k & \dots & z_k^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ z_0 - z_k & \dots & z_{k-1} - z_k & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (z_0 - z_k)z_0^{k-1} & \dots & (z_{k-1} - z_k)z_{k-1}^{k-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ricordando il teorema di Binet, si deduce che $V(z_0, \dots, z_k) = \det C$. Inoltre, applicando la regola di Laplace alla matrice C e ricordando il fatto che il determinante è un'applicazione multilineare delle colonne della matrice, applicando l'ipotesi induttiva si deduce che

$$V(z_0, \dots, z_k) = \det C = (-1)^{k+2}(z_0 - z_k) \cdots (z_{k-1} - z_k)\ V(z_0, \dots, z_{k-1}) = \prod_{0 \le i < j \le n} (z_j - z_i)$$

che è quanto volevamo dimostrare.

Diamo ora un'applicazione del determinante di Van der Monde appena calcolato.

Osservazione. *Siano $x_1, \dots, x_n$ elementi di un corpo C di caratteristica 0, si mostri che il sistema*

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \\ \dots \\ x_1^n + \cdots + x_n^n = 0 \end{cases}$$

ha come unica soluzione $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

dim. Si osservi che, in base alle condizioni date, deve aversi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

e ricordando che il determinante della matrice in questione è $\prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$ (determinante di Vandermonde) si conclude che due tra gli $x_1, \dots, x_n$ devono essere uguali tra loro. Sia quindi $x_{n-1} = x_n$ e si osservi che la condizione iniziale può scriversi come

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + 2x_{n-1} = 0 \\ x_1^2 + \cdots + 2x_{n-1}^2 = 0 \\ \dots \\ x_1^n + \cdots + 2x_{n-1}^n = 0 \end{cases}$$

da cui si deduce la condizione

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ 2x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix} = 0;$$

perciò ragionando come sopra si deduce che due tra gli $x_1, \dots, x_{n-1}$ devono essere uguali tra loro. Dunque, proseguendo in questo modo si arriva alla condizione $nx_1 = 0$, da cui si deduce il risultato. **CVD** □

Esercizio 3.3. Siano fissate $n+1$ coppie di numeri reali (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$. Si mostri che esiste un unico polinomio $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, di grado minore o uguale ad n, tale che $P(x_i) = y_i$ se, e solo se, i punti $x_0, \dots, x_n$ sono a due a due distinti. □

Esercizio 3.4. Siano C un corpo e $C[X]_{\leq n}$ il C-spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale ad n. Fissati $n+1$ elementi $x_0, \dots, x_n$ si consideri l'applicazione lineare $\phi : C[X]_{\leq n} \to C^{n+1}$ definita da $P(X) \mapsto \begin{pmatrix} P(x_0) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix}$.

(a) Si mostri che ϕ è un isomorfismo se, e solo se, i punti $x_0, \dots, x_n$ sono a due a due distinti.
(b) Sia ϕ un isomorfismo e si determinino le controimmagini dei vettori della base canonica di C^{n+1}.
(c) Nelle ipotesi del punto precedente, si deduca la *formula di interpolazione di Lagrange*, ovvero $\phi(P(X)) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ se, e solo se, $P(X) = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right)$. □

4. Alcune osservazioni sul volume

Sia V uno spazio vettoriale reale, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una sua base e sia fissata un'applicazione n-lineare alternante D, non-nulla su V. Dati $n+1$ punti, $A_0, A_1, \dots, A_n$, dello spazio affine $\mathbb{A}(V)$, si considerino gli n vettori $x_1 = \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, x_n = \overrightarrow{A_0A_n}$ di V, e definiamo il *parallelepipedo* $PL(x_1, \dots, x_n)$ ed il simplesso $\Delta(x_1, \dots, x_n)$ determinati da questi vettori, come i sottoinsiemi di $\mathbb{A}(V)$,

$$PL(x_1, \dots, x_n) = \left\{ A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_i \in [0,1],\ i = 1, \dots, n \right\}$$

e

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \left\{ A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i. \;\middle|\; \lambda_i \in [0,1], i = 1, \dots, n,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \leq 1 \right\}.$$

Esercizio 4.1. Notazioni come sopra.

(a) Si verifichi che il simplesso $\Delta(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ dipende solo dai punti $A_0, A_1, \dots, A_n$ e non dall'ordine in cui vengono presi.
(b) Si mostri che, per $n \geq 2$, $PL(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ è diverso da $PL(\overrightarrow{A_1A_0}, \overrightarrow{A_1A_2} \dots, \overrightarrow{A_1A_n})$.
(c) Si mostri che il simplesso $\Delta(A_0, \dots, A_n) = \Delta(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ è l'intersezione di tutti i parallelepipedi determinati dai punti $A_0, \dots, A_n$.
(d) Partendo dagli esempi di dimensione piccola, si definiscano le facce k-dimensionali di un simplesso (risp. di un parallelepipedo) n-dimensionale per $k = 0, 1, \dots, n$. Si contino le facce k dimensionali di un simplesso (risp. parallelepipedo) di dimensione n. □

Si definisce il *il volume (non orientato) del simplesso* $\Delta(x_1, \dots, x_n)$, rispetto alla base $\mathcal{V}$, come il numero reale

$$\frac{1}{n!} Vol(x_1, \dots, x_n; \mathcal{V}) = \frac{1}{n!} \left| \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(v_1, \dots, v_n)} \right|,$$

e si osserva che, data un'altra base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ di V, la relazione tra i volumi di $\Delta(x_1, \dots, x_n)$ rispetto alle due basi è data da

$$(*) \quad \frac{1}{n!} Vol(x_1, \dots, x_n; \mathcal{W}) = \frac{1}{n!} \left| \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(w_1, \dots, w_n)} \right| = \frac{1}{n!} \left| \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(v_1, \dots, v_n)} \right| \left| \frac{D(v_1, \dots, v_n)}{D(w_1, \dots, w_n)} \right|$$
$$= \frac{1}{n!} Vol(x_1, \dots, x_n; \mathcal{V}) \, |\det \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathbf{1})|$$

ove $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathbf{1})$ indica la matrice di cambiamento di base.

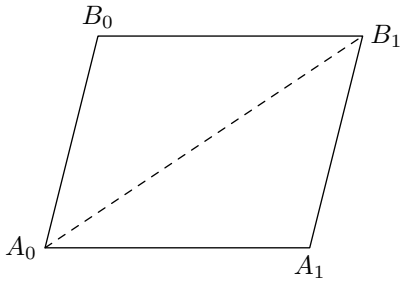
Ora vogliamo mostrare come il parallelepipedo $PL(x_1,\dots,x_n)$ si decomponga nell'unione di $n!$ simplessi aventi tutti volume uguale al volume di $\Delta(x_1,\dots,x_n)$, e quindi come si deduca da ciò che il volume (non orientato) del parallelepipedo $PL(x_1,\dots,x_n)$, rispetto alla base $\mathcal{V}$, è uguale a

$$Vol(x_1,\dots,x_n;\,\mathcal{V}) = \left|\frac{D(x_1,\dots,x_n)}{D(v_1,\dots,v_n)}\right|.$$

La dimostrazione procede per induzione sulla dimensione n dello spazio. Se $n=1$, non c'è nulla da dimostrare perchè, in questo caso, parallelepipedo e simplesso vengono entrambi a coincidere col segmento soggiacente al vettore.

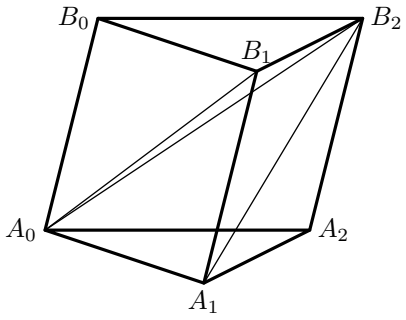
Prima di affrontare il caso generale, vediamo in dettaglio cosa accade per $n=2$ ed $n=3$.

Nel primo caso consideriamo i due vettori $x_1 = \overrightarrow{A_0A_1}$ ed $x_2 = \overrightarrow{A_0B_0}$ ed osserviamo che il simplesso $\Delta(x_1,x_2)$ è il triangolo $A_0A_1B_0$, mentre il parallelepipedo $PL(x_1,x_2)$ è il parallelogramma $A_0A_1B_1B_0$ (cf. il disegno a fianco) ed è evidente come il parallelogramma si decomponga nei due triangoli $A_0A_1B_1$ ed $A_0B_0B_1$, aventi entrambi volume (=area) uguale a quello del triangolo $A_0A_1B_0$. Infatti, fissata una base $\mathcal{V}=\{v_1,v_2\}$, ed un'applicazione 2-lineare alternante non nulla D, si ha che l'area dei triangoli $A_0A_1B_1$ ed $A_0B_0B_1$ sono uguali rispettivamente a



$$\frac{1}{2}\left|\frac{D(x_1,x_1+x_2)}{D(v_1,v_2)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{D(x_1,x_2)}{D(v_1,v_2)}\right|, \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2}\left|\frac{D(x_1+x_2,x_2)}{D(v_1,v_2)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{D(x_1,x_2)}{D(v_1,v_2)}\right|.$$

Nel caso tridimensionale ($n=3$), consideriamo i tre vettori $x_1 = \overrightarrow{A_0A_1}$, $x_2 = \overrightarrow{A_0A_2}$ ed $x_3 = \overrightarrow{A_0B_0}$ ed osserviamo che la base (ovvero la faccia generata dai vettori x_1 ed x_2) del parallelepipedo $PL(x_1,x_2,x_3)$ –ovvero la faccia contenente i vettori x_1 ed x_2– si decompone nell'unione di 2 ($=(n-1)!$) triangoli –ovvero simplessi $(n-1)$-dimensionali– tutti di uguale area. Dunque possiamo ridurci a verificare che il prisma Π costruito sul triangolo $A_0A_1A_2$, ovvero l'insieme



$$\Pi = \left\{\, v+\mu\overrightarrow{A_0B_0} \;\middle|\; v\in\Delta(\overrightarrow{A_0A_1},\overrightarrow{A_0A_2}), \mu\in[0,1] \,\right\}.$$

si decompone nell'unione di 3 simplessi tridimensionali, aventi lo stesso volume del simplesso $\Delta(x_1,x_2)$.

Facendo riferimento al disegno qui sopra, si vede che il prisma Π si decompone nell'unione dei 3 simplessi tridimensionali (tetraedri)

$$\Delta(\overrightarrow{A_0A_1},\overrightarrow{A_0A_2},\overrightarrow{A_0B_2}), \qquad \Delta(\overrightarrow{A_0A_1},\overrightarrow{A_0B_1},\overrightarrow{A_0B_2}), \qquad \Delta(\overrightarrow{A_0B_0},\overrightarrow{A_0B_1},\overrightarrow{A_0B_2}).$$

Fissata una base $\mathcal{V}=\{v_1,v_2,v_3\}$, ed un'applicazione 3-lineare alternante non nulla D, i volumi dei tre solidi sono rispettivamente

$$\frac{1}{6}\left|\frac{D(x_1,x_2,x_2+x_3)}{D(v_1,v_2,v_3)}\right| = \frac{1}{6}\left|\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(v_1,v_2,v_3)}\right|, \qquad \frac{1}{6}\left|\frac{D(x_1,x_1+x_3,x_2+x_3)}{D(v_1,v_2,v_3)}\right| = \frac{1}{6}\left|\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(v_1,v_2,v_3)}\right|,$$
$$\frac{1}{6}\left|\frac{D(x_3,x_1+x_3,x_2+x_3)}{D(v_1,v_2,v_3)}\right| = \frac{1}{6}\left|\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(v_1,v_2,v_3)}\right|.$$

Dunque, il volume del prisma Π è tre volte il volume del simplesso ed il volume del parallelepipedo è il doppio del volume del prisma; e ciò da la relazione cercata.

Il caso appena trattato ci guida nella dimostrazione generale. Sia dunque vero che il parallelepipedo n-dimensionale si decompone nell'unione di $n!$ simplessi aventi tutti lo stesso volume e occupiamoci del caso di dimensione $(n+1)$. Consideriamo gli $(n+1)$ vettori

$$x_1 = \overrightarrow{A_0A_1}, \quad x_2 = \overrightarrow{A_0A_2}, \quad \dots, \quad x_n = \overrightarrow{A_0A_n}, \quad x_{n+1} = \overrightarrow{A_0B_0}.$$

Anche in questo caso osserviamo che la faccia del parallelepipedo $PL(x_1, \dots, x_{n+1})$ generata dai primi n vettori è un parallelepipedo n-dimensionale e quindi, per l' ipotesi induttiva, si decompone nell'unione di $n!$ simplessi aventi tutti lo stesso volume. Consideriamo allora il simplesso n-dimensionale

$$\Delta(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} \;\middle|\; \lambda_i \in [0,1], \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \leq 1 \right\}.$$

ed il prisma costruito su tale simplesso

$$\Pi = \left\{ v + \mu\overrightarrow{A_0B_0} \;\middle|\; v \in \Delta(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}), \mu \in [0,1] \right\}.$$

Sia $\overrightarrow{A_0B_i} = \overrightarrow{A_0A_i} + \overrightarrow{A_0B_0} = x_i + x_{n+1}$, per $i = 1, \dots, n$, e mostriamo come il prisma Π si decomponga nell'unione degli $n+1$ simplessi $(n+1)$-dimensionali:

$$\Delta(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}, \overrightarrow{A_0B_n}), \qquad \Delta(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_{n-1}}, \overrightarrow{A_0B_{n-1}}, \overrightarrow{A_0B_n}), \dots$$
$$\dots \Delta(\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0B_1}, \dots, \overrightarrow{A_0B_n}).$$

Sia $x = \lambda_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{A_0A_n} + \mu\overrightarrow{A_0B_0}$ un elemento del prisma Π. Se $\mu = 0$, allora x appartiene (ad una faccia) del primo simplesso. Altrimenti, se $\mu > 0$, esisterà un indice i, con $1 \leq i \leq n$, tale che $\lambda_i + \cdots + \lambda_n < \mu \leq \lambda_{i-1} + \cdots + \lambda_n$ (†). Allora, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{A_0A_n} + \mu\overrightarrow{A_0B_0} = \\ &= \lambda_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + [(\lambda_{i-1} + \cdots + \lambda_n) - \mu]\overrightarrow{A_0A_{i-1}} + [\mu - (\lambda_i + \cdots + \lambda_n)]\overrightarrow{A_0B_{i-1}} + \lambda_i\overrightarrow{A_0B_i} + \lambda_n\overrightarrow{A_0B_n} \end{aligned}$$

da cui si deduce che x appartiene al simplesso $\Delta(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_{i-1}}, \overrightarrow{A_0B_{i-1}}, \overrightarrow{A_0B_i}, \dots \overrightarrow{A_0B_n})$.

Lasciamo al lettore il compito di verificare che le intersezioni tra i vari simplessi in cui si decompone Π, sono dei simplessi di dimensione strettamente più piccola di $n+1$. e quindi di volume nullo.

Infine, osservando che $\overrightarrow{A_0B_i} = \overrightarrow{A_0A_i} + \overrightarrow{A_0B_0} = x_i + x_{n+1}$, per $i = 1, \dots, n$, si verifica facilmente che tutti i simplessi hanno volume uguale ad $\frac{1}{n!}\left|\frac{D(x_1,\dots,x_n)}{D(v_1,\dots,v_n)}\right|$. Si conclude così che il parallelepipedo $PL(x_1, \dots, x_{n+1})$ si decompone in $n!$ prismi e che ciascuno di questi si decompone in $n+1$ simplessi di ugual volume. Si ottiene così la relazione voluta tra i volumi.

- Ricordiamo infine che la definizione di volume data sopra rende perfettamente conto del fatto che la misura del volume (orientato) di un parallelepipedo è *per sua natura* una funzione multilineare dei vettori che definiscono i lati (...se raddoppia la lunghezza di uno dei lati, raddoppia il volume...), che deve necessariamente annullarsi non appena i lati diventano linearmente dipendenti. Infatti,

(†) Affinché questa affermazione e le seguenti siano vere anche per $i = 1$, poniamo –per definizione– $\lambda_0 = 1$ ed $x_0 = \overrightarrow{A_0A_0} = \mathbf{0}$.

in tal caso il parallelepipedo degenera, venendo ad essere contenuto in una sottovarietà lineare di dimensione strettamente più piccola di n.

Ora vogliamo ridiscutere la nozione di volume nell'ambito dello spazio euclideo ed avvertiamo il lettore che, d'ora in poi, parleremo solo di volume non-orientato, e sarà questo che indicheremo come *volume*, senza bisogno di altre precisazioni.

Supponiamo quindi che sullo spazio vettoriale V sia posta un'applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{R}$, definita positiva ed indichiamo con E, lo spazio euclideo su V su cui consideriamo solo sistemi di riferimento ortonormali. Ricordiamo che il simplesso (n-dimensionale) definito dagli $n+1$ punti $P_0, \dots, P_n$ di E, in posizione generale, è l'insieme

$$\begin{aligned}\Delta(P_0,\dots,P_n) &= \left\{ P_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (P_i - P_0) \;\middle|\; \lambda_i \in [0,1], i = 1,\dots,n,\ \lambda_1 + \dots + \lambda_n \le 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^{n} \mu_i P_i \;\middle|\; \mu_i \in [0,1], i = 0,\dots,n,\ \mu_0 + \dots + \mu_n = 1 \right\}.\end{aligned}$$

Il volume del simplesso $\Delta(P_0,\dots,P_n)$ è, per definizione, $\frac{1}{n!} Vol(P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0; \mathcal{V})$, ove $\mathcal{V} = \{v_1,\dots,v_n\}$ è una qualunque base ortonormale di V. Osserviamo che in base a $(*)$, il valore del volume non dipende dalla scelta della base, in quanto il determinante del cambiamento di base tra due basi ortonormali è sempre uguale a ± 1. Quindi, non essendo più necessaria, elimineremo l'indicazione della base dalla notazione del volume ed indicheremo con $vol^n(\Delta)$ il volume n-dimensionale di un simplesso Δ di E.

Osserviamo inoltre che il volume del simplesso, così come è stato definito, dipende solo dai vettori che ne costituiscono i lati e non dal punto P_0 a cui tali vettori vengono applicati, ciò significa che il volume di un simplesso non varia per traslazione.

È naturale aggiungere che la nozione di volume si estende in modo naturale dai simplessi a tutti i sottoinsiemi che si decompongono come unione (finita) di simplessi n-dimensionali. In realtà, nello spazio euclideo, possiamo introdurre anche la nozione di volume per parallelepipedi (e quindi per simplessi) di dimensione $k \le n = \dim_C V$. Infatti, dati i vettori $x_1,\dots,x_k$ ed il parallelepipedo da essi generato $P_k = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_i \in [0,1],\ i = 1,\dots,k \right\}$, se i vettori $x_1,\dots,x_k$ sono linearmente dipendenti si pone $vol^k(P_k) = 0$, altrimenti si considerano il sottospazio $\langle x_1,\dots,x_k\rangle^\perp$ ed una sua base ortonormale $w_{k+1},\dots,w_n$ e si pone

$$(\dagger) \qquad vol^k(P_k) = \left| \frac{D(x_1,\dots,x_k,w_{k+1},\dots,w_n)}{D(v_1,\dots,v_n)} \right|,$$

ove $\mathcal{V} = \{v_1,\dots,v_n\}$ è una base ortonormale di V. È facile verificare che questa definizione non dipende dalla scelta della base ortonormale del sottospazio $\langle x_1,\dots,x_k\rangle^\perp$ (ed il lettore è invitato a farlo).

Esercizio 4.2. Dati due punti P e Q dello spazio euclideo, si indichi con $PQ = \{ P + \lambda(Q-P) \mid \lambda \in [0,1] \}$ il segmento di retta che li congiunge e si verifichi che $vol^1(PQ) = \|Q - P\|$. □

Esercizio 4.3. Si consideri lo spazio euclideo tridimensionale E^3 ed i punti

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si calcolino $vol^3(\Delta(P_0,P_1,P_2,P_3))$, $vol^2(P(P_1 - P_0, P_3 - P_0))$, $vol^1(P_2 - P_1)$; ove $\Delta(P_0,P_1,P_2,P_3)$ indica il simplesso avente come vertici i quattro punti dati e $P(P_1 - P_0, P_3 - P_0)$ indica il parallelogramma avente come lati i vettori $P_1 - P_0$ e $P_3 - P_0$. □

Esercizio 4.4. Si considerino $n+1$ punti $P_0, P_1, \dots, P_n$ dello spazio euclideo E, di dimensione n, ed il simplesso Δ, determinato da tali punti . Data un'applicazione affine $f : E \to E$, sia Δ' il simplesso determinato dai punti $f(P_0), f(P_1), \dots, f(P_n)$. Si verifichi che $vol^n(\Delta') = |\det f| vol^n(\Delta)$. □

Abbiamo quindi visto come si possa definire il volume (di ogni dimensione) per i sottoinsiemi dello spazio euclideo che si decompongono come unione (finita) di simplessi e vogliamo dare qui sotto un'ulteriore formula per calcolarlo. Dati i vettori $x_1, \dots, x_k$ di V, indichiamo con Γ il parallelepipedo determinato da questi, e sia X la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $x_1, \dots, x_k$ rispetto ad una base ortonormale $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Allora, sia $G = {}^tXX \in M_k(\mathbb{R})$, e mostriamo che

$$\boxed{vol^k(\Gamma) = \sqrt{\det G}.}$$

dim. Consideriamo una base ortonormale, $w_{k+1}, \dots, w_n$, del sottospazio $\langle x_1, \dots, x_k \rangle^\perp$ e sia Y la matrice (quadrata di ordine n) che ha come colonne le coordinate dei vettori $x_1, \dots, x_k, w_{k+1}, \dots, w_n$, rispetto alla base ortonormale $\mathcal{V}$. In base alla definizione (†), si ha $vol^k(\Gamma) = |\det Y|$. D'altra parte, si ha

$${}^tYY = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{n-k} \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che $(\det Y)^2 = \det G$ e quindi la tesi. **CVD** □

4.1 Una disuguaglianza. Consideriamo lo spazio euclideo E^n ed una base ortonormale $e_1, \dots, e_n$. Siano dati n vettori $v_1, \dots, v_n$, e vogliamo dimostrare la disuguaglianza (attribuita ad Jacques Hadamard)

$$vol^n(v_1, \dots, v_n)^2 \leq \|v_1\|^2 \cdots \|v_n\|^2.$$

Questa disuguaglianza può essere interpretata geometricamente dicendo che, *tra tutti i parallelelpipedi di dati spigoli, quello rettangolo ha volume massimo.*

Possiamo ragionare così. La disuguaglianza è banalmente vera se i vettori sono linearmente dipendenti, perché il volume si annulla; possiamo quindi supporre che $v_1, \dots, v_n$, siano indipendenti. Sia $v_1 = w_1$ e, per $i = 2, \dots, n$, $v_i = w_i + u_i$, con $u_i \in \langle w_1, \dots, w_{i-1} \rangle$ e $w_i \in \langle w_1, \dots, w_{i-1} \rangle^\perp$. Si osservi che si ha $\|v_i\|^2 = \|w_i\|^2 + \|u_i\|^2$ e quindi

$$0 < \|w_i\| \leq \|v_i\|, \qquad \text{per } i = 1, \dots, n.$$

D'altra parte,

$$vol^n(v_1, \dots, v_n) = \frac{D(v_1, \dots, v_n)}{D(e_1, \dots, e_n)} = \frac{D(w_1, w_2 + u_2, \dots, w_n + u_n)}{D(e_1, \dots, e_n)} = \frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(e_1, \dots, e_n)} = vol^n(w_1, \dots, w_n)$$

e, presa una matrice, W, che abbia come colonne le coordinate dei vettori $w_1, \dots, w_n$, rispetto alla base ortonormale $e_1, \dots, e_n$, si ha

$$vol^n(w_1, \dots, w_n)^2 = \det({}^tWW) = \det \begin{pmatrix} \|w_1\|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|w_n\|^2 \end{pmatrix} = \|w_1\|^2 \cdots \|w_n\|^2.$$

Il ragionamento qui esposto può essere facilmente adattato per mostrare l'analoga disuguaglianza per il volume k-dimensionale in E^n (esercizio!).

Nel piano euclideo è noto dalla Scuola come sia possibile calcolare l'area (=volume 2–dimensionale) di poligoni o il loro perimetro, ovvero la somma delle lunghezze (=volume 1–dimensionale) dei lati e, con

un po' di fatica, si è mostrato anche come misurare l'area del cerchio o la sua circonferenza. La generalizzazione di questi concetti porta ad un argomento vasto e profondo qual è la *teoria della misura* (cf. ad es. S.J. Taylor: *Introduction to measure and integration*, Cambridge Univ. Press 1966, o Paul Halmos: *Measure theory*, Springer 1974). Non è certo questo il luogo per dare un'introduzione, anche minima, a questa teoria matematica, ma vogliamo solo dare una lista elementare delle proprietà che si richiedono alla nozione di *volume k-dimensionale* nello spazio euclideo di dimensione n.

- Il volume k-dimensionale ($k \geq 1$) è una funzione, vol^k, definita in un'opportuna classe, $\mathcal{M}$, di sottoinsiemi dello spazio euclideo E^n, e che assume valore in $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$. Gli elementi di $\mathcal{M}$ sono detti i sottoinsiemi *misurabili* dello spazio euclideo e si suppone che il volume n-dimensionale sia finito per tutti i sottoinsiemi misurabili limitati(*).
- La funzione vol^k è *numerabilmente additiva*, cioè, se $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una collezione di insiemi misurabili ed $U_i \cap U_j = \varnothing$ per $i \neq j$, allora

$$vol^k\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} vol^k\left(U_n\right).$$

  Inoltre, dati due punti P e Q dello spazio euclideo, deve aversi $vol^1(P) = 0 = vol^1(Q)$ e $vol^1(PQ) = \|Q - P\|$, ove $PQ = \{\, P + \lambda(Q-P) \mid \lambda \in [0,1] \,\}$ indica il segmento di retta che congiunge P e Q.
- Se $U \subset U'$ sono entrambo misurabili, allora $vol^k(U) \leq vol^k(U')$.
- Siano $\mathbb{L}_1$ ed $\mathbb{L}_2$ due sottovarietà lineari di E, ortogonali tra loro e di dimensione complementare, e si scriva $E = \mathbb{L}_1 \vee \mathbb{L}_2$ (ovvero ogni punto di E viene identificato con la coppia delle sue proiezioni ortogonali sulle due sottovarietà.). Dati $U_1 \subset \mathbb{L}_1$, $U_2 \subset \mathbb{L}_2$, sia $U_1 \times U_2 = \{\, (X_1, X_2) \mid X_1 \in U_1, X_2 \in U_2 \,\}$(†). Allora deve aversi
$$vol^{h+k}(U_1 \times U_2) = vol^h(U_1)\, vol^k(U_2).$$
- Se $f : E \to E$ è un'affinità, allora $vol^n(f(U)) = |\det f| vol^n(U)$, ove $n = \dim E$ ed U è un qualunque insieme misurabile.

Le proprietà elencate sono molto naturali e non richiedono molti commenti, se non l'osservazione che l'ultima proprietà enunciata è responsabile dell'apparizione di un determinante nelle formule di cambiamento di variabile per gli integrali (multipli).

Concludiamo ricordando che nulla abbiamo detto né sull'insieme $\mathcal{M}$ dei misurabili, né sull'esistenza di una funzione *volume* per insiemi più generali delle unioni finite di simplessi.

Esercizio 4.5. [*Volume e Prodotto Vettoriale*] Sia $V = R^n$ dotato dell'applicazione bilineare simmetrica g, rispetto a cui la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base ortonormale e sia fissata un'applicazione n-lineare alternante non nulla D su V. Dati comunque $n-1$ vettori $v_1, \ldots, v_{n-1}$, in V, si consideri la forma lineare $\zeta : V \to \mathbb{R}$, definita ponendo

$$\zeta(x) := \frac{D(v_1, \ldots, v_{n-1}, x)}{D(e_1, \ldots, e_n)} = Vol(v_1, \ldots, v_{n-1}, x; \mathcal{E}),$$

ed indichiamo con $v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$ quell'unico vettore di V per cui

$$g(x, v_1 \times \cdots \times v_{n-1}) = \zeta(x) = \frac{D(v_1, \ldots, v_{n-1}, x)}{D(e_1, \ldots, e_n)} \qquad \text{per ogni } x \in V.$$

Il vettore $v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$ si chiama il *prodotto vettoriale* dei vettori $v_1, \cdots, v_{n-1}$. Si verifichi che si tratta di una buona definizione e si mostri che valgono le seguenti proprietà:

(*) Un sottoinsieme dello spazio euclideo si dice *limitato* se è contenuto in una qualche sfera chiusa.

(†) Per essere sicuri di aver capito, si faccia un disegno dell'insieme $U_1 \times U_2$ quando $\mathbb{L}_1$ ed $\mathbb{L}_2$ sono rispettivamente un piano ed una retta dello spazio tridimensionale, U_1 è un triangolo nel piano $\mathbb{L}_1$ ed U_2 un segmento sulla retta $\mathbb{L}_2$.

(a) $v_1 \times \cdots \times (\alpha v_i + \beta v_i') \times \cdots \times v_{n-1} = \alpha(v_1 \times \cdots \times v_i \times \cdots \times v_{n-1}) + \beta(v_1 \times \cdots \times v_i' \times \cdots \times v_{n-1})$, per $i = 1, \ldots, n-1$, e inoltre $v_{\sigma(1)} \times \cdots \times v_{\sigma(n-1)} = (\operatorname{sgn}\sigma) v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$ per ogni $\sigma \in \Sigma_{n-1}$

(b) $v_1 \times \cdots \times v_{n-1} \in \langle v_1, \cdots, v_{n-1}\rangle^{\perp}$;

(c) $v_1 \times \cdots \times v_{n-1} = 0$ se, e solo se, $v_1, \cdots, v_{n-1}$ sono linearmente dipendenti;

(d) indicato con Γ il parallelepipedo $n-1$-dimensionale determinato dai vettori $v_1, \ldots, v_{n-1}$, si ha $\|v_1 \times \cdots \times v_{n-1}\| = vol^{n-1}(\Gamma)$;

(e) Si verifichi infine che, se $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, per $j = 1, \ldots, n-1$, allora $v_1 \times \cdots \times v_{n-1} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, ove

$$x_1 = \frac{D(v_1, \ldots, v_{n-1}, e_1)}{D(e_1, \ldots, e_n)} = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n-1} & 1 \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{D(v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n)}{D(e_1, \ldots, e_n)} = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

□

IV
Applicazioni bilineari

In questo capitolo vogliamo occuparci di generalizzare la nozione di prodotto scalare allo scopo di contemperare le proprietà geometriche dello spazio euclideo con la necessità, che a volte si presenta, di utilizzare punti dello spazio con coordinate complesse. Per fare ciò, ci occuperemo di operazioni un po' più generali del prodotto scalare, quali le applicazioni bilineari su di uno spazio vettoriale di dimensione finita. Queste operazioni sono interessanti di per sé, specie per le loro relazioni con le forme quadratiche (cioè con i polinomi omogenei di secondo grado nelle coordinate dello spazio) e trovano applicazioni in vari campi.

Nel corso di questo capitolo, indicheremo con C il corpo degli scalari, *intendendo che, salvo diverso avviso, quanto viene enunciato è valido per spazi vettoriali su* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$. In realtà, il contenuto di questo capitolo si applica a corpi di scalari molto generali, ma vi sono alcune notevoli eccezioni, ovvero particolari corpi di scalari su cui alcuni dei risultati che vedremo sono falsi; di questi daremo qualche cenno in seguito.

1. Applicazioni bilineari simmetriche ed alternanti

Iniziamo a trattare l'argomento dando alcune definizioni.

1.1 Definizione. Siano V e W due spazi vettoriali sul campo C, un'applicazione $g : V \times W \to C$ è un'*applicazione bilineare* se

$$\begin{aligned} g(v, aw + bw') &= ag(v, w) + bg(v, w') \\ g(av + bv', w) &= ag(v, w) + bg(v', w), \end{aligned} \tag{1.2}$$

qualunque siano $a, b \in C$, $v, v' \in V$ e $w, w' \in W$.

Un'applicazione bilineare $g : V \times W \to C$ si dice *non-degenere*, se

$$\begin{aligned} g(v, w) = 0 \text{ per ogni } v \in V \quad &\Rightarrow \quad w = 0 \\ g(v, w) = 0 \text{ per ogni } w \in W \quad &\Rightarrow \quad v = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Nel seguito ci occuperemo soprattutto del caso in cui $V = W$, ovvero di applicazioni bilineari $g : V \times V \to C$ e più che alle applicazioni bilineari in generale, ci interesseremo particolarmente a due classi di applicazioni bilineari che sono le simmetriche e le alternanti. Cominciamo con la loro definizione precisa.

1.4 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale sul campo C e sia $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare. Diremo che g è *simmetrica* se si ha $g(v, w) = g(w, v)$ per ogni coppia di vettori $v, w \in V$.

Diremo che g è *alternante* se $g(v, v) = 0$ per ogni vettore $v \in V$.

In particolare, se $g : V \times V \to C$ è bilineare ed alternante, si ha $0 = g(v+w, v+w) = g(v, w)+g(w, v)$ ovvero

$$g(v, w) = -g(w, v), \qquad \text{per ogni coppia di vettori } v, w \in V. \tag{1.5}$$

1.6 Remark. In questo capitolo ci occuperemo unicamente dei casi in cui il corpo degli scalari è il corpo reale, oppure il corpo complesso, ma le definizioni che abbiamo dato hanno senso anche su corpi più generali e gran parte dei risultati che mostreremo restano validi anche in questi ambiti. C'è un'importante eccezione che vogliamo segnalare, che è data dai corpi di *caratteristica* 2, cioè, i corpi in cui $1 + 1 = 0$. Un esempio di questa peculiarità si può avere osservando che, se $1 + 1 \neq 0$ in C, allora l'unica applicazione bilineare che sia simultaneamente

simmetrica ed alternante è l'applicazione identicamente nulla. Invece, se C ha caratteristica 2, allora da (IV.1.5) si deduce che le applicazioni bilineari alternanti sono particolari applicazioni bilineari simmetriche.

Un esempio di corpo di caratteristica 2 è l'insieme $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, con le operazioni di somma e prodotto definite ponendo $0 + 0 = 0 = 1 + 1$, $0 + 1 = 1 = 1 + 0$, $1 * 0 = 0 * 0 = 0 * 1 = 0$, $1 * 1 = 1$; ove si può pensare a 0 ed 1 come rappresentanti rispettivamente dei numeri interi pari e dispari e ricordare il comportamento di questi numeri rispetto alle operazioni sugli interi. A volte gli elementi di $\mathbb{F}_2$ sono stati identificati con i due stati di un *bit* ed i pacchetti di bit come elementi di uno spazio vettoriale di dimensione finita sul corpo $\mathbb{F}_2$. Non è questa la sede per parlare di corpi finiti (dei quali $\mathbb{F}_2$ è un esempio) o delle loro applicazioni, vogliamo solo dire che questo esempio non è isolato, ma esistono infiniti corpi con un numero finito di elementi. Se $\mathbb{F}$ è un corpo finito, allora $\mathbb{F}$ ha p^n elementi, ove p è un qualche numero primo ed $n \geq 1$ e, in particolare, per tutti gli elementi $x \in \mathbb{F}$ si ha $px = x + \cdots + x = 0$ (p addendi). Quest'ultimo fatto si esprime dicendo che $\mathbb{F}$ ha *caratteristica* p.

Nei corpi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, nessun multiplo di un numero $x \neq 0$ si annulla e quindi si dice che sono corpi di *caratteristica* 0.

Andiamo a mostrare come ogni applicazione bilineare si scriva come somma di un'applicazione bilineare simmetrica e di una alternante.

1.7 Proposizione. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo C e sia $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare. Allora, per ogni coppia di vettori $v, w \in V$, si ha $g(v, w) = g_s(v, w) + g_a(v, w)$ ove $g_s : V \times V \to C$ (risp. $g_a : V \times V \to C$) è un'opportuna applicazione bilineare simmetrica (risp. alternante).*

dim. Per ogni coppia di vettori $v, w \in V$, si ponga

$$g_s(v, w) = \frac{g(v, w) + g(w, v)}{2} \qquad \text{e} \qquad g_a(v, w) = \frac{g(v, w) - g(w, v)}{2}.$$

È immediato verificare che $g_s : V \times V \to C$ è un'applicazione bilineare simmetrica, $g_a : V \times V \to C$ è un'applicazione bilineare alternante e che, per ogni coppia di vettori $v, w \in V$, si ha $g(v, w) = g_s(v, w) + g_a(v, w)$. **CVD** □

Studiando le applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita, abbiamo visto che la scelta di basi permette di associare ad ogni applicazione lineare una matrice e come si possano dedurre le proprietà dell'applicazione dalla matrice ad essa associata. Anche nel caso di applicazioni bilineari la scelta di basi permette di associare delle matrici a tali applicazioni. Vogliamo descrivere in dettaglio questa corrispondenza nel caso in cui $V = W$, lasciando al lettore la discussione del caso in cui siano coinvolti due spazi distinti.

Siano dunque V uno spazio vettoriale sul campo C e $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare. Fissata una base $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V, possiamo considerare la matrice $g = (g(v_i, v_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ che ha nel posto (i, j) il valore dell'applicazione bilineare g sulla coppia (v_i, v_j) di elementi della base fissata. Diremo che la matrice G così definita è la *matrice dell'applicazione bilineare* g. Vogliamo scrivere esplicitamente le relazioni esistenti tra g e le sue matrici.

1.8 Proposizione. *Siano V uno spazio vettoriale sul campo C, $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare, $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V e $G = (g(v_i, v_j))_{1 \leq i,j \leq n}$, la matrice di g rispetto alla base data. Allora*

(a) Se $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ e $w = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$, allora $g(v, w) = {}^t aGb$, ove a e b indicano le colonne delle cooordinate di v e w rispettivamente.

(b) L'applicazione bilineare g è non-degenere se, e solo se, $\det G \neq 0$.

(c) Data una base $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ di V ed indicata con $H = (g(w_i, w_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice di g rispetto a tale base, si ha $H = {}^t PGP$, ove $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(1_V)$.

dim. (a). Grazie al fatto che g è bilineare, si ha

$$g(v, w) = g\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \sum_{j=1}^{n} b_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j g(v_i, v_j) = {}^t aGb.$$

(b). Se g fosse degenere, esisterebbe un vettore $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \neq 0$, tale che $g(x, v) = 0$, per ogni $x \in V$. In particolare, ciò accadrebbe prendendo i vettori della base $\mathcal{V}$ in luogo di x e quindi dovrebbe aversi $Ga = 0$, ove a indica la colonna della coordinate di v. Dunque la colonna $a \neq 0$ apparterrebbe al nucleo dell'applicazione lineare di matrice G e perciò $\det G = 0$. Le due condizioni sono chiaramente equivalenti.

(c). Sia $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(1_V)$, allora, fissati due vettori w_i e w_j della base $\mathcal{W}$, le loro coordinate rispetto alla base $\mathcal{V}$ sono, rispettivamente l'i-esima e la j-esima colonna della matrice P. In base a quanto visto nel punto (a), si ha quindi

$$g(w_i, w_j) = (p_{1i}, \ldots, p_{ni}) G \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$$

ovvero, ricordando la definizione del prodotto di matrici, l'elemento di posto (i, j) nel prodotto ${}^tPGP$. Ciò conclude la dimostrazione. **CVD** □

1.9 Esempi. (a). [*prodotto scalare*] Sia C un campo e si consideri lo spazio vettoriale C^n. Poniamo su tale spazio l'applicazione bilineare (simmetrica) che ha matrice identica $\mathbf{1}_n$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, ovvero l'applicazione bilineare $(v, w) \mapsto v \cdot w$, definita dalle condizioni $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ (simbolo di Kronecker). Si osservi che,

$$\text{se } v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ allora } v \cdot w = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Sia C un campo ordinato (ad es. $C = \mathbb{Q}$ o $C = \mathbb{R}$). Dalla formula precedente si ha $v \cdot v = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$ e quindi $v \cdot v = 0$ se, e solo se, $v = 0$.

(b). [*Spazio di Minkovski*] Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato dell'applicazione bilineare (non-degenere) $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, di matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_4\}$, ove c è una costante positiva (la *velocità della luce*). Dati due vettori $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{pmatrix}$, allora si ha

$$g(v, w) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - c^2 x_4 y_4.$$

Osserviamo che, in questo caso, esistono vettori v non nulli tali che $g(v, v) = 0$; ad esempio, si prenda $v = ce_1 + e_4$. Inoltre, è facile verificare che, comunque si fissi un numero reale α, esiste almeno un vettore $v \in \mathbb{R}^4$ tale che $g(v, v) = \alpha$; infatti, se $\alpha > 0$, basta prendere $v = \sqrt{\alpha} e_1$, invece, se $\alpha < 0$, basta prendere $v = \frac{\sqrt{-\alpha}}{c} e_4$.

Esercizio 1.1. Siano V e W due spazi vettoriali sul campo C. Si mostri che l'insieme

$$\mathrm{Bil}(V, W, C) = \{\, g : V \times W \to C \mid g \text{ è bilineare} \,\}$$

è uno spazio vettoriale sul campo C rispetto alle usuali operazioni di somma di funzioni e di prodotto di funzioni per costanti.

Nell'ipotesi che $\dim_C V = n$, $\dim_C W = m$, si mostri che $\dim_C \mathrm{Bil}(V, W, C) = mn$ [si usi, ad esempio, *Proposizione IV.5.15*]. □

Esercizio 1.2. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C e G la matrice di un'applicazione bilineare $g : V \times V \to C$.
(a) Si verifichi che g è simmetrica se, e solo se, ${}^tG = G$.
(b) Se la caratteristica di C è diversa da 2, si verifichi che g è alternante se, e solo se, ${}^tG = -G$.
(c) Se la caratteristica di C è diversa da 2, si mostri che la decomposizione di g descritta nella *Proposizione IV.1.7* corrisponde all'identità $G = \frac{1}{2}[G + {}^tG] + \frac{1}{2}[G - {}^tG]$.
(d) Se la caratteristica di C è uguale a 2, come è fatta la matrice di un'applicazione bilineare alternante su V? □

Esercizio 1.3. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C e G la matrice di un'applicazione bilineare $g : V \times V \to C$, rispetto ad una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V.
(a) Si verifichi che ${}^txGv = 0$ per ogni vettore $x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ di V se, e solo se, la colonna Gv è uguale a $\mathbf{0}$.
(b) Si verifichi che ${}^tvGx = 0$ per ogni vettore $x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ di V se, e solo se, la riga ${}^tvG$ è uguale a ${}^t\mathbf{0}$.
(c) Si deduca dai punti precedenti che g è non-degenere se, e solo se, $\det G \neq 0$. □

Ricordiamo che, dati un C-spazio vettoriale di dimensione finita V ed un'applicazione bilineare $g : V \times V \to C$, simmetrica o alternante, in corrispondenza ad ogni sottospazio (o sottoinsieme) $U \subset V$ è ben definito il sottospazio ortogonale al sottospazio dato, ovvero

$$U^\perp = \{\, v \in V \mid g(v, u) = 0,\ \forall u \in U \,\}. \tag{1.10}$$

1.11 Osservazione. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C e $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare non degenere, simmetrica o alternante.*
(a) Sia S un sottoinsieme di V, allora $S^\perp$ è un sottospazio di V. Se $S_1 \subset S_2$ allora $S_2^\perp \subset S_1^\perp$.
(b) Sia S un sottoinsieme di V, allora $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$.
(c) Sia W un sottospazio di V di dimensione k, allora $\dim W^\perp = n - k$.
(d) Se W è un sottospazio di V, allora $(W^\perp)^\perp = W$.

dim. (*a*). Se v, v' appartengono ad $S^\perp$ ed $a, b \in C$, allora, per la bilinearità di g, dato un qualunque vettore $s \in S$, si ha

$$g(av + bv', s) = ag(v, s) + bg(v', s) = 0$$

e quindi $S^\perp$ è un sottospazio. Le relazioni di inclusione sono ovvie.
(*b*). Anche questa discende dalla bilinearità di g e dall'osservazione che $\langle S \rangle$ è l'insieme delle combinazioni lineari di elementi di S.
(*c*). Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di W e completiamola ad una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V. Indicata con $G = (g_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ la matrice di g rispetto a questa base, si ha che un vettore $x = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ appartiene a $W^\perp$ se, e solo se,

$$\begin{cases} g(v_1, x) = g_{11}x_1 + \cdots + g_{1n}x_n = 0 \\ g(v_2, x) = g_{21}x_1 + \cdots + g_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \cdots \\ g(v_k, x) = g_{k1}x_1 + \cdots + g_{kn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Poichè G è una matrice invertibile, si tratta di un sistema lineare omogeneo di rango k e quindi le sue soluzioni formano il sottospazio $W^\perp$ di dimensione $n - k$.
(*d*). Ovviamente si ha $W \subset (W^\perp)^\perp$, e un calcolo di dimensioni permette di concludere. **CVD** □

Diamo ora una definizione che generalizza i fenomeni osservati negli esempi soprastanti.

1.12 Definizione. Siano V uno spazio vettoriale sul corpo C e $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare, simmetrica oppure alternante. Diremo che un vettore $v \in V$ è *isotropo* se $g(v, v) = 0$, ovvero se $\langle v \rangle \subseteq \langle v \rangle^\perp$. Diremo che un sottospazio $U \subseteq V$ è *isotropo* se si ha $U \subseteq U^\perp$; ciò significa: $g(u, u') = 0$ per ogni $u, u' \in U$.

In particolare, nelle notazioni della definizione soprastante, possiamo osservare che, se U è un sottospazio isotropo di V, la restrizione di g ad $U \times U$ è l'applicazione bilineare identicamente nulla ($g(u, u') = 0$ per ogni $u, u' \in U$). Dimostriamo la seguente osservazione che dà una condizione necessaria e sufficiente affinché la restrizione di g ad un sottospazio sia degenere.

1.13 Lemma. *Siano V uno spazio vettoriale sul corpo C e $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare, non-degenere, simmetrica oppure alternante. Allora, dato un sottospazio W di V, la restrizione di g ad $W \times W$ è degenere se, e solo se, $W \cap W^\perp \neq \langle 0 \rangle$.*

dim. È sufficiente osservare che un vettore $u \in W \cap W^\perp$ se, e solo se, $u \in W$ e $g(u, w) = 0$ per ogni $w \in W$. Ciò significa esattamente che u stà nel nucleo della restrizione di g a $W \times W$. Dunque tale restrizione è degenere se, e solo se, $W \cap W^\perp \neq \langle 0 \rangle$. **CVD** □

Dall'osservazione appena dimostrata discende un importante risultato.

1.14 Teorema. *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul corpo C e $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare, non-degenere, simmetrica oppure alternante. Allora, dato un sottospazio W di V per cui la restrizione di g a $W \times W$ è non-degenere, si ha $V = W \oplus W^\perp$ e la restrizione di g a $W^\perp \times W^\perp$ è non-degenere.*

dim. Poiché la restrizione di g a $W \times W$ è non-degenere, si ha $W \cap W^\perp = \langle 0 \rangle$ ed allora $W + W^\perp = W \oplus W^\perp$ è un sottospazio della stessa dimensione di V, che coincide quindi con V. Inoltre, essendo $(W^\perp)^\perp = W$, anche la restrizione di g a $W^\perp \times W^\perp$ è non-degenere. **CVD** □

1.15 Definizione. Siano V, g e W come nell'enunciato del *Teorema IV.1.14*. Allora, per ogni vettore $v \in V$ esistono e sono univocamente determinati i vettori $w \in W$ e $w' \in W^\perp$ tali che $v = w + w'$. In particolare, si dirà che w (risp. w') è la *proiezione ortogonale* di v su W (risp. su $W^\perp$).

1.16 Esempio. Si consideri il $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale $V = \mathbb{Q}^4$, dotato della applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{Q}$, di matrice

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_4\}$. Si può facilmente verificare (ad esempio, calcolando $\det G$) che si tratta di un'applicazione bilineare non-degenere. Sia ora $W = \langle e_1 + 2e_4, 3e_1 - e_4 \rangle$ e vogliamo studiare la somma $W + W^\perp$; precisamente vogliamo

- verificare che la restrizione di g a $W \times W$ è non degenere;
- determinare il sottospazio $W^\perp$;
- dato un vettore $v = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 \in V = W \oplus W^\perp$, determinare esplicitamente le sue proiezioni ortogonali su W e $W^\perp$.

Per prima cosa, osserviamo che $W = \langle e_1, e_4 \rangle$ e quindi possiamo utilizzare questa nuova base del sottospazio per fare i calcoli. Infatti, in questa base la matrice della restrizione di g a $W \times W$ è uguale a $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ che è chiaramente non-degenere. Inoltre, $W^\perp = \{\, x \in V \mid g(e_1, x) = 0, g(e_4, x) = 0 \,\}$, e quindi un vettore $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$ appartiene a $W^\perp$ se, e solo se, le sue coordinate sono soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} g(e_1, x) = x_2 + 3x_4 = 0 \\ g(e_4, x) = 3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Da ciò si ottiene $W^\perp = \langle e_4 - 3e_2, e_1 - 3e_3 \rangle$ e si può verificare di nuovo che la restrizione di g a $W \times W$ è non-degenere, osservando che $W \cap W^\perp = \langle 0 \rangle$.

Sia dato infine un vettore $v = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 \in V$. Il vettore $w = \alpha e_1 + \beta e_4 \in W$ è la proiezione ortogonale di V se, e solo se, $v - w \in W^\perp$ (ovvero w è la proiezione su W parallela al sottospazio $W^\perp$). Ciò significa che i coefficienti α e β sono legati ad $a_1, \dots, a_4$ dalle relazioni

$$\begin{cases} g(e_1, v-w) = a_2 + 3(a_4 - \beta) = 0 \\ g(e_4, v-w) = 3(a_1 - \alpha) + a_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{3a_1+a_3}{3} \\ \beta = \frac{a_2+3a_4}{3} \end{cases}.$$

Dunque, indicate con $\pi_W : V \to W$ e $\pi_{W^\perp} : V \to W^\perp$ le due proiezioni ortogonali, si ha

$$\pi_W(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) = \frac{3a_1 + a_3}{3}e_1 + \frac{a_2 + 3a_4}{3}e_4$$
$$\pi_{W^\perp}(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) = -\frac{a_3}{3}e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 - \frac{a_2}{3}e_4$$

e ciò risponde ai quesiti posti.

1.17 Osservazione. [Forme quadratiche ed applicazioni bilineari simmetriche] Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo C e sia $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare simmetrica (nelle considerazioni che seguono, è essenziale l'ipotesi, sempre tacitamente assunta, che C sia di caratteristica diversa da 2 [cf. *Remark IV.1.6*]). Data una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, possiamo associare a g la matrice $G = (g_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, ove $g_{ij} = g(v_i, v_j)$; inoltre, possiamo considerare la funzione $q_g : v \mapsto g(v, v)$, ovvero, nelle coordinate della base fissata, l'applicazione $q_g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i,j \le n} g_{ij}x_ix_j$. Dunque, l'applicazione $q_g : V \to C$ così definita è un polinomio omogeneo di secondo grado nelle coordinate dei vettori di V. In particolare, si ha

$$q_g(\alpha v) = g(\alpha v, \alpha v) = \alpha^2 q_g(v)$$
$$q_g(v + w) - q_g(v) - q_g(w) = g(v + w, v + w) - g(v, v) - g(w, w) = 2g(v, w)$$

e quindi possiamo ricostruire g a partire dalla conoscenza di q_g[(†)]. Ad esempio, se si considera in $\mathbb{R}^3$ la funzione $q(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 - 2x_0x_1 + 6x_0x_2 - 3x_1^2 + 4x_1x_2$, si verifica con un calcolo diretto che si tratta della funzione associata all'applicazione bilineare simmetrica g, di matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica. Si osservi però che, per una diversa scelta della base su V, la funzione q_g viene associata ad un diverso polinomio (omogeneo, di secondo grado) nelle nuove coordinate e quindi, possiamo pensare alla funzione $q_g : v \mapsto g(v, v)$ come ad un "polinomio omogeneo di secondo grado, a meno della scelta delle coordinate". Per rendere un po' più precisa questa affermazione diamo la seguente

1.18 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale sul corpo C. Una funzione $q : V \to C$ si dice una *forma quadratica* se $q(\alpha v) = \alpha^2 q(v)$, qualsiasi siano $\alpha \in C$ e $v \in V$, ed inoltre l'applicazione $g_q(v, w) := q(v + w) - q(v) - q(w)$ è bilineare (simmetrica).

Osserviamo che le considerazioni precedenti si possono riassumere dicendo che vi è una corrispondenza biunivoca tra forme quadratiche su V ed applicazioni bilineari simmetriche su $V \times V$.

Esercizio 1.4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo C.
(a) Si mostri che le forme quadratiche su V formano uno spazio vettoriale $\mathscr{F}$ su C, rispetto alle usuali operazioni di somma tra funzioni e di prodotto di funzioni per costanti.

(†) Si osservi che, se g non fosse simmetrica, varrebbero comunque le osservazioni fatte eccetto l'ultima relazione che diverrebbe $q_g(v + w) - q_g(v) - q_g(w) = g(v, w) + g(w, v)$ che mostra come da q_g si possa ricostruire la parte simmetrica dell'applicazione g (cf. *Proposizione IV.1.7*). Infatti, se g fosse alternante, l'applicazione q_g ad essa associata sarebbe identicamente nulla e quindi potremmo modificare g, sommando applicazioni bilineari alternanti, senza modificare l'applicazione q_g.

(b) Fissata una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V ed una forma quadratica $q : V \to C$, si verifichi l'uguaglianza

$$q(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 q(v_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j [q(v_i + v_j) - q(v_i) - q(v_j)].$$

(c) Si deduca da (b) che $\dim_C \mathscr{F} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. □

Esercizio 1.5. Sia V uno spazio vettoriale sul corpo C.
(a) Sia $\ell : V \to C$ una forma lineare ($\ell \in \mathrm{Hom}_C(V, C)$) e si verifichi che $\ell(v + w) - \ell(v) - \ell(w) = 0$ per ogni coppia di vettori $v, w \in V$.
(b) Sia $q : V \to C$ una forma quadratica e si verifichi che $q(u + v + w) - q(u + v) - q(u + w) - q(v + w) + q(u) + q(v) + q(w) = 0$ per ogni terna di vettori $u, v, w \in V$. □

Esercizio 1.6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo C, di caratteristica diversa da 2, sia $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare simmetrica e non degenere e supponiamo che esista in V un vettore isotropo $v \neq 0$.
(a) Si mostri che esiste un vettore isotropo w tale che $g(v, w) = 1$.
(b) Si mostri che la forma quadratica q_g è suriettiva; ovvero che, fissato comunque $c \in C$, esiste un vettore $x \in V$ tale che $g(x, x) = c$. □

⋆Esercizio 1.7. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo C, di caratteristica 2, e si indichino con $\mathscr{F}$ e $\mathscr{B}$ rispettivamente gli spazi vettoriali delle forme quadratiche e delle applicazioni bilineari simmetriche su V. Siano poi $\varphi : \mathscr{B} \to \mathscr{F}$ e $\psi : \mathscr{F} \to \mathscr{B}$ le applicazioni definite ponendo $\varphi(g) = q_g$ e $\psi(q) = g_q$. Si verifichi che $\ker \psi = \operatorname{im} \varphi$ e $\ker \varphi = \operatorname{im} \psi$ e si calcolino le dimensioni di tali sottospazi. □

Esercizio 1.8. *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, ed i tre sottospazi*

$$U_1 = \langle e_1, e_2 \rangle, \qquad U_2 = \langle e_1 + e_3, 2e_1 + e_4 \rangle, \qquad U_3 = \langle e_1 - e_3, e_2 - e_4 \rangle.$$

Si determini, se esiste, un'applicazione bilineare simmetrica, non degenere, $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ per cui i tre sottospazi siano tutti e tre isotropi, e si abbia $g(e_1, e_4) = 1$.

Svolgimento. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

la matrice di un'applicazione bilineare simmetrica, rispetto alla base canonica. Affinchè i tre sottospazi dati siano isotropi, deve aversi

$$\begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{12} = 0 \\ a_{22} = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_{11} + 2a_{13} + a_{33} = 0 \\ 2a_{11} + 2a_{13} + a_{14} + a_{34} = 0 \\ 4a_{11} + 4a_{14} + a_{44} = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_{11} - 2a_{13} + a_{33} = 0 \\ a_{12} - a_{23} - a_{14} + a_{34} = 0 \\ a_{22} - 2a_{24} + a_{44} = 0 \end{cases},$$

rispettivamente. Unendo le varie equazioni, si ottiene un sistema di 9 equazioni lineari omogenee, di rango 9, avente come incognite le 10 entrate indipendenti della matrice simmetrica A. Un tale sistema ha infinite soluzioni, tutte proporzionali tra loro, e la condizione $g(e_1, e_4) = 1$ determina univocamente la matrice di g, che è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ciò conclude la discussione. □

2. Classificazione

Nella sezione precedente abbiamo osservato che fissare una base su di un C-spazio vettoriale V, di dimensione n, permette di associare ad un'applicazione bilineare $g : V \times V \to C$ una matrice quadrata $G \in M_n(C)$ e che due matrici G ed H rappresentano la stessa applicazione bilineare rispetto a basi distinte se, e solo se, esiste una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}_n(C)$ tale che $H = {}^tPGP$ (cf. *Proposizione IV.1.8*). In questo modo si definisce una relazione di equivalenza tra matrici (chiamata talvolta *congruenza*), ed in questa sezione vogliamo studiare le classi di equivalenza di matrici simmetriche o alternanti rispetto a questa relazione. In base a quanto visto ciò significa anche studiare le equazioni omogenee di secondo grado (ed i loro zeri) a meno di cambiamenti di coordinate. In particolare, il lavoro di classificazione consisterà nel determinare delle opportune basi rispetto a cui la matrice di un'applicazione bilineare assume una "forma canonica".

Cominciamo trattando il caso più semplice, ovvero le applicazioni bilineari alternanti.

2.1 Osservazione. [*Applicazioni bilineari alternanti*] Sia V un C-spazio vettoriale di dimensione finita e $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare alternante e non-degenere. Allora, dato un vettore $v_1 \neq 0$, deve esistere un vettore w' tale che $g(v_1, w') = \alpha \neq 0$ e, considerando il vettore $w_1 = \frac{1}{\alpha}w'$, si ha $\langle v_1, w_1\rangle = \langle v_1, w'\rangle$ e $g(v_1, w_1) = 1$. Dunque, la restrizione di g al sottospazio $\langle v_1, w_1\rangle$ è non-degenere e quindi, si ha $V = \langle v_1, w_1\rangle \oplus \langle v_1, w_1\rangle^\perp$ (cf. *Teorema IV.1.14*).

Ragionando analogamente sul sottospazio $\langle v_1, w_1\rangle^\perp$, si ottiene la decomposizione

$$\langle v_1, w_1\rangle^\perp = \langle v_2, w_2\rangle \oplus \langle v_1, w_1, v_2, w_2\rangle^\perp ,$$

con $g(v_2, w_2) = 1$. Quindi, ragionando analogamente, si arriva alla decomposizione:

$$V = \langle v_1, w_1\rangle \oplus \langle v_2, w_2\rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n, w_n\rangle$$

con gli n sottospazi a due a due ortogonali e $g(v_i, w_i) = 1$. In particolare, $\dim_C V = 2n$ è un numero pari, perchè la restrizione di g è degenere su ogni sottospazio di dimensione 1 e quindi su ogni sottospazio di dimensione dispari. Dunque, considerando la base $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$ di V, l'applicazione bilineare g ha matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix},$$

ove si sono scritti blocchi di ordine n.

Possiamo quindi concludere osservando che una matrice antisimmetrica, non-degenere, G, deve avere ordine pari, $2n$ e, in tal caso G è congruente alla matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

La classificazione delle applicazioni bilineari simmetriche, risulta invece più complessa, perchè dipende dal corpo C su cui è definito lo spazio vettoriale V (cosa che era prevedibile, trattandosi dello studio di equazioni di grado maggiore di 1). Cominciamo quindi con alcuni fatti generali per poi dedicarci ai casi in cui il corpo di base sia $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

2.2 Definizione. Sia V un C-spazio vettoriale di dimensione finita e $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare (simmetrica e non-degenere). Una base $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V è una *base ortogonale* rispetto a g se si ha

$$g(v_i, v_j) = \begin{cases} c_i \neq 0 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

per $1 \leq i, j \leq n$.

Una base ortogonale si dice *ortonormale* se si ha $c_i = 1$ per $i = 1, \ldots, n$.

Osserviamo a margine della definizione che, se esiste una base ortogonale di V rispetto a g, allora la matrice di g rispetto a questa base è una matrice diagonale e non-degenere (sulla diagonale ci sono gli elementi $c_1, \ldots, c_n$, che sono tutti diversi da zero). Quindi può esistere una base ortogonale solo se g è un' applicazione bilineare simmetrica e non-degenere.

Esercizio 2.1. Sia V un C-spazio vettoriale di dimensione finita e $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare (simmetrica e non-degenere). I vettori $\{w_1, \dots, w_k\}$ di V sono *ortogonali* se si ha $g(w_i, w_j) = c_i\delta_{ij}$, con $c_i \neq 0$, per $1 \leq i, j \leq k$. Si mostri che in tal caso i vettori $w_1, \dots, w_k$ sono linearmente indipendenti. □

Esercizio 2.2. Sia V un C-spazio vettoriale, $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare (simmetrica e non-degenere) e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di V. Si mostri che per ogni vettore $v \in V$ si ha

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{g(v, v_i)}{g(v_i, v_i)}\, v_i.$$

si scriva la formula analoga per una base ortonormale. □

Dimostriamo ora un fatto che generalizza considerazioni ben note per il prodotto scalare (ma si osservi che il risultato è falso se il corpo degli scalari ha caratteristica 2).

2.3 Proposizione. *Siano V un C-spazio vettoriale di dimensione finita e $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare. Allora g è simmetrica e non-degenere se, e solo se, esiste una base ortogonale $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V rispetto a g.*

dim. Abbiamo visto che l'esistenza di una base ortogonale è sufficiente per affermare che g è simmetrica e non-degenere (indipendentemente da qualsiasi condizione sul corpo C). Vogliamo quindi mostrare che (se C non è di caratteristica 2) ogni applicazione bilineare simmetrica e non-degenere ammette una base ortogonale(†).

Dunque, nelle ipotesi fatte, esiste un vettore v_1 non isotropo rispetto a g e si può quindi applicare il *Teorema IV.1.14* e scrivere $V = \langle v_1\rangle \oplus \langle v_1\rangle^{\perp}$. Ora, se $\langle v_1\rangle^{\perp} = \langle 0\rangle$, V ha dimensione 1 e v_1 è una sua base ortogonale, altrimenti la restrizione di g al sottospazio $\langle v_1\rangle^{\perp}$ è non-degenere e quindi, anche in tale sottospazio esiste un vettore v_2 non isotropo. Ancora una volta siamo nelle ipotesi del *Teorema IV.1.14* e possiamo quindi scrivere $V = \langle v_1, v_2\rangle \oplus \langle v_1, v_2\rangle^{\perp}$ e ragionare analogamente a quanto sopra sul sottospazio $\langle v_1, v_2\rangle^{\perp}$. Il procedimento così delineato si arresta solo quando abbiamo ottenuto $V = \langle v_1, \dots, v_n\rangle$ con i vettori $v_1, \dots, v_n$ non isotropi ed a due a due ortogonali. **CVD** □

⋆Esercizio 2.3. Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita sul corpo C e siano $g : V \times V \to C$ ed $h : W \times W \to C$ due applicazioni bilineari simmetriche non-degeneri. Allora, ad ogni applicazione lineare $\phi : V \to W$ si può associare la sua *trasposta*, $\phi^* : W \to V$, definita ponendo $g(v, \phi^*(w)) = h(\phi(v), w)$ per ogni coppia di vettori $v \in V$ e $w \in W$.

(a) Si verifichi che la definizione è ben posta e che $\operatorname{im}\phi^* = (\ker\phi)^{\perp}$ e $\ker\phi^* = (\operatorname{im}\phi)^{\perp}$.

(b) Se $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di V relativamente a g e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ è una base ortonormale di W relativamente ad h, si verifichi che $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\phi^*) = {}^t\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$.

Che relazioni vi sono tra le due matrici se si hanno delle basi ortogonali dei due spazi?

Che relazioni vi sono tra le matrici delle due applicazioni e le matrici di g ed h se si hanno delle basi qualsiansi dei due spazi?

(c) Si verifichi che $\phi^{**} = \phi$. □

Esercizio 2.4. Sia $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_{n\times n}(C)$; la *traccia* della matrice A è il numero $\operatorname{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, ovvero la somma degli elementi posti sulla diagonale della matrice A.

(a) Se $A, B \in M_{n\times n}(C)$, si verifichi che $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

(b) Si deduca dal punto precedente che, se $P \in \mathrm{GL}_n(C)$, allora $\operatorname{tr}A = \operatorname{tr}(P^{-1}AP)$. □

⋆Esercizio 2.5. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e $\phi : V \to V$ un endomorfismo.

(a) Se $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ sono due basi dello spazio V e si considerano le matrici $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$, $B = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi)$ e $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathbf{1})$, si verifichi che $B = P^{-1}AP$.

(†) Osserviamo che l'ipotesi sulla caratteristica di C è necessaria, perchè quando $1 + 1 = 0$, le applicazioni alternanti sono particolari applicazioni bilineari simmetriche e per queste ogni vettore è isotropo (cf. *Definizione IV.1.12*) e non può quindi esistere una base ortogonale rispetto a queste applicazioni.

(b) Si utilizzi l'esercizio precedente per definire la *traccia* dell'endomorfismo ϕ, ponendo $\mathrm{tr}\phi = \mathrm{tr}\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ e si osservi che tale definizione non dipende dalla scelta della base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V. □

Esercizio 2.6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare, per cui esista una base ortonormale $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$.

(a) Data un'applicazione lineare $\phi : V \to V$, si verifichi che $\mathrm{tr}\phi = \sum_{i=1}^{n} g(v_i, \phi(v_i))$.

(b) Come si può modificare la formula precedente se $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale? □

Continuando nelle considerazioni esposte all'inizio di questo numero, possiamo enunciare la Proposizione precedente in termini di matrici, dicendo che (su un corpo C, di caratteristica diversa da 2) ogni matrice simmetrica di ordine n è congruente ad una matrice diagonale. Non è però semplice, in generale, date due matrici diagonali, dire se queste siano o meno congruenti tra loro. Cercheremo di rispondere a questo problema in alcuni casi particolari, osservando che la sua soluzione dipende essenzialmente dal corpo C su cui si sta lavorando.

2.4 Osservazione. [*Forme quadratiche su* $\mathbb{C}$] Supponiamo ora che il corpo degli scalari sia il corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi che, lo ricordiamo, è un corpo algebricamente chiuso, ovvero esistono radici per tutti i polinomi di grado positivo. Se $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale rispetto all'applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{C}$, consideriamo i vettori $w_i = \frac{1}{\sqrt{g(v_i,v_i)}} v_i$, per $i = 1, \dots, n$, ove $\sqrt{g(v_i, v_i)}$ indica una qualunque delle due radici quadrate di $g(v_i, v_i)$. Si ottiene così una base ortonormale $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ per V. Quindi possiamo dire che *sul campo* $\mathbb{C}$*, ogni applicazione bilineare simmetrica e non-degenere su uno spazio vettoriale di dimensione finita, ammette una base ortonormale*. Ciò significa che tutte le matrici invertibili e simmetriche d ordine n su $\mathbb{C}$ sono congruenti alla matrice identica $\mathbf{1}_n$, e quindi sono congruenti tra loro(*).

2.5 Osservazione. [*Forme quadratiche su* $\mathbb{R}$] Sia ora V uno spazio vettoriale reale, di dimensione n, e $g : V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare simmetrica non-degenere. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di V rispetto a g e supponiamo di aver riordinato i suoi elementi di modo che si abbia $g(v_i, v_i) > 0$ per $i = 1, \dots, r$ e $g(v_i, v_i) < 0$ per i successivi elementi della base. Possiamo considerare allora i vettori $w_i = \frac{1}{\sqrt{|g(v_i,v_i)|}} v_i$, per $i = 1, \dots, n$, ed ottenere così una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ rispetto a cui la matrice di g ha la forma $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{n-r} \end{pmatrix}$. Vogliamo mostrare che il numero r non dipende dalla scelta della base ortogonale, ma che è un invariante che (con la dimensione di V) permette di caratterizzare l'applicazione bilineare g.

Diamo ora qualche definizione che useremo nella successiva discussione.

2.6 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale reale e $g : V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare, simmetrica, non-degenere;

(a) si dice che g è *definita positiva* se $v \neq 0 \Rightarrow g(v, v) > 0$;

(b) si dice che g è *definita negativa* se $v \neq 0 \Rightarrow g(v, v) < 0$;

(c) si dice che g è *non definita* in tutti gli altri casi.

Esercizio 2.7. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e $g : V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare, simmetrica, non-degenere.

(a) Si mostri che esiste una base ortonormale rispetto a g se, e solo se, g è definita positiva.

(b) Si mostri che esistono vettori isotropi non-nulli rispetto a g se, e solo se, g è non definita. □

Possiamo ora riscrivere le osservazioni fatte all'inizio di questa osservazione e completarle nel seguente

(*) Osserviamo a margine, che quanto è stato appena mostrato per il corpo complesso, vale anche per qualsiasi campo algebricamente chiuso C, di caratteristica diversa da 2. Anzi, l'ipotesi che il campo sia algebricamente chiuso può essere in parte indebolita, perchè, come si è visto nella discussione precedente, per costruire una base ortonormale a partire da una qualsiasi base ortogonale è sufficiente che esistano in C le radici quadrate di tutti gli elementi diversi da zero, ovvero è sufficiente poter risolvere tutte le equazioni di secondo grado in C.

2.7 Teorema di Sylvester. *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e $g : V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare, simmetrica, non-degenere. Allora esistono due sottospazi W_+ e W_- tali che*
(a) $V = W_+ \oplus W_-$ e $W_- = W_+^\perp$;
(b) la restrizione di g a $W_+ \times W_+$ è definita positiva e la restrizione di g a $W_- \times W_-$ è definita negativa. Inoltre, se Z_+ e Z_- sono due sottospazi che soddisfano alle condizioni sopra, si ha $\dim W_+ = \dim Z_+$ e $\dim W_- = \dim Z_-$.

dim. Per costruire i sottospazi W_+ e W_- consideriamo una base ortogonale $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ di V e, a meno di riordinare i vettori della base e dividerli per una costante non nulla, possiamo supporre che si abbia $g(w_i, w_i) = 1$ per $i = 1, \dots, r$ e $g(w_i, w_i) = -1$ per $i = r+1, \dots, n$ per un opportuno intero r, con $0 \le r \le n$. Allora, posto $W_+ = \langle w_1, \dots, w_r \rangle$ e $W_- = \langle w_{r+1}, \dots, w_n \rangle$, i due sottospazi così definiti soddisfano alle condizioni (a) e (b) dell'enunciato.

Si tratta quindi di dimostrare che le dimensioni dei due sottospazi non dipendono dalla costruzione fatta. Siano quindi Z_+ e Z_- due sottospazi che soddisfano alle condizioni (a) e (b) e siano $s = \dim Z_+$ ed $n - s = \dim Z_-$. Si osservi che si ha $W_+ \cap Z_- = \langle 0 \rangle$ perchè la restrizione di g al primo termine è definita positiva, mentre la restrizione al secondo è definita negativa. Ciò implica (cf. [Relazioni di Grassmann], `Esercizio II.1.12`) che $n = \dim V \ge \dim(W_+ + Z_-) = r + (n - s)$; e quindi $r \le s$. Analogamente, si ha $Z_+ \cap W_- = \langle 0 \rangle$ e ciò implica che $n = \dim V \ge \dim(Z_+ + W_-) = s + (n - r)$; e quindi $s \le r$. Dalle due disuguaglianze discende $r = s$. **CVD** □

Possiamo quindi associare ad ogni applicazione bilineare, simmetrica, non-degenere su uno spazio vettoriale reale, di dimensione finita, un numero intero che la caratterizza in modo completo.

2.8 Definizione. Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, $g : V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare, simmetrica, non-degenere e W_+, W_-, due sottospazi del tipo descritto nel Teorema di Sylvester. Si chiama *segnatura* o *indice di inerzia* di g la coppia di numeri $d_+ = \dim W_+$ e $d_- = \dim W_-$, ovvero il numero intero $i(g) := \dim W_+ - \dim W_-$ [(*)].

Ciò significa che ogni matrice invertibile e simmetrica di ordine n sul campo $\mathbb{R}$ è congruente ad una matrice del tipo $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{n-r} \end{pmatrix}$ (*matrice canonica*), ove $i = 2r - n$ è l'indice di inerzia dell'applicazione bilineare associata. Quindi due tali matrici sono congruenti se, e solo se, le applicazioni bilineari associate hanno lo stesso indice di inerzia.

2.9 Esempio. Siano V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Consideriamo l'applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{R}$ di matrice

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base data.

Vogliamo determinare una base ortogonale dello spazio V e quindi una decomposizione del tipo descritto nel Teorema di Sylvester e infine scrivere la forma canonica per la matrice di g.

Il vettore v_4 non è isotropo ed un vettore $\alpha v_2 + \beta v_4$ è ortogonale a v_4 se, e solo se, $g(v_4, \alpha v_2 + \beta v_4) = 0$; ovvero se, e solo se, $\beta - 2\alpha = 0$. Dunque $u_1 = v_4$ ed $u_2 = v_2 + 2v_4$ sono ortogonali tra loro e $g(u_1, u_1) = 1$, $g(u_2, u_2) = 1$; inoltre,

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_4 v_4 \in \langle u_1, u_2 \rangle^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(v, u_1) = 0 \\ g(v, u_2) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

(*) Per le applicazioni bilineari simmetriche, non-degeneri, è equivalente conoscere la coppia di numeri (d_+, d_-) oppure la loro differenza, essendo nota la somma $d_+ + d_- = \dim V$. Nel caso di applicazioni bilineari simmetriche degeneri, la conoscenza della coppia (d_+, d_-) è equivalente alla conoscenza della differenza $i(g)$ e del *rango* di g (cf. `Esercizio IV.2.9`)

Il vettore $u = 2e_2 + e_3 + 4e_4 \in \langle u_1, u_2\rangle^\perp$ e $g(u,u) = -4$; quindi, posto $u_3 = \frac{1}{2}u = e_2 + \frac{1}{2}e_3 + 2e_4$, si ha $g(u_3,u_3) = -1$. Resta infine da determinare un generatore di $\langle u_1, u_2, u_3\rangle^\perp$, ovvero una soluzione del sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Dunque $u' = 2e_1 + e_3 - 2e_4 \in \langle u_1, u_2, u_3\rangle^\perp$ e $g(u',u') = -4$; quindi, posto $u_4 = \frac{1}{2}u' = e_1 + \frac{1}{2}e_3 - e_4$, si ha che $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ è una base ortogonale di V e la matrice di g rispetto a questa base è quella canonica, ovvero

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, i sottospazi $U_+ = \langle u_1, u_2\rangle$ ed $U_- = \langle u_3, u_4\rangle = \langle u_1, u_2\rangle^\perp$ danno una decomposizione di V del tipo descritto nel teorema di Sylvester.

Da ultimo vogliamo osservare che una matrice invertibile P per cui si abbia $B = {}^tPGP$, è la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $u_1, \dots, u_4$, rispetto alla base $\mathcal{V}$, ovvero la matrice di cambiamento di base

$$P = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(1_V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lasciamo al lettore il compito di verificare che il sottospazio $H = \langle e_1, e_3\rangle$ è un sottospazio isotropo di dimensione 2 e quindi massimale in V (perchè?).

Esercizio 2.8. Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e $g : V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare simmetrica non-degenere con indice di inerzia $i(g)$. Si mostri che i sottospazi isotropi massimali di V hanno dimensione $\dfrac{n - |i(g)|}{2}$. □

⋆Esercizio 2.9. Sia V uno spazio vettoriale reale e $g : V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare, simmetrica, degenere, di nucleo N.

(a) Se W è un sottospazio complementare ad N ($V = N \oplus W$), si mostri che la restrizione di g a W è un'applicazione bilineare (simmetrica) non-degenere.
(b) Siano W e U due sottospazi complementari ad N e si consideri su entrambi la restrizione di g. Dato comunque un vettore $w \in W$, si mostri che esiste un unico vettore $u \in U$ tale che $w - u \in N$, e che resta così definita un'applicazione lineare $\phi : w \mapsto u$, che soddisfa alla condizione $g(w_1, w_2) = g(\phi(w_1), \phi(w_2))$ per ogni coppia di vettori $w_1, w_2 \in W$ (ovvero ϕ è un'isometria di W su U [cf. *Definizione IV.3.1*]).
(c) Si osservi che il sottospazio W si decompone in $W_+ \oplus W_-$, nel modo descritto dal Teorema di Sylvester, e si chiama *segnatura* dell'applicazione bilineare, simmetrica, degenere g la coppia di numeri (d_+, d_-), ove $d_+ = \dim_{\mathbb{R}} W_+$, e $d_- = \dim_{\mathbb{R}} W_-$. Si verifichi che che la conoscenza della segnatura è equivalente alla conoscenza della dimensione del nucleo N e dell'indice di inerzia della restrizione di g al sottospazio W.
(d) Nel caso in cui $\dim_{\mathbb{R}} V = 4$ e g abbia matrice

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto ad una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, si determini N e la segnatura di g. □

Esercizio 2.10. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

(a) Si mostri che l'insieme $\mathscr{U} = \{\, B \in M_3(\mathbb{Q}) \mid \operatorname{im} B \subseteq \operatorname{im} A \,\}$ è un sottospazio di $M_3(\mathbb{Q})$ e se ne determini una base.
(b) Si consideri l'applicazione bilineare (simmetrica e non-degenere) $M_3(\mathbb{Q}) \times M_3(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$, definita da $(X, Y) \mapsto \operatorname{tr}({}^tXY)$ e si determini il sottospazio $\mathscr{U}^\perp$. □

Esercizio 2.11. *Sia $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ una matrice simmetrica ad elementi reali e, per ogni $i = 1, \dots, n$ si ponga $\delta_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1i} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$. Si mostri che, se $\delta_i \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$, allora la matrice A è congruente(†) alla matrice*

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2/\delta_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \delta_n/\delta_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Svolgimento. La dimostrazione si può fare per induzione su n. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ e sia $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare di matrice A rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$. Se $n = 1$ la tesi è banalmente vera. Vediamo ora come si può dimostrare il caso $n = 2$. Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ con $\delta_1 = a_{11} \neq 0 \neq \delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. È chiaro che, posto $w_1 = e_1$ si ha $g(w_1, w_1) = \delta_1$. Consideriamo ora un vettore w_2 determinato dalle condizioni $\langle w_2 \rangle = \langle w_1 \rangle^\perp$ e $w_2 = e_2 + ce_1$, per un opportuno $c \in \mathbb{R}$ (un tale vettore è $e_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}} e_1$). Posto $d_2 = g(w_2, w_2)$, e considerata la matrice $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(1)$, si ha

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce l'uguaglianza dei determinanti $\delta_1 d_2 = \det A = \delta_2$, che è la tesi. Quindi, sia $n > 2$ e supponiamo che l'enunciato sia vero per $n-1$. Ciò significa che, considerata la restrizione di g al sottospazio $W = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$, esistono dei vettori $w_1, \dots, w_{n-1} \in W$, tali che $w_1 = e_1$, $w_i \in \langle w_1, \dots, w_{i-1} \rangle^\perp$ e $w_i = e_i + u_i$ per un opportuno $u_i \in \langle w_1, \dots, w_{i-1} \rangle$, per $i = 2, \dots, n-1$. In particolare si ha $g(w_1, w_1) = \delta_1$ e $g(w_i, w_i) = \delta_i/\delta_{i-1}$, per $i = 2, \dots, n-1$. Scelto quindi un vettore $w_n \in \langle w_1, \dots, w_{n-1} \rangle^\perp$ con $w_n = e_n + u_n$, ed $u_n \in \langle w_1, \dots, w_{n-1} \rangle$, sia $d_n = g(w_n, w_n)$, e considerata la matrice $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & c_{n-1\,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si ha ancora una volta l'identità

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2/\delta_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{12} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ c_{1n} & \dots & c_{n-1\,n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & c_{n-1\,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi l'uguaglianza dei determinanti $\delta_{n-1} d_n = \det A = \delta_n$, che è la tesi. □

Esercizio 2.12. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, ed i tre sottospazi

$$U_1 = \langle e_1, e_2 \rangle, \qquad U_2 = \langle e_1 + e_3, 2e_1 + e_4 \rangle, \qquad U_3 = \langle e_1 - e_3, e_2 - e_4 \rangle.$$

(†) Il risultato qui enunciato per il corpo $\mathbb{R}$, è vero su ogni corpo C, di caratteristica diversa da 2, e viene talvolta indicato come *Teorema di Jacobi*. Nel caso del corpo reale, mette bene in evidenza le relazioni esistenti tra i segni dei minori principali di A e l'indice di inerzia dell'applicazione bilineare da essa rappresentata.

Si determini, se esiste, un'applicazione bilineare simmetrica, non degenere, $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ per cui i tre sottospazi siano tutti e tre isotropi, e si abbia $g(e_1, e_4) = 1$. □

Esercizio 2.13. Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e $g : V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare simmetrica non-degenere. Sia H un sottospazio isotropo massimale, di dimensione $h < \frac{n}{2}$, e si scriva $H^\perp = H \oplus W$, ove W è un qualsiasi complementare di H in $H^\perp$.
(a) È vero o falso che la restrizione di g a W è un'applicazione bilineare definita (positiva o negativa)?
(b) È vero o falso che l'indice di inerzia di g coincide con l'indice di inerzia della restrizione di g a W?
(c) Si calcoli $i(g)$ nel caso in cui $n = 8$, $h = 3$ ed $i(g) < 0$. □

Esercizio 2.14. *Si considerino le due forme lineari $\ell_1, \ell_2 : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}$, definite da $\ell_1(x) = 3x_1 - 2x_3 + x_4$ e $\ell_2(x) = 2x_2 - x_3 + x_4$, al variare di $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4$.*

(a) Si scriva la matrice A dell'applicazione bilineare simmetrica associata alla forma quadratica $q(x) = 2\ell_1(x)\ell_2(x)$ e si verifichi che A ha rango 2.

(b) Si consideri l'applicazione bilineare simmetrica $g : \mathbb{Q}^4 \times \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}$, di matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ -5 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

e sia $q_g(x) := g(x, x)$ la forma quadratica ad essa associata. Si verifichi che B ha rango 2 e si determinino due forme lineari $m_1(x)$ ed $m_2(x)$ tali che $q_g(x) = 2m_1(x)m_2(x)$.

Svolgimento. (a). Le forme lineari ℓ_1 ed ℓ_2 hanno matrici (rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{Q}^4$ e $\mathbb{Q}$) $a = (0, 2, -1, 1)$ e $b = (3, 0, -2, 1)$ rispettivamente. Dunque, l'applicazione bilineare simmetrica g ha matrice

$$A = {}^t\!ab + {}^t\!ba = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (3, 0, -2, 1) + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} (0, 2, -1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & -4 & 2 \\ -3 & -4 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poichè le colonne di A sono combinazione lineare delle colonne ${}^t\!a$ e ${}^t\!b$, è chiaro che il suo rango non può essere maggiore di 2, ed è uguale a 2 perchè vi sono dei minori di ordine 2 diversi da zero.

(*b*). È facile scrivere la prima e la quarta colonna di B come combinazione lineare delle due colonne centrali, che sono tra loro indipendenti, e quindi B ha rango 2.

Se la forma quadratica q_g si decompone come prodotto di due forme lineari, ciò significa che esistono due sottospazi isotropi di dimensione 3 in V relativamente a g; ovvero i due iperpiani che corrispondono al luogo degli zeri delle due forme lineari. I due sottospazi isotropi massimali dovranno contenere entrambi il nucleo di g, $N = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e, per determinarli completamente, sarà sufficiente conoscere due vettori isotropi, linearmente indipendenti, appartenenti ad un sottospazio di V complementare ad N. Consideriamo allora il sottospazio $U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, complementare ad N, e la restrizione di g ad U, che ha matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Da ciò si vede che i due generatori fissati di U sono vettori isotropi rispetto a g, e quindi si conclude che i due sottospazi isotropi massimali sono

$$H_1 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad H_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Le forme lineari cercate sono quindi equazioni di tali sottospazi, ovvero $m_1(x) = x_1 + 2x_3 - 2x_4$ ed $m_2(x) = 2x_1 + x_2 - x_4$. □

Esercizio 2.15. Siano V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Si consideri l'applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{R}$ di matrice

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base data.

Si consideri ora lo spazio vettoriale reale W con l'applicazione bilineare $h : W \times W \to \mathbb{R}$ di matrice

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$.

Si dica se esiste un'isometria $\phi : W \to V$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice di una tale ϕ rispetto alle basi date. □

Esercizio 2.16. *Uno spazio di probabilità finito è il dato di un insieme finito S e di una funzione $\mu : S \to \mathbb{R}$ tale che $\mu(s) \geq 0$ per ogni $s \in S$ e $\sum_{s\in S} \mu(s) = 1$. Si consideri lo spazio vettoriale reale $\mathscr{F}(S)$ di tutte le funzioni $f : S \to \mathbb{R}$, dotato della forma lineare $E : \mathscr{F}(S) \to \mathbb{R}$, definita da $E(f) = \sum_{s\in S} f(s)\mu(s)$, e su $\mathscr{F}(S)$ si ponga l'applicazione bilineare simmetrica $f * g = \sum_{s\in S} f(s)g(s)\mu(s)$.*

Gli elementi di $\mathscr{F}(S)$ sono detti variabili casuali, mentre gli elementi di $\ker E$ *sono detti variabili casuali normalizzate. Data una variabile casuale f ed una costante $a \in \mathbb{R}$, si definisce la probabilità che f assuma il valore a come il numero $P(f = a) := \sum_{f(s)=a} \mu(s)$.*

(a) Si mostri che ogni elemento di $\mathscr{F}(S)$ differisce per una funzione costante da una variabile casuale normalizzata.

(b) Data una variabile casuale f, si mostri che $f = \sum_{a\in\mathbb{R}} a\chi_{f=a}$, ove $\chi_{f=a}$ è la funzione definita da

$$\chi_{f=a}(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(s) = a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

e gli addendi sono tutti nulli, ad eccezione di un numero finito.

(c) Date due variabili casuali f e g si dice che f e g sono indipendenti se $P(f = a, g = b) = P(f = a)P(g = b)$ per ogni coppia di numeri reali a, b. Si mostri che, se f e g sono due variabili casuali normalizzate indipendenti, allora f e g sono ortogonali, ovvero $f * g = 0$.

Svolgimento. (a). Sia $a \in \mathbb{R}$ e consideriamo la funzione costante $a \in \mathscr{F}(S)$ ($a(s) = a$ per ogni $s \in S$). Allora $E(a) = a\sum_{s\in S} \mu(s) = a$. Dunque, data una variabile casuale f, con $E(f) = a$, la variabile casuale $f - a$ (la funzione costante a) è normalizzata, perchè $E(f - a) = E(f) - E(a) = 0$.

(b). La funzione $\chi_{f=a}$ è la funzione caratteristica del sottoinsieme dei punti $s \in S$ ove $f(s) = a$. Data una variabile casuale f, per tutti gli $a \in \mathbb{R}$, eccetto un numero finito, si ha che $\chi_{f=a}$ è la funzione identicamente nulla. Quindi la somma $\sum_{a\in\mathbb{R}} a\chi_{f=a}$ ha solo un numero finito di addendi diversi da zero. Inoltre, dato $s \in S$, con $f(s) = c$, si ha $\chi_{f=a}(s) = 0$ se $a \neq c$ e $\chi_{f=c}(s) = 1$ e quindi $\sum_{a\in\mathbb{R}} a\chi_{f=a}(s) = c = f(s)$. Poichè le due funzioni coincidono qualunque sia $s \in S$, si ha l'uguaglianza richiesta.

(c). Data una variabile casuale $f = \sum_{a\in\mathbb{R}} a\chi_{f=a}$, essendo E una forma lineare, si ha

$$E(f) = \sum_{a\in\mathbb{R}} aE(\chi_{f=a}) = \sum_{a\in\mathbb{R}} aP(f=a).$$

Se f e g sono due variabili casuali, allora

$$f * g = E(fg) = E\left(\sum_{a\in\mathbb{R}} a\chi_{f=a} \sum_{b\in\mathbb{R}} b\chi_{g=b}\right) = E\left(\sum_{a,b\in\mathbb{R}} ab\chi_{f=a}\chi_{g=b}\right) =$$
$$= \sum_{a,b\in\mathbb{R}} abE(\chi_{f=a}\chi_{g=b}) = \sum_{a,b\in\mathbb{R}} abP(f=a, g=b).$$

Poiché f e g sono indipendenti e normalizzate, se ne deduce che

$$f * g = E(fg) = \sum_{a,b\in\mathbb{R}} abP(f=a, g=b) = \sum_{a,b\in\mathbb{R}} abP(f=a)\,P(g=b) = E(f)E(g) = 0$$

che è quanto dovevamo dimostrare. □

⋆Esercizio 2.17. Si consideri il semipiano H formato dai numeri complessi con parte immaginaria positiva. Si indichi con $SL(2,\mathbb{R}) = \{\gamma \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det\gamma = 1\}$ il gruppo simplettico di ordine 2 sul campo dei numeri reali. Si definisca un'azione di $SL(2,\mathbb{R})$ su H ponendo

$$\gamma(t) = \frac{c+dt}{a+bt} \qquad \text{ove } t \in H \text{ e } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}).$$

(a) Si mostri che $\gamma(t) \in H$ e che $\gamma_1(\gamma_2(t)) = [\gamma_1\gamma_2](t)$.
(b) Si mostri che qualunque sia $t \in H$, esiste $\gamma \in SL(2,\mathbb{R})$ tale che $\gamma(i) = t$, ove i è l'unità immaginaria.
(b′) Si deduca da (b) che per ogni coppia di numeri complessi $t_1, t_2 \in H$ esiste $\gamma \in SL(2,\mathbb{R})$ tale che $\gamma(t_1) = t_2$. [L'azione di $SL(2,\mathbb{R})$ su H è transitiva.]
(c) Sia i l'unità immaginaria. Si mostri che $\gamma(i) = i$ se, e solo se, $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$, per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$.
□

Esercizio 2.18. Sia $M_2(C)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi nel campo C (di caratteristica diversa da 2). Si dimostri che l'applicazione $g\colon M_2(C) \times M_2(C) \to C$ definita ponendo

$$g(A,B) = \det(A+B) - \det A - \det B \quad ,$$

è bilineare e simmetrica.
(a) Vi sono vettori isotropi relativamente a g ?
(b) Tramite la base canonica di $M_2(C)$

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si scriva la matrice di g e si dica se è o meno degenere.
(c) Se g è non–degenere, si determini una base ortogonale relativamente a g. □

⋆Esercizio 2.19. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$ sul corpo finito C, di caratteristica diversa da 2 e sia $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare simmetrica e non degenere.
(a) Si mostri che la forma quadratica q_g è suriettiva; ovvero che, fissato comunque $c \in C$, esiste un vettore $x \in V$ tale che $g(x,x) = c$.

(b) Si mostri che esiste una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ rispetto a cui g ha matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d \end{pmatrix};$$

ove la costante d (detta il *discriminante* di g o di q_g) è determinata da g a meno di moltiplicazione per il quadrato di un elemento di C.

(c) Sia $\dim_C V \geq 3$ e si mostri che esiste almeno un vettore isotropo $v \neq 0$ rispetto a g. □

⋆Esercizio 2.20. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul corpo C, di caratteristica 2, e sia $g : V \times V \to C$ l'applicazione bilineare di matrice $\begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,0\,1 \\ 0\,1\,0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di V. Si verifichi che i vettori $w_1 = v_1 + v_2 + v_3$, $w_1 = v_1 + v_2$, $w_1 = v_1 + v_3$ sono una base ortonormale di V rispetto a g. □

⋆Esercizio 2.21. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul corpo C, di caratteristica 2, e sia $g : V \times V \to C$ un'applicazione bilineare simmetrica e non-degenere. Allora esiste una base ortogonale rispetto a g se, e solo se, esiste in V un vettore non isotropo. In particolare, se C ha solo un numero finito di elementi, allora nelle ipotesi sopra, esiste una base ortonormale. [**Sugg.** Si mostri che in un corpo finito, di caratteristica 2, ogni elemento è un quadrato.] □

3. Isometrie

Come le applicazioni lineari tra due spazi vettoriali sono le applicazioni tra i due insiemi sottostanti che rispettano la struttura vettoriale, ora, dati due spazi vettoriali, ciascuno dotato di un'applicazione bilineare non degenere, vogliamo considerare le applicazioni lineari che rispettino questo ulteriore dato.

3.1 Definizione. Siano V e V' due spazi vettoriali sul campo C e siano $g : V \times V \to C$ e $g' : V' \times V' \to C$ due applicazioni bilineari non-degeneri. Un'applicazione lineare $\phi : V \to V'$ è un'*isometria* di (V, g) su (V', g') se, per ogni coppia di vettori $v, w \in V$ si ha $g(v, w) = g'(\phi(v), \phi(w))$.

Gli spazi (V, g) e (V', g') si dicono *isometrici* se esiste un isomorfismo $\phi : V \to V'$ tale che, sia ϕ, che ϕ^{-1} siano isometrie.

Ricordiamo che (cf. `Esercizio IV.3.1` ed il suo svolgimento) la condizione posta che un'isometria sia un'applicazione lineare non è restrittiva perchè, nelle notazioni della definizione precedente, se $\phi : V \to V'$ è una biiezione che soddisfa alla condizione $g(v, w) = g'(\phi(v), \phi(w))$, per ogni coppia di vettori $v, w \in V$; allora ϕ è necessariamente un'applicazione lineare. Infatti, in base alla condizione data, qualsiasi siano $v, w, z \in V$ ed $\alpha \in C$, si ha

$$g'(\phi(v + w) - \phi(v) - \phi(w), \phi(z)) = g(v + w, z) - g(v, z) - g(w, z) = 0$$
$$g'(\phi(\alpha v) - \alpha\phi(v), \phi(z)) = g(\alpha v, z) - \alpha g(v, z) = 0$$

e quindi $\phi(v+w) = \phi(v)+\phi(w)$ e $\phi(\alpha v) = \alpha\phi(v)$, dato che g' è non-degenere e ϕ è una biiezione e quindi in luogo di $\phi(z)$ può essere posto qualsiasi vettore di V'.

Vediamo qualche altra facile conseguenza della definizione.

3.2 Proposizione. *Siano V, V', V'' spazi vettoriali sul campo C e $g : V \times V \to C$, $g' : V' \times V' \to C$, $g'' : V'' \times V'' \to C$ applicazioni bilineari non-degeneri.*

(a) Ogni isometria $\phi : V \to V'$ è iniettiva.

(b) Se $\psi : V \to V'$ è un isomorfismo di spazi vettoriali ed un isometria, allora $\psi^{-1} : V' \to V$ è un'isometria.

(c) Se $\psi : V \to V'$ e $\phi : V' \to V''$ sono isometrie, allora $\phi \circ \psi : V \to V''$ è un'isometria.

dim. (a). Infatti, dato $v \in \ker \phi$, comunque si scelga il vettore $x \in V$, si ha $g(v,x) = g'(\phi(v), \phi(x)) = g'(0, \phi(x)) = 0$ e quindi $v = 0$, perchè g è non-degenere.
(b). Poichè ψ è un'isometria, qualunque siano $v', w', \in V'$, si ha

$$g(\psi^{-1}(v'), \psi^{-1}(w')) = g'(\psi(\psi^{-1}(v')), \psi(\psi^{-1}(w'))) = g'(v', w')$$

e quindi anche ψ^{-1} è un'isometria.
(c). Infatti, dati $v, w \in V$, si ha $g''(\phi(\psi(v)), \phi(\psi(w))) = g'(\psi(v), \psi(w)) = g(v,w)$. **CVD** □

3.3 Corollario. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e $g : V \times V \to C$, un'applicazione bilineare non-degenere.*

(a) Le isometrie $\phi : V \to V$ formano un sottogruppo I_g di $\mathrm{GL}(V)$.

(b) Se $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V e G la matrice di g rispetto a tale base, allora una matrice $P \in \mathrm{GL}_n(C)$ è la matrice di un'isometria rispetto alla base $\mathcal{V}$ se, e solo se, ${}^tPGP = G$.

dim. (a). In base alla *Proposizione IV.3.2*,(a), ogni isometria $\phi : V \to V$ è un elemento di $\mathrm{GL}(V)$. Inoltre, (b) e (c), uniti all'ovvia osservazione che l'identità $1_V : V \to V$ è un'isometria, permettono di concludere che le isometrie di (V, g) formano un sottogruppo di $\mathrm{GL}(V)$.
(b). Se $\phi : V \to V$ è un'applicazione lineare e $P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$, allora l'elemento di posto (i,j) del prodotto ${}^tPGP$ è $g(\phi(v_i), \phi(v_j))$. D'altra parte l'elemento di posto (i,j) di G è $g(v_i, v_j)$ e ϕ è un'isometria se, e solo se, questi termini sono uguali per ogni posto (i,j). **CVD** □

Dunque, dati uno spazio vettoriale V di dimensione n ed un'applicazione bilineare non-degenere $g : V \times V \to C$, la scelta di una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, permette di identificare il sottogruppo I_g delle isometrie di (V, g) con il gruppo di matrici $\{\, P \in \mathrm{GL}_n(C) \mid {}^tPGP = G \,\}$, ove G è la matrice di g rispetto alla base data. Ovviamente, il gruppo di matrici che si ottiene *dipende* dalla scelta della base e quindi, in corrispondenza a scelte diverse della base si possono ottenere vari sottogruppi di $\mathrm{GL}_n(C)$ tra loro isomorfi. Si osservi che, dalla relazione ${}^tPGP = G$ e dal fatto che $\det G \neq 0$, si deduce che $(\det P)^2 = 1$. Ricordando il Teorema di Binet, si può affermare che I_g contiene il sottogruppo delle *isometrie speciali*

$$SI_g = \{\, P \in I_g \mid \det P = 1 \,\} \subseteq \mathrm{SL}_n(C) = \{\, P \in \mathrm{GL}_n(C) \mid \det P = 1 \,\}$$

Diamo ora qualche cenno su alcuni notevoli gruppi di isometrie.

3.4 Il gruppo ortogonale. Si chiamano *trasformazioni ortogonali* le isometrie dello spazio C^n dotato del prodotto scalare, ovvero dell'applicazione bilineare simmetrica avente matrice $\mathbf{1}_n$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$. Il *gruppo ortogonale* $O_n(C)$ è quindi il gruppo delle trasformazioni ortogonali su C. Se scriviamo le matrici delle trasformazioni ortogonali rispetto alla base canonica (o ad una qualunque base ortonormale), possiamo identificare il gruppo ortogonale con

$$O_n(C) = \left\{\, P \in \mathrm{GL}_n(C) \mid {}^tPP = \mathbf{1}_n \,\right\}.$$

Esercizio 3.1. Sia $C = \mathbb{R}$. Si mostri che

$$SO_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \;\middle|\; \vartheta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

□

Esercizio 3.2. Si verifichi che la matrice

$$R = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

appartiene ad SO_3 e si mostri che esiste un sottospazio vettoriale $H \subset \mathbb{R}^3$, di dimensione 1, tale che $Rv = v$ per ogni $v \in H$. □

Esercizio 3.3. Sia $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e si consideri la matrice $A - x\mathbf{1}_3$, ove x è un'indeterminata. Si verifichi che $p(x) = \det(A - x\mathbf{1}_3)$ è un polinomio di terzo grado nella x, e quindi che esiste almeno un numero reale c tale che $p(c) = 0$.

Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di matrice A rispetto alla base canonica, e si concluda che esiste un sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $\phi(w) = cw$ per ogni $w \in W$. □

*Esercizio 3.4. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'isometria di matrice $X \in SO_3$, rispetto alla base canonica.

(a) Si mostri che esiste un sottospazio vettoriale $H \subseteq \mathbb{R}^3$, di dimensione maggiore o uguale ad 1, tale che $\phi(v) = v$ per ogni $v \in H$.

(b) Si osservi che ϕ induce un'isometria del sottospazio $H^\perp$ e quindi che $\dim_{\mathbb{R}} H > 1$ se, e solo se, $\phi = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^3}$.

(c) Si mostri che esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, concorde con l'orientamento definito dalla base canonica, tale che ϕ abbia una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

per un opportuno $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

(d) Si utilizzi l'`Esercizio IV.2.5` per concludere che $2\cos\vartheta = \operatorname{tr} X - 1$. □

Esercizio 3.5. Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare. Data una trasformazione ortogonale $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, si chiama *asse* dell'isometria il sottospazio $H_\phi = \{\, v \in \mathbb{R}^n \mid \phi(v) = v \,\}$. Dato un vettore $v \neq \mathbf{0}$, si consideri l'applicazione $\sigma_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definita ponendo $\sigma_v(x) = x - 2\frac{v\cdot x}{v\cdot v}v$.

(a) Si verifichi che σ_v è un'isometria, avente come asse il sottospazio $\langle v\rangle^\perp$ e che $\sigma_v(\sigma_v(x)) = x$ per ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ [*simmetria assiale* di asse $\langle v\rangle^\perp$].

(b) Si verifichi che $\sigma_v = \sigma_w$ se, e solo se, $\langle v\rangle = \langle w\rangle$. Si verifichi inoltre che $\sigma_v \circ \sigma_w = \sigma_w \circ \sigma_v$ se, e solo se, $v \cdot w = 0$; in tal caso, posto $\phi = \sigma_v \circ \sigma_w$, si ha $\phi(x) = -x$ per ogni $x \in \langle v, w\rangle$ e $\phi(y) = y$ per ogni $y \in \langle v, w\rangle^\perp$.

(c) Si mostri che, se ϕ è una trasformazione ortogonale di $\mathbb{R}^n$ e l'asse H_ϕ di ϕ ha dimensione $n-1$, allora, $\phi = \sigma_v$ ove $\mathbf{0} \neq v \in H_\phi^\perp$.

(d) Si mostri che $\det \sigma_v = -1$.

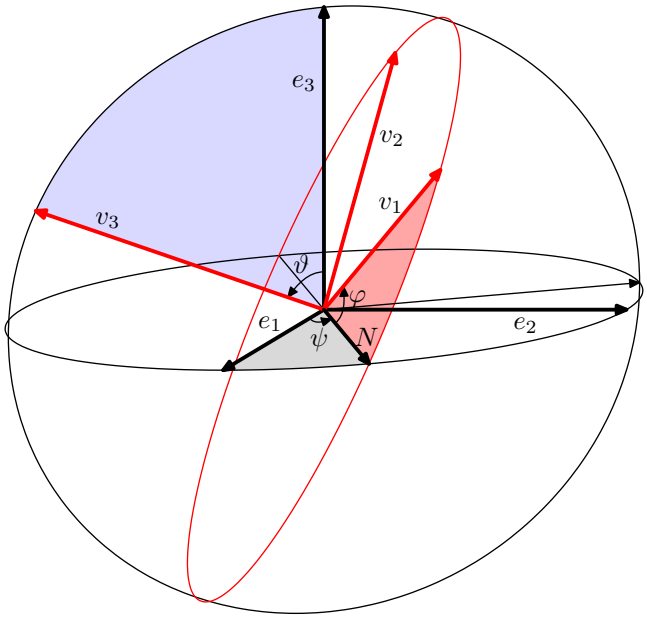
(e) Si mostri che ogni trasformazione ortogonale di $\mathbb{R}^n$ è composizione di, al più, n simmetrie assiali. □

3.5 Osservazione. [*Angoli di Eulero*] Ogni trasformazione ortogonale $\Phi \in SO_3(\mathbb{R})$, è composizione di 3 rotazioni. I tre angoli di rotazione sono gli *Angoli di Eulero* e la loro conoscenza permette di determinare Φ.

Sia $\Phi(e_1) = v_1$, $\Phi(e_2) = v_2$, $\Phi(e_3) = v_3$. Sia ϑ l'angolo che porta e_3 su v_3. Se $\vartheta = 0$ o $\vartheta = \pi$, allora Φ è una rotazione del piano $\langle e_1, e_2\rangle$, oppure è la composizione di una tale rotazione con un ribaltamento dell'asse e_3. Altrimenti $\langle e_1, e_2\rangle \cap \langle v_1, v_2\rangle$ è una retta detta la *linea dei nodi*. Sia N il versore di tale retta per cui $\vartheta \in [0, \pi]$ ($N = \frac{e_3 \times v_3}{\|e_3 \times v_3\|}$).

Siano poi $\psi \in [0, 2\pi]$ l'ampiezza della rotazione del piano $\langle e_1, e_2\rangle$ che porta e_1 su N e $\varphi \in [0, 2\pi]$ l'ampiezza della rotazione del piano $\langle v_1, v_2\rangle$ che porta N su v_1. Allora possiamo portare i vettori della base e_1, e_2, e_3, ordinatamente sui vettori v_1, v_2, v_3 con le seguenti trasformazioni:

- rotazione di asse e_3 ed angolo ψ, seguita da
- rotazione di asse N ed angolo ϑ, seguita da
- rotazione di asse v_3 ed angolo φ.



I tre angoli così determinati, prendono rispettivamente il nome di

ψ angolo di PRECESSIONE
φ angolo di ROTAZIONE PROPRIA
ϑ angolo di NUTAZIONE

Vediamo ora come sia possibile determinare la matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\Phi)$ a partire dai tre angoli di Eulero.

In base alla decomposizione di Φ, si ha $N = \cos\psi e_1 + \sin\psi e_2$. Si considerino poi i vettori

$$N' = -\sin\psi e_1 + \cos\psi e_2 \in \langle e_1, e_2\rangle \cap \langle N\rangle^\perp\,, \qquad N'' = \cos\vartheta N' + \sin\vartheta e_3 \in \langle v_1, v_2\rangle \cap \langle N\rangle^\perp\,,$$

e si osservi che

$$v_1 = \cos\varphi N + \sin\varphi N'', \qquad v_2 = -\sin\varphi N + \cos\varphi N'', \qquad v_3 = -\sin\vartheta N' + \cos\vartheta e_3.$$

Da ciò si ricava

$$A = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\vartheta & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\vartheta & \sin\psi\sin\vartheta \\ \cos\psi\sin\varphi\cos\vartheta + \sin\psi\cos\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\vartheta & -\cos\psi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per ricordare gli angoli di Eulero, a volte, si usa il simbolo $R_{(\psi,\vartheta,\varphi)}$ per indicare la matrice A scritta sopra.

3.6 Il gruppo di Lorenz. Si chiamano *trasformazioni di Lorenz* le isometrie dello spazio di Minkovsky $\mathbb{R}^4$, dotato dell'applicazione bilineare g, di matrice $J = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_4\}$. Il *gruppo di Lorenz*, indicato talvolta con il simbolo $O_{3,-1}(\mathbb{R})$ è quindi il gruppo delle trasformazioni di Lorenz.

Esercizio 3.6. Si considerino sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ le due applicazioni bilineari g e g', di matrici

$$J = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad J' = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&-c^2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$, ove $c > 0$ è una costante fissata.

(a) Si consideri l'applicazione $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice

$$P = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&c \end{pmatrix}$$

e si verifichi che ϕ è un'isometria di $(\mathbb{R}^4, g')$ su $(\mathbb{R}^4, g)$; ovvero che $g(\phi(v), \phi(w)) = g'(v, w)$ per ogni coppia di vettori $v, w \in \mathbb{R}^4$.

(b) Se X è la matrice (rispetto alla base canonica) di un'isometria di $(\mathbb{R}^4, g)$, si verifichi che $P^{-1}XP$ è la matrice (rispetto alla base canonica) di un'isometria di $(\mathbb{R}^4, g')$. □

Se scriviamo le matrici delle trasformazioni ortogonali rispetto ad una base *standard* (rispetto alla quale g ha matrice J), possiamo identificare il gruppo di Lorenz con il gruppo di matrici

$$O_{3,-1}(\mathbb{R}) = \left\{ P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) \mid {}^tPJP = J \right\}.$$

Sia e_4 il quarto vettore della base canonica e consideriamo il sottogruppo G di $O_{3,-1}(\mathbb{R})$ formato dalle applicazioni $\rho : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che $\rho(e_4) = e_4$. Essendo $\langle e_1, e_2, e_3\rangle = \langle e_4\rangle^{\perp}$, ne consegue che $\rho(\langle e_1, e_2, e_3\rangle) \subseteq \langle e_1, e_2, e_3\rangle$ e quindi che la matrice di ρ è del tipo $\begin{pmatrix} P & \mathbf{0} \\ {}^t\mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$, ove $P \in O_3(\mathbb{R})$. Dunque G è un sottogruppo del gruppo di Lorenz isomorfo al gruppo ortogonale di ordine 3 e questa osservazione si esprime spesso dicendo che le trasformazioni di Galilei sono particolari trasformazioni di Lorenz, ovvero quelle che avvengono a *tempo costante*.

Esercizio 3.7. Sia T il sottoinsieme dello spazio di Minkovsky $(\mathbb{R}^4, g)$, formato dai vettori v tali che $g(v, v) < 0$ e sia $J = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$ la matrice di g rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ di $\mathbb{R}^4$.

(a) Si mostri che T è unione di due sottoinsieme disgiunti:

$$T_1 = \{ v \in T \mid g(v, e_4) < 0 \} \qquad \text{e} \qquad T_2 = \{ v \in T \mid g(v, e_4) > 0 \}.$$

(b) Si mostri che la relazione $v \sim w \Leftrightarrow g(v, w) < 0$, è una relazione di equivalenza su T e che T_1 e T_2 sono esattamente le due classi di equivalenza determinate da questa relazione.

(c) Si mostri che, se $v, w \in T$ allora

$$g(v, w)^2 \geq g(v, v)g(w, w) \qquad [\textit{disuguaglianza di Schwarz inversa}]$$

e vale l'uguaglianza se, e solo se, v e w sono linearmente dipendenti. □

Esercizio 3.8. Sia T^+ il sottoinsieme dello spazio di Minkovsky $(\mathbb{R}^4, g)$, formato dai vettori v tali che $g(v, v) = -1$ e $g(v, e_4) < 0$ ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e g ha matrice $J = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) Si disegnino le proiezioni ortogonali dell'insieme T^+ in ciascuno dei piani $\langle e_1, e_4\rangle$, $\langle e_2, e_4\rangle$, $\langle e_3, e_4\rangle$.

(b) Si verifichi che, se $v, w \in T^+$, allora $g(v, w) < 0$.

(c) Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una trasformazione di Lorenz. Si mostri che $\phi(e_4) \in T^+$ se, e solo se, $\phi(T^+) \subseteq T^+$.

(d) Si concluda che il sottoinsieme L di $O_{3,-1}(\mathbb{R})$, formato dalle trasformazioni $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che $\phi(e_4) \in T^+$, è un sottogruppo[(†)]. □

Esercizio 3.9. Sia T^+ il sottoinsieme dello spazio di Minkovsky $(\mathbb{R}^4, g)$, descritto nell'esercizio precedente. Sia H il sottoinsieme di $O_{3,-1}(\mathbb{R})$ formato dalle trasformazioni di Lorenz $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che

$$\sigma(e_1) = e_1, \qquad \sigma(e_2) = e_2, \qquad \sigma(e_4) \in T^+, \quad \text{e} \quad \det \sigma = 1.$$

(a) Si mostri che H è un sottogruppo del gruppo di Lorenz.
(b) Si mostri che gli elementi di H hanno matrici (rispetto alla base canonica) della forma $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S \end{smallmatrix}\right)$, ove S è una matrice di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ del tipo

$$\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \qquad \text{al variare di } t \in \mathbb{R}.$$

□

4. Forme hermitiane

Abbiamo visto nella sezione precedente come la classificazione delle forme quadratiche dipenda dal corpo su cui le si consideri. Ad esempio, preso lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ immerso in $\mathbb{C}^n$ identificando le due basi canoniche, possiamo considerare il prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ ed estenderlo nel modo ovvio a $\mathbb{C}^n$, ma le proprietà caratteristiche di questa applicazione bilineare non hanno più alcun senso nello spazio più grande: ad esempio, se $n > 1$, vi saranno vettori isotropi in $\mathbb{C}^n$ e, ovviamente, non avrà più senso parlare di 'positività' dell'applicazione, visto che i valori della forma quadratica sono numeri complessi. D'altro canto, qualunque applicazione bilineare simmetrica e non degenere fosse stata posta su $\mathbb{R}^n$, la sua estensione a $\mathbb{C}^n$ sarebbe stata equivalente all'estensione del prodotto scalare, visto che sui complessi, tutte le applicazioni bilineari simmetriche non degeneri ammettono una base ortonormale (cf. *Osservazione IV.2.4*) e quindi sono equivalenti tra loro, indipendentemente da quale sia la segnatura (indice di inerzia) dell'applicazione reale.

Questo pone qualche problema, perchè, in vari ambiti fisici o matematici risulta necessario poter disporre di coordinate complesse, ma risulta altresì utile mantenere anche per queste nuove coordinate le proprietà geometriche dello spazio euclideo o, comunque, dell'ambiente reale entro cui si opera. La brutale estensione dell'applicazione bilineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ annulla queste peculiarità geometriche e quindi è necessario introdurre qualche ulteriore strumento per poter estendere le proprietà 'geometriche' dello spazio reale allo spazio complesso. Questo strumento sono le *forme hermitiane*.

4.1 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Un'applicazione $h : V \times V \to \mathbb{C}$ è una *forma hermitiana* se soddisfa alle seguenti proprietà

(i) $h(\alpha v + \beta v', w) = \bar{\alpha} h(v, w) + \bar{\beta} h(v', w)$ e $h(v, \alpha w + \beta w') = \alpha h(v, w) + \beta h(v, w')$;
(ii) $h(v, w) = \overline{h(w, v)}$;

qualunque siano i vettori v, v', w, w' in V ed i numeri complessi α, β.

Una forma hermitiana differisce quindi da un'applicazione bilineare su $\mathbb{C}$ per il fatto che non è $\mathbb{C}$-lineare nella prima componente ma, poichè i numeri reali sono caratterizzati tra i numeri complessi dal fatto di essere invarianti per coniugio, è pur sempre un'applicazione $\mathbb{R}$-bilineare. In particolare, osserviamo che la condizione (ii) implica che $h(v, v)$ è un numero reale qualunque sia il vettore v in V.

(†) Alcuni autori chiamano gruppo di Lorenz il sottogruppo L di $O_{3,-1}(\mathbb{R})$ e chiamano gruppo delle trasformazioni di Lorenz *speciali* il sottogruppo di L formato dagli endomorfismi di determinante uguale ad 1. Ciò si spiega con il fatto che T^+ viene interpretato come l'insieme degli osservatori orientati verso il futuro, mentre $T^- = -T^+$ è l'insieme degli osservatori orientati verso il passato e non sono fisicamente accettabili trasformazioni che scambino il futuro con il passato.

Per le forme hermitiane si possono ripetere molti dei ragionamenti fatti per le applicazioni bilineari. Ad esempio, quando lo spazio vettoriale V ha dimensione finita, si può parlare della *matrice* di h. Fissata una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, si considera la matrice

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{ove} \quad h_{ij} = h(v_i, v_j).$$

In base alla proprietà (ii), si ha ${}^tH = \overline{H}$, ovvero H è una *matrice hermitiana*. In particolare, se le entrate di H sono tutte reali, allora H è simmetrica.

Come per le applicazioni bilineari, anche per le forme hermitiane la matrice H può essere usata per calcolare i valori dell'applicazione h. Infatti, se $v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$ e $w = y_1v_1 + \dots + y_nv_n$, allora, si ha

$$h(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_i y_j h(v_i, v_j) = {}^t\overline{x} H y,$$

ove $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ed $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sono in $\mathbb{C}^n$, ed $\overline{x}$ indica il vettore di $\mathbb{C}^n$ che ha come componenti i coniugati delle componenti di x. Anche in questo caso, condizione necessaria e sufficiente affinché la forma hermitiana h sia *non-degenere* –ovvero $g(v, w) = 0$ per ogni vettore $w \in V$ se, e solo se, $v = 0$– è il non-annullarsi del determinante della matrice H. Due matrici hermitiane H ed H' rappresentano la stessa forma hermitiana rispetto a basi diverse se, e solo se, esiste una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (la matrice del cambiamento di base) tale che ${}^t\overline{P}HP = H'$.

Nello spazio V, dotato della forma hermitiana non-degenere h, vi è la nozione di *sottospazio ortogonale*, analoga a quanto visto nel caso delle applicazioni bilineari; ovvero, dato un sottoinsieme (non vuoto) S di V, si ha

$$S^\perp = \{\, v \in V \mid h(v, s) = 0,\ \forall s \in S \,\}.$$

In particolare, valgono le proprietà già viste nel caso delle applicazioni bilineari simmetriche, ovvero:

$$S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_2^\perp \subseteq S_1^\perp \qquad \text{e} \qquad S^\perp = \langle S \rangle^\perp,$$

qualsiasi siano i sottoinsiemi S_1, S_2 ed S. Inoltre, se $\dim_{\mathbb{C}} V = n$ e W è un sottospazio di V, allora

$$\dim_{\mathbb{C}} W^\perp = n - \dim_{\mathbb{C}} W \qquad \text{e} \qquad (W^\perp)^\perp = W.$$

Anche in questo caso vale il Teorema di decomposizione ortogonale [cf. *Teorema IV.1.14*], da cui si deduce l'esistenza di basi ortogonali per le forme hermitiane.

⋆Esercizio 4.1. Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita sul corpo $\mathbb{C}$ e siano $h : V \times V \to \mathbb{C}$ ed $h' : W \times W \to \mathbb{C}$ due forme hermitiane non-degeneri. Allora, ad ogni applicazione lineare $\phi : V \to W$ si può associare la sua *aggiunta*, $\phi^* : W \to V$, definita ponendo $h(v, \phi^*(w)) = h'(\phi(v), w)$ per ogni coppia di vettori $v \in V$ e $w \in W$.

(a) Si verifichi che la definizione è ben posta e che $\operatorname{im}\phi^* = (\ker\phi)^\perp$ e $\ker\phi^* = (\operatorname{im}\phi)^\perp$.

(b) Se $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di V relativamente ad h e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ è una base ortonormale di W relativamente ad h', si verifichi che $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\phi^*) = {}^t\overline{\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)}$.

Che relazioni vi sono tra le due matrici se si hanno delle basi ortogonali dei due spazi?

Che relazioni vi sono tra le matrici delle due applicazioni e le matrici di h ed h' se si hanno delle basi qualsiansi dei due spazi?

(c) Si verifichi che $\phi^{**} = \phi$. □

Per una forma hermitiana h, si ha $h(\alpha v, \alpha v) = |\alpha|^2 h(v, v)$, qualunque siano il numero complesso α ed il vettore v; quindi i valori di h sugli elementi di una base ortogonale possono essere modificati solo per moltiplicazione con numeri *reali* positivi e quindi la classificazione delle forme hermitiane sarà analoga a quella delle applicazioni bilineari simmetriche sul corpo reale; ovvero si può dimostrare un risultato analogo al Teorema di Sylvester (cf. *Teorema di Sylvester IV.2.7*).

4.2 Proposizione. *Siano V uno spazio vettoriale, di dimensione n sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, ed h una forma hermitiana non-degenere su V. Allora esiste una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V tale che h abbia una matrice a blocchi del tipo*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{n-r} \end{pmatrix}$$

ove l'intero r, $0 \leq r \leq n$ ed il numero r dipende solo da h e non dalla scelta della base di V. Il numero $i(h) = 2r - n$ è chiamato la segnatura (o l'indice di inerzia) della forma hermitiana h.

Dunque, dato uno spazio vettoriale complesso V, dotato di una forma hermitiana h, possiamo considerare una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ del tipo descritto nella proposizione precedente e considerare il sottospazio vettoriale *reale* di V generato da questa base, ovvero il sottoinsieme di V costituito dai vettori che hanno coordinate *reali* rispetto alla base data. Su questo sottospazio h induce un'applicazione $\mathbb{R}$-bilineare simmetrica che ha la stessa segnatura di h. In questo senso, possiamo pensare alle forme hermitiane come all'estensione 'naturale' delle applicazioni bilineari simmetriche sugli spazi vettoriali reali.

Le applicazioni bilineari simmetriche definite positive hanno una grande importanza nel campo reale, perchè determinano la geometria dello Spazio Euclideo. Quindi, in campo complesso, il loro posto sarà preso dalle forme hermitiane definite positive, ove una forma hermitiana si dirà *definita positiva* se $h(v, v) > 0$ per ogni vettore $v \neq 0$ (ed, analogamente, si dirà *definita negativa* se $h(v, v) < 0$ per ogni vettore $v \neq 0$).

Anche per gli spazi vettoriali complessi, dotati di una forma hermitiana, si può parlare di *isometria*, ovvero se (V, h) e (V', h') sono due tali spazi, un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare $\phi : V \to V'$ è un'*isometria* se si ha $h'(\phi(v), \phi(w)) = h(v, w)$ per ogni coppia di vettori v, w in V. Anche in questo ambito valgono le osservazioni fatte nell'ambito delle applicazioni bilineari e si possono introdurre vari gruppi di isometrie.

4.3 Definizione. Si chiama *Gruppo unitario* il gruppo delle isometrie di uno spazio vettoriale complesso V, dotato di una forma hermitiana definita positiva. Se $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale dello spazio V, si possono considerare le matrici delle isometrie rispetto a questa base ed allora il gruppo unitario si può identificare con il gruppo di matrici

$$U_n = \left\{ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{P}P = \mathbf{1}_n \right\}$$

i cui elementi sono detti *matrici unitarie*.

Uno *spazio pre-hilbertiano* (complesso) è uno spazio vettoriale V sul corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, dotato di una forma hermitiana definita positiva. Dato uno spazio prehilbertiano, si può considerare lo spazio affine associato a V, definire la *norma* dei vettori, ponendo $\|v\| = \sqrt{h(v, v)}$, e porre una metrica, definendo la *distanza* tra due punti P e Q dello spazio affine come la norma del vettore $\overrightarrow{PQ}$. Pur avendo coordinate complesse, un tale spazio condivide molte proprietà dello spazio euclideo; ad esempio, anche per questo spazio vale la seguente

4.4 Proposizione. [Lemma di Schwarz]. *Sia V uno spazio vettoriale complesso, dotato della forma hermitiana, definita positiva, $h : V \times V \to \mathbb{C}$. Allora, per ogni coppia di vettori v, w in V, vale la disuguaglianza*

$$|h(v, w)|^2 \leq h(v, v)h(w, w),$$

e vale l'uguaglianza se, e solo se, v e w sono linearmente dipendenti.

dim. Siano dati v e w in V, e supponiamo $h(v, w) \neq 0$ ché, altrimenti, la tesi è banalmente vera, compresa l'ultima affermazione sulla dipendenza lineare. Consideriamo quindi il numero complesso $\kappa = \frac{h(v,w)}{|h(v,w)|}$, di modulo 1, e sia t un qualunque numero reale. Poichè h è definita positiva, si ha

$$0 \leq h(\kappa v + tw, \kappa v + tw) = |\kappa|^2 h(v, v) + t[\overline{\kappa} h(v, w) + \kappa h(w, v)] + t^2 h(w, w) = h(v, v) + 2t|h(v, w)| + t^2 h(w, w);$$

e quindi, per le usuali condizioni sul segno di un trinomio (a coefficienti reali), deve aversi, $|h(v, w)|^2 \leq h(v, v)h(w, w)$.

Con un calcolo diretto si verifica che, se v e w sono linearmente dipendenti, si ha $|h(v,w)|^2 = h(v,v)h(w,w)$. D'altra parte, se vale questa uguaglianza, significa che il trinomio $h(v,v) + 2t|h(v,w)| + t^2h(w,w)$ ha uno zero reale $t_0 = -\frac{\|v\|}{\|w\|}$. In tal caso $h(\kappa v + t_0 w, \kappa v + t_0 w) = 0$, e quindi, poichè h è definita positiva, deve aversi $\kappa v + t_0 w = 0$. **CVD** □

La disuguaglianza di Schwarz implica la disuguaglianza triangolare per la norma ($\|v+w\| \leq \|v\|+\|w\|$ per ogni coppia di vettori v, w). Tramite la distanza definita nello spazio affine, possiamo parlare di limite di una successione di elementi di uno spazio prehilbertiano(†). Uno spazio prehilbertiano completo(*) rispetto a questa metrica è uno *Spazio di Hilbert*. Tutti gli spazi prehilbertiani di dimensione finita sono Spazi di Hilbert.

Esercizio 4.2. Si verifichi che le matrici hermitiane formano un sotto-$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathcal{H}$ di $M_n(\mathbb{C})$ di dimensione n^2. Si verifichi che $\mathcal{H}$ non è un sotto-$\mathbb{C}$-spazio vettoriale di $M_n(\mathbb{C})$. □

Esercizio 4.3. Si mostri che il determinante di una matrice hermitiana è un numero reale. □

Esercizio 4.4. Si mostri che il determinante di una matrice unitaria è un numero complesso di modulo 1 e si verifichi che le matrici unitarie di ordine n con determinante uguale ad 1 formano un sottogruppo di U_n, che usualmente si indica con SU_n (gruppo unitario speciale). □

⋆Esercizio 4.5. Siano V uno spazio vettoriale complesso di dimensione n ed $h : V \times V \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana. Si considerino le due applicazioni $S : V \times V \to \mathbb{R}$ ed $E : V \times V \to \mathbb{R}$, definite prendendo la parte reale e la parte immaginaria di h, ovvero: $S(v,w) = Re(h(v,w))$ ed $E(v,w) = Im(h(v,w))$.

(a) Si verifichi che S ed E sono applicazioni $\mathbb{R}$-bilineari, che S è simmetrica ed E è alternante.
(b) Si verifichi che, per ogni coppia di vettori v e w in V, si ha $S(v,w) = E(v,iw)$ ed $E(iv,iw) = E(v,w)$.
(c) Si deduca da quanto detto sopra che c'è un isomorfismo (di spazi vettoriale reali) tra lo spazio vettoriale $\mathcal{H}$ delle forme hermitiane su V e lo spazio vettoriale $\mathcal{E}$ delle forme $\mathbb{R}$-bilineari alternanti E su V tali che $E(iv,iw) = E(v,w)$, per ogni coppia di vettori v, w in V.
(d) Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V su $\mathbb{C}$, allora $\{v_1, \ldots, v_n, iv_1, \ldots, iv_n\}$ è una base di V come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Si mostri che, rispetto a questa base, gli elementi di $\mathcal{E}$ hanno tutte e sole matrici del tipo $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ -B & A \end{smallmatrix}\right)$, ove A è una matrice alternante reale di ordine n e B è una matrice simmetrica reale. Si verifichi inoltre che la matrice della forma hermitiana corrispondente è $B + iA$. □

Esercizio 4.6. Sia $\mathscr{H} = \left\{ A \in M_{n+1}(\mathbb{C}) \mid {}^tA = \overline{A} \right\}$.

(a) Si calcoli $\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{H}$.
(b) Si mostri che l'applicazione $g : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{R}$, definita ponendo $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ è un'applicazione bilineare simmetrica, definita positiva ed invariante rispetto all'azione $A \mapsto \sigma A \sigma^{-1}$ del gruppo unitario

$$U_{n+1} = \left\{ \sigma \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) \mid {}^t\sigma\overline{\sigma} = \mathbf{1} \right\}.$$

□

Esercizio 4.7. Si considerino in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ i due sottogruppi di matrici

$$SO_2 = \left\{ \left(\begin{matrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{matrix} \right) \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{ed} \qquad U = \left\{ \left(\begin{matrix} \alpha & \alpha^2 - \alpha \\ 0 & \alpha^2 \end{matrix} \right) \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1 \right\}.$$

Si mostri che l'applicazione

$$\phi : \left(\begin{matrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{matrix} \right) \mapsto \left(\begin{matrix} e^{i\theta} & e^{2i\theta} - e^{i\theta} \\ 0 & e^{2i\theta} \end{matrix} \right)$$

(†) Come per i punti della retta reale, una successione di vettori $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di uno spazio prehilbertiano *converge* al vettore v se, fissato comunque un numero reale $\varepsilon > 0$, esiste un indice n_0 tale che, per $n \geq n_0$ si abbia $\|v - v_n\| < \varepsilon$.

(*) Uno spazio metrico X si dice *completo* se ogni Successione di Cauchy di elementi di X ha limite in X. Nelle notazioni precedenti, una successione di vettori $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di uno spazio prehilbertiano è una *Successione di Cauchy* se, fissato comunque un numero reale $\varepsilon > 0$, esiste un indice n_0 tale che, per $n, m \geq n_0$ si abbia $\|v_m - v_n\| < \varepsilon$.

è una corrispondenza biunivoca di SO_2 su U e che $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$ per ogni coppia di matrici A, B in SO_2 (cioè ϕ è isomorfismo di gruppi). □

Esercizio 4.8. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione n, dotato di una forma hermitiana $h : V \times V \to \mathbb{C}$, definita positiva, ed indichiamo con $\|v\| := \sqrt{h(v,v)}$ la norma di un vettore $v \in V$. Sia dato un endomorfismo $\phi : V \to V$ e si fissi una base ortonormale $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V. Possiamo considerare i due numeri reali

$$\|\phi\|_0 := \sup\{\, \|\phi(v)\| \mid v \in V, \|v\| = 1 \,\} \qquad \text{e} \qquad \|\phi\|_1 := \max\{\, |a_{ij}| \mid 1 \le i,j \le n \,\}$$

ove $(a_{ij})_{1\le i,j\le n} = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ è la matrice di ϕ rispetto alla base fissata.

Si mostri che esistono due numeri reali positivi c_1 e c_2, indipendenti da ϕ, tali che $c_1\|\phi\|_1 \le \|\phi\|_0 \le c_2\|\phi\|_1$. □

⋆Esercizio 4.9. Siano $a < b$ due numeri reali e si consideri lo spazio vettoriale $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ delle funzioni continue, definite in $[a,b]$, ed a valori complessi.

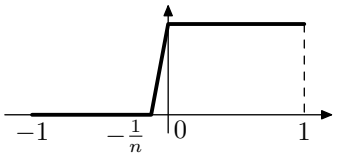
(a) Si verifichi che l'applicazione, che a due funzione $f(x)$ e $g(x)$ associa il numero complesso

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)\,dx,$$

è una forma hermitiana definita positiva su $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{C})$.

(b) Sia ora $[a,b] = [-1,1]$ e si consideri la successione di funzioni $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{C})$, definite ponendo

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \le x < -\frac{1}{n} \\ nx+1 & \text{se } -\frac{1}{n} \le x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$



Si verifichi che per $n_0 \le n < m$, si ha $\|f_m - f_n\|^2 = \langle f_n - f_m, f_n - f_m\rangle \le \frac{1}{3n_0}$ e si deduca da ciò che si tratta di una successione di Cauchy in $\mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{C})$.

(c) Nelle notazioni del punto precedente, si mostri che fissato il punto x in $[-1,1]$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \le x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

perchè, da un certo indice in poi, tutti i termini della successione coincidono con il limite.

(d) Si concluda che $\mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{C})$ non è uno spazio di Hilbert. □

4.5 Appendice. Rappresentazione ortogonale di SU_2 e Quaternioni. Le isometrie dello spazio vettoriale euclideo (orientato) di dimensione 3 formano il *gruppo ortogonale speciale*, ovvero, fissata una base ortonormale, concorde con l'orientamento, il gruppo di matrici

$$SO_3 = \left\{\, P \in M_3(\mathbb{R}) \mid {}^tPP = \mathbf{1},\ \det P = 1 \,\right\}.$$

Si può verificare che *ogni elemento di SO_3 è una rotazione attorno ad un opportuna retta dello spazio* (cf. `Esercizio IV.3.4`).

Le isometrie di uno spazio vettoriale complesso V di dimensione n, dotato di una forma hermitiana definita positiva, formano il *gruppo unitario* U_n e gli elementi di U_n di determinante 1 formano il sottogruppo SU_n ovvero, fissata una base ortonormale di V, il gruppo di matrici

$$SU_n = \left\{\, A \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{A}A = \mathbf{1},\ \det A = 1 \,\right\}.$$

D'ora in poi, scriveremo A^* per indicare la matrice ${}^t\overline{A}$.

Lo scopo di questa appendice è di mostrare l'esistenza di una sequenza (esatta) di omomorfismi di gruppi

$$1 \longrightarrow \{\pm\mathbf{1}\} \longrightarrow SU_2 \longrightarrow SO_3 \longrightarrow 1$$

ovvero che

- *ogni elemento di SU_2 determina un'isometria di uno spazio euclideo tridimensionale;*
- *ogni elemento di SO_3 si può ottenere in questo modo;*
- *due elementi A e B di SU_2 determinano lo stesso elemento di SO_3 se, e solo se, $A = \pm B$.*

Per questo motivo il gruppo SU_2 viene a volte chiamato il *gruppo degli spin*, perchè ogni suo elemento è costituito da una rotazione attorno ad un asse più la scelta di un segno ± 1.

Cominciamo col descrivere in modo più esplicito le matrici in SU_2. Si ha

$$A \in SU_2 \quad \Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \quad \text{ove} \quad a, b \in \mathbb{C} \text{ e } |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

come si ricava con un calcolo diretto, imponendo che la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{C})$ soddisfi alle condizioni $A^*A = \mathbf{1}$ e $\det A = 1$.

La condizione si può esprimere in un modo più suggestivo usando coordinate reali, ovvero ponendo $a = x_0 + ix_1$ e $b = y_0 + iy_1$; infatti, si ha

$$A = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & y_0 + iy_1 \\ -y_0 + iy_1 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix} = x_0\mathbf{1} + x_1 I + y_0 J + y_1 K, \quad \text{ove} \quad x_0^2 + x_1^2 + y_0^2 + y_1^2 = 1$$

e

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Lasciamo al lettore il compito di verificare alcune interessanti relazioni tra le matrici appena introdotte

Esercizio 4.10. Siano $\mathbf{1}, I, J, K$ come sopra. Si verifichi che

$$I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbf{1}, \qquad IJ = K = -JI, \qquad JK = I = -KJ, \qquad KI = J = -IK.$$

Si verifichi inoltre che $I^* = -I$, $J^* = -J$, $K^* = -K$. □

Si consideri ora lo spazio vettoriale reale $\mathbb{H}$, generato (in $M_2(\mathbb{C})$) dalle matrici $\mathbf{1}$, I, J, K, ovvero

$$\mathbb{H} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} x_0 + ix_1 & y_0 + iy_1 \\ -y_0 + iy_1 & x_0 - ix_1 \end{array} \right) \middle| \; x_0, x_1, y_0, y_1 \in \mathbb{R} \right\},$$

dotato del prodotto scalare (definito positivo), rispetto a cui $\{\mathbf{1}, I, J, K\}$ è una base ortonormale. Dall'esercizio sopra si deduce che il prodotto di due matrici di $\mathbb{H}$ è ancora in $\mathbb{H}$. Inoltre, se $A = \left(\begin{smallmatrix} x_0+ix_1 & y_0+iy_1 \\ -y_0+iy_1 & x_0-ix_1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{H}$, allora

$$\|A\| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + y_0^2 + y_1^2} = \sqrt{\det A}.$$

da cui si deduce che $\|AB\| = \|A\| \, \|B\|$ e che ogni elemento non nullo di $\mathbb{H}$ è invertibile. Quindi $\mathbb{H}$ è un *corpo non-commutativo*, detto il corpo dei *quaternioni di Hamilton*.

Così come il gruppo SO_2 delle rotazioni piane coincide con il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi di modulo 1 e quindi con la circonferenza unitaria (1-sfera), così il gruppo SU_2 coincide con il gruppo moltiplicativo dei quaternioni di modulo 1 e quindi con la sfera unitaria (3-sfera) in uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 4.

Si consideri ora il sottospazio (reale) V_0 di $\mathbb{H}$ formato dai quaternioni *speciali*, ovvero dai quaternioni per cui $x_0 = 0$. $V_0 = \langle I, J, K \rangle \subset \mathbb{H}$ e si osservi che I, J, K formano una base ortonormale di V_0.

Esercizio 4.11. Sia $A \in \mathbb{H}$, si mostri che $A^*A = \|A\|^2\mathbf{1}$. □

Esercizio 4.12. Siano A e B in $\mathbb{H}$ e si indichi con $\langle A, B\rangle \in \mathbb{R}$ il prodotto scalare delle due matrici (rispetto alla base ortonormale $\{\mathbf{1}, I, J, K\}$ dei quaternioni). Si mostri che $\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A^*B)$. □

Esercizio 4.13. Si verifichi che, per ogni $A \in \mathbb{H}$ e per ogni $X \in V_0$, si ha $AXA^* \in V_0$. □

Esercizio 4.14. Sia $A \in \mathbb{H}$; si verifichi che $A \in V_0$ se, e solo se, $\mathrm{tr}A = 0$. Sia $r \in \mathbb{R}$ e si consideri il sottoinsieme $W_r = \{\ X \in \mathbb{H} \mid \mathrm{tr}X = r\ \}$. Si mostri che
(a) $W_0 = V_0 = \langle I, J, K\rangle$;
(b) per ogni $A \in \mathbb{H}$, con $\|A\| = 1$, e per ogni $X \in W_r$, si ha $AXA^* \in W_r$;
(c) $W_r = (r/2)\mathbf{1} + W_0 = \{\ (r/2)\mathbf{1} + X \mid X \in W_0\ \}$. □

Manteniamo le notazioni precedenti ed osserviamo che ad ogni elemento A di SU_2 si può associare un'applicazione $\phi_A : V_0 \to V_0$, definita ponendo $\phi_A(X) = AXA^*$ per ogni $X \in V_0$. È immediato verificare che si tratta di un'applicazione lineare e che

$$\|\phi_A(X)\|^2 = \det(AXA^*) = \det X = \|X\|^2 \qquad \text{per ogni } X \in V_0,$$

e quindi che ϕ_A è una trasformazione ortogonale di V_0. Inoltre, si ha

$$\phi_{AB}(X) = \phi_A((\phi_B(X)), \qquad \text{per ogni } A, B \in SU_2 \text{ e per ogni } X \in V_0.$$

Osserviamo infine che, qualunque sia A in SU_2, $\phi_A(X) = \phi_{-A}(X)$, per ogni $X \in V_0$.

Esercizio 4.15. Si consideri il quaternione I. Si verifichi che $\phi_I(I) = I$, $\phi_I(J) = -J$, $\phi_I(K) = -K$ e si concluda che $\det\phi_I = 1$. □

Esercizio 4.16. Sia $R = \begin{pmatrix} e^{-i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{i\vartheta} \end{pmatrix}$. Si scriva la matrice di ϕ_R rispetto alla base $\{I, J, K\}$ di V_0. Si verifichi che ϕ_R è una rotazione attorno all'asse $\langle I\rangle$ e si determini l'angolo di rotazione. □

Esercizio 4.17. Sia $S = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -i\sin\vartheta \\ -i\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$. Si scriva la matrice di ϕ_S rispetto alla base $\{I, J, K\}$ di V_0. Si verifichi che ϕ_R è una rotazione attorno all'asse $\langle K\rangle$ e si determini l'angolo di rotazione. □

Esercizio 4.18. Siano $v = x_1I + x_2J + x_3K$ e $w = y_1I + y_2J + y_3K$ due quaternioni speciali. Si verifichi che il loro prodotto (in $\mathbb{H}$) è $vw = -v \cdot w\mathbf{1} + v \times w$, ove $v \cdot w$ e $v \times w$, indicano il prodotto scalare ed il prodotto vettore dello spazio V_0, in cui $\{I, J, K\}$ sia una base ortonormale, concorde con l'orientamento fissato. □

Nelle notazioni dell'esercizio precedente, sia $A = \alpha\mathbf{1} + v$ un quaternione di norma 1 ($\alpha^2 + \|v\|^2 = 1$) e sia $w \in V_0$ un quaternione speciale. Posto $v = \|v\|v_1$, con un calcolo diretto si ottiene

$$\phi_A(w) = (\alpha\mathbf{1} + v)w(\alpha\mathbf{1} - v) = \alpha^2 w + \|v\|^2(v_1 \cdot w)v_1 + 2\alpha\|v\|(v_1 \times w) - \|v\|^2(v_1 \times w) \times v_1.$$

Da questa espressione si ricava facilmente che, se w è proporzionale a v, allora $\phi_x(w) = w$. D'altro canto, posto $\alpha = \cos\vartheta$ e $\|v\| = \sin\vartheta$, e supposto $w \cdot v = 0$, si ricava dalla stessa espressione che $\phi_A(w) = \alpha^2 w + 2\alpha\|v\|(v_1 \times w) - \|v\|^2 w$, perchè, in questo caso, $(v_1 \times w) \times v_1 = w$. Dunque $\phi_A(w) = \cos(2\vartheta)w + \sin(2\vartheta)v_1 \times w$ e quindi il vettore w è stato ruotato di un angolo 2ϑ nel piano ortogonale a v. Da ciò si conclude che $\phi_A(w)$ coincide con la rotazione attorno all'asse $\langle v\rangle$ di angolo 2ϑ.

Dunque $A \mapsto \phi_A$ è l'omomorfismo di gruppi $SU_2 \to SO_3$ di cui parlavamo all'inizio di questa sezione, e l'arbitrarietà nella scelta del vettore v e dell'angolo ϑ ci permette di concludere che l'omomorfismo così definito è suriettivo.

Sia $A = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU_2$ ed osserviamo che ϕ_A induce l'identità su V_0 se, e solo se, $\phi_A(I) = I$ e $\phi_A(J) = J$ (infatti, in tal caso si ha $\phi_A(K) = \phi_A(JI) = AJIA^* = AJA^*AIA^* = \phi_A(J)\phi_A(I) = JI = K$). Per quanto visto negli esercizi sopra, $\phi_A(J) = J$ e $\phi_A(I) = I$ se, e solo se, $b = 0$ ed $a^2 = 1$. Possiamo quindi concludere che $\phi_A = 1_{V_0}$ se, e solo se, $A = \pm\mathbf{1}$. Ciò significa esattamente che, dati due elementi, A, B, di SU_2, allora $\phi_A = \phi_B$ se, e solo se, $A = \pm B$.

5. Appendice. Lo spazio vettoriale duale.

Quando abbiamo parlato dei vettori geometrici, abbiamo visto come questi siano un ottimo modello per rappresentare gli *spostamenti* (rettilinei) nello spazio usuale. Ma la consuetudine ci ha abituato a rappresentare tramite vettori anche delle entità che hanno una natura completamente diversa dagli spostamenti, quali le *forze*. Vogliamo quindi introdurre qualche considerazione generale sulle forze per chiarire quali siano le loro relazioni con gli spostamenti e quali implicazioni geometriche vi siano nel rappresentare entrambe queste entità tramite i vettori dello spazio.

Il fatto che vi sia una forza (che supporremo costante) applicata in un certo punto P dello spazio è messo in relazione con gli spostamenti del punto P dal fatto che si deve compiere del *lavoro* per effettuare tali spostamenti. Il lavoro che si deve compiere è una funzione $f(v)$ dello spostamento v (che supporremo rettilineo) e questa funzione partecipa della struttura vettoriale dello spazio perchè è una *funzione lineare* (cf. *Definizione II.2.1*), ovvero $f(v+w) = f(v) + f(w)$ ed $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ (per ogni numero reale α).

Se supponiamo di aver fissato un sistema di riferimento nello spazio, ovvero un punto origine ed una base, $\{e_1, e_2, e_3\}$, possiamo associare ad ogni vettore spostamento una terna di coordinate (in colonna) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Inoltre, fissata un'unità di misura per il lavoro (e quindi identificato l'insieme dei valori con il corpo dei numeri reali), ogni funzione lineare sugli spostamenti viene identificata con una matrice ad una riga e tre colonne. Dunque le forze (o, se si preferisce, le funzioni sullo spazio degli spostamenti ad esse associate) sono identificabili con lo spazio $M_{1\times 3}(\mathbb{R})$ delle *righe* (a_1, a_2, a_3) di coordinate. In tali notazioni, il lavoro compiuto per spostare il punto di applicazione della forza $a = (a_1, a_2, a_3)$ lungo il vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ si determina calcolando il prodotto riga per colonna $\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

A questo punto è chiaro che una forza, di matrice (a_1, a_2, a_3), può essere identificata con il vettore che ha le stesse coordinate e potrebbe sembrare un eccesso di pignoleria distinguere tra vettori in riga e vettori in colonna, ma è la diversa natura degli oggetti in gioco che ci ha portato a scrivere i vettori dello spazio degli spostamenti in colonna e le funzioni lineari su tale spazio in riga. Tale diversa natura si rivela molto chiaramente se si opera un cambiamento di riferimento $y = Px$, per un'opportuna $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, nello spazio degli spostamenti. Si verifica che la funzione che era rappresentata dalla matrice $a = (a_1, a_2, a_3)$, viene ora ad essere rappresentata dalla matrice aP^{-1} e dunque, se la matrice P non gode di speciali proprietà (cioè se ${}^tP \neq P^{-1}$), l'identificazione tra forze e vettori che abbiamo compiuto "mettendo in colonna le righe", *dipende* dalla scelta del riferimento. Ciò significa che dobbiamo studiare in modo più preciso i rapporti tra uno spazio vettoriale e lo spazio delle funzioni lineari. Osserviamo in particolare che il dato di un'applicazione bilineare non degenere, su uno spazio V corrisponde esattamente ad identificare questo spazio con lo spazio delle funzioni lineari su V, cioè con lo *spazio vettoriale duale*.

Studieremo quindi le relazioni tra uno spazio vettoriale V e lo spazio delle funzioni lineari su V. Salvo diverso avviso, in tutto il seguito di questo numero, supporremo che lo spazio V abbia dimensione finita sul campo C. Cominciamo quindi con una definizione.

5.1 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale sul campo C. Si chiama *spazio vettoriale duale* lo spazio $V^* := \mathrm{Hom}_C(V, C)$.

Si chiama *dualità canonica* l'applicazione $\circ : V^* \times V \to C$, definita ponendo $\xi \circ v := \xi(v)$, per ogni coppia $(\xi, v) \in V^* \times V$.

La dualità canonica è un'*applicazione bilineare*, ovvero

$$\begin{aligned} \xi \circ (av + bw) &= a(\xi \circ v) + b(\xi \circ v) \\ (a\xi + b\eta) \circ v &= a(\xi \circ v) + b(\eta \circ v), \end{aligned} \tag{5.2}$$

qualunque siano $a, b \in C$, $v, w \in V$ e $\xi, \eta \in V^*$; ed inoltre la dualità canonica è un accoppiamento *non-degenere*, ovvero

$$\begin{aligned} \xi \circ v = 0 \text{ per ogni } v \in V \quad &\Rightarrow \quad \xi = 0 \\ \xi \circ v = 0 \text{ per ogni } \xi \in V^* \quad &\Rightarrow \quad v = 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Entrambe le proprietà della dualità canonica sono diretta conseguenza delle definizioni; ad esempio, la seconda delle (IV.5.3) si può verificare così: se un vettore $v \in V$ è diverso dal vettore nullo, allora può essere inserito in

una base (cf. *Lemma II.1.14*) e si può sempre definire un'applicazione lineare attribuendo ad arbitrio i valori sugli elementi di una base (cf. `Esercizio II.2.1`), dunque se per un vettore v si ha $\xi \circ v = 0$ per ogni $\xi \in V^*$, ciò significa che v non può far parte di una base di V e quindi che $v = 0$.

5.4 Esempio. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base dello spazio V e si consideri su C la base canonica (cioè la costante 1). Allora al vettore $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ di V resta associata la colonna di coordinate $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e ad una funzione lineare $\xi \in V^*$ resta associata la matrice $a = (a_1, \dots, a_n) = \alpha_{\mathcal{V},1}(\xi)$, ove $a_j = \xi(v_j)$ per $j = 1, \dots, n$ (cf. *Definizione II.2.7*). In tal modo la dualità canonica corrisponde al prodotto riga per colonna, ovvero

$$\xi \circ v = ax = \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Con questa identificazione, risulta immediata la verifica del fatto che la dualità canonica è un'applicazione bilineare non-degenere.

L'identificazione che abbiamo fatto nella sezione precedente tra lo spazio vettoriale degli spostamenti ed il suo duale (lo spazio delle forze), non è stata definita in modo "intrinseco", ma dipendeva dalla scelta delle coordinate sullo spazio. Vi è però un modo canonico (cioè indipendente dalla scelta delle coordinate) di identificare lo spazio V con il duale del duale $V^{**} := \mathrm{Hom}_C(V^*, C)$; ovvero

5.5 Proposizione. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C. Allora esiste un isomorfismo canonico $\phi : V \to \mathrm{Hom}_C(V^*, C)$, che al vettore $v \in V$ associa l'applicazione lineare $\varphi_v \in \mathrm{Hom}_C(V^*, C)$, definita ponendo $\varphi_v(\xi) = \xi \circ v = \xi(v)$, per ogni $\xi \in V^*$.*

dim. Poichè la dualità canonica $\circ : V^* \times V \to C$ è un'applicazione bilineare, si deduce che ϕ è un'applicazione lineare (cf. la prima delle (IV.5.2)). Inoltre, poichè la dualità canonica è non-degenere, ne consegue che ϕ è iniettiva (cf. la seconda delle (IV.5.3)). Dunque l'applicazione $\phi : V \to \mathrm{Hom}_C(V^*, C)$ definita sopra è un omomorfismo iniettivo di spazi vettoriali. Se W è uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C, si ha

$$\dim_C \mathrm{Hom}_C(W, C) = \dim_C W \, \dim_C C = \dim_C W;$$

da cui si deduce che

$$\dim_C V^{**} = \dim_C V^* = \dim_C V$$

e quindi che ϕ è un isomorfismo. **CVD** □

Si osservi che, in particolare, dall'identificazione stabilita nella Proposizione precedente, discende che la dualità canonica tra V^* ed $\mathrm{Hom}_C(V^*, C)$ viene a coincidere con la dualità canonica tra V e V^*, a meno dell'ordine degli argomenti. Dunque, d'ora in poi scriveremo indifferentemente $v^* \circ v$ oppure $v \circ v^*$ per indicare il valore della dualità canonica sulla coppia di vettori $v \in V$ e $v^* \in V^*$.

5.6 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale sul campo C e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una sua base. Il sottoinsieme $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ di V^*, i cui elementi sono definiti ponendo $v_i^* \circ v_j = \delta_{i,j}$ (simbolo di Kronecker) per ogni coppia di indici $i, j = 1, \dots, n$, è una base di V^* detta la *base duale* della base $\mathcal{V}$ di V.

La verifica che gli elementi di $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ formano una base di V^* è immediata se si considerano le coordinate su V associate alla base $\mathcal{V}$ ed il corrispondente isomorfismo $\alpha_{\mathcal{V},1} : V^* \to M_{1\times n}(C)$. Lasciamo quindi al lettore la verifica del fatto che in V^* si ha $\xi = a_1v_1^* + \cdots + a_nv_n^*$ se, e solo se, $\alpha_{\mathcal{V},1}(\xi) = (a_1, \dots, a_n)$.

Esercizio 5.1. Sia V uno spazio vettoriale sul campo C e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ la corrispondente base duale di V^*. Si mostri che
(a) per ogni vettore $v \in V$, si ha $v = \sum_{i=1}^n (v_i^* \circ v)v_i$.
(b) per ogni vettore $\xi \in V^*$, si ha $\xi = \sum_{i=1}^n (\xi \circ v_i)v_i^*$. □

Esercizio 5.2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ due basi di V. Indicate con $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ e $\mathcal{W}^* = \{w_1^*, \dots, w_n^*\}$ le rispettive basi duali, siano

$$P = (p_{ij})_{1\le i,j\le n} = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(1_V) \qquad \text{e} \qquad Q = (q_{ij})_{1\le i,j\le n} = \alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{V}^*}(1_{V^*}),$$

le matrici dei cambiamenti di base. Si mostri che $Q = {}^tP$.

[**Sugg.** Si scrivano esplicitamente le relazioni tra le basi descritte dalle matrici P e Q, e si osservi che $q_{hk} = v_h \circ w_k^*$.] □

Esercizio 5.3. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di $\mathbb{R}[X]$, di grado ≤ 3 e si consideri la sua base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Si mostri che l'applicazione $V \to \mathbb{R}$, definita da $P \mapsto P(2)$, è un elemento di V^* e la si scriva come combinazione dei vettori della base duale della base data. □

L'isomorfismo della *Proposizione IV.5.5* e l'affermazione che la base duale sia una base di V^* sono falsi (cf. `Esercizio IV.5.4`) quando lo spazio vettoriale V non abbia dimensione finita. Si osservi che, della *Proposizione IV.5.5* resta vero il fatto che l'omomorfismo $\phi : V \to \mathrm{Hom}_C(V^*, C)$ è iniettivo, ciò che viene a cadere nel caso generale è la suriettività.

Esercizio 5.4. Sia $V = \mathbb{Q}[X]$ lo spazio vettoriale di tutti i polinomi a coefficienti razionali e si considerino la base $\{1, X, X^2, \dots\}$ di V ed il corrispondente sottoinsieme $\mathcal{E} = \{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ di $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, \mathbb{Q})$, definito dalle condizioni $e_i(X^j) = \delta_{i,j}$ per ogni coppia (i, j) di interi non-negativi. Si mostri che l'applicazione $V \to \mathbb{Q}$, definita da $P \mapsto P(1)$, è un elemento di V^*, ma che non è possibile scriverla come combinazione lineare finita degli elementi di $\mathcal{E}$. □

Vi è un'importante relazione che lega i sottospazi di V a quelli del suo duale V^*, la relazione di ortogonalità.

5.7 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale sul campo C e sia V^* il suo duale. Dato un sottoinsieme S di V (risp. un sottoinsieme Z di V^*) il suo *ortogonale* è il sottoinsieme $S^\perp \subset V^*$ (risp. $Z^\perp \subset V$) così definito

$$S^\perp = \{\, \xi \in V^* \mid \xi \circ s = 0 \quad \forall s \in S \,\} \qquad (\text{risp. } Z^\perp = \{\, v \in V \mid \zeta \circ v = 0 \quad \forall \zeta \in Z \,\}).$$

Raccogliamo nella seguente osservazione le proprietà fondamentali della relazione di ortogonalità, ricordando che per spazi vettoriali di dimensione finita, il ruolo di V e di V^* sono "simmetrici" (cf. *Proposizione IV.5.5*).

5.8 Osservazione. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C e sia V^* il suo duale.*
(a) Sia S un sottoinsieme di V, allora $S^\perp$ è un sottospazio di V^* e se $S_1 \subset S_2$ allora $S_2^\perp \subset S_1^\perp$.
(b) Sia S un sottoinsieme di V, allora $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$.
(c) Sia W un sottospazio di V di dimensione k, allora $\dim W^\perp = n - k$.
(d) Se W è un sottospazio di V, allora $(W^\perp)^\perp = W$.

dim. (a). Se ξ, η appartengono ad $S^\perp$ ed $a, b \in C$, allora, per la bilinearità della dualità canonica, dato un qualunque elemento $s \in S$, si ha

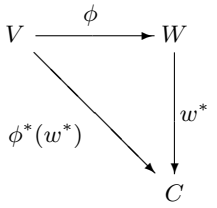
$$(a\xi + b\eta) \circ s = a(\xi \circ s) + b(\eta \circ s) = 0$$

e quindi $S^\perp$ è un sottospazio. Le relazioni di inclusione sono ovvie.
(b). Anche questa discende dalla bilinearità della dualità canonica e dall'osservazione che $\langle S \rangle$ è l'insieme delle combinazioni lineari di elementi di S.
(c). Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di W e completiamola ad una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V. Indicata con $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ la base duale di V^*, si ha $W^\perp = \langle v_{k+1}^*, \dots, v_n^* \rangle$.
(d). Ovviamente si ha $W \subset (W^\perp)^\perp$, e un calcolo di dimensioni permette di concludere. **CVD** □

Concludiamo questa sezione introducendo il concetto di applicazione trasposta.

5.9 Proposizione. *Siano dati due spazi vettoriali V e W ed un omomorfismo $\phi \in \mathrm{Hom}_C(V, W)$. Allora esiste un'unica applicazione lineare $\phi^* : W^* \to V^*$, legata a ϕ dalle relazioni $v \circ \phi^*(w^*) = \phi(v) \circ w^*$, per ogni $v \in V$ e $w^* \in W^*$.*

dim. Dalla definizione discende che, fissato $w^* \in W^*$, l'elemento $\phi^*(w^*) \in \mathrm{Hom}_C(V, C)$ è l'applicazione composta $w^*\phi$, ovvero l'unica applicazione che renda commutativo il diagramma



Infatti, qualunque sia il vettore $v \in V$, si ha

$$\phi^*(w^*)(v) = v \circ \phi^*(w^*) = \phi(v) \circ w^* = w^*(\phi(v)).$$

Ciò permette di concludere che ϕ^* è un'applicazione lineare e che è univocamente determinata dalla condizione dell'enunciato. **CVD** □

5.10 Definizione. Notazioni come nella precedente *Proposizione IV.5.9*. L'applicazione lineare $\phi^* : W^* \to V^*$ ivi definita è detta l'*applicazione trasposta* o, più brevemente, la *trasposta* dell'applicazione lineare $\phi : V \to W$.

È una conseguenza diretta della *Proposizione IV.5.5* e della proprietà che definisce la trasposta il fatto che $\phi^{**} = \phi$. Vediamo ora altre proprietà della trasposta.

5.11 Proposizione. *Siano dati due spazi vettoriali V e W, di dimensione finita sul campo C, ed un omomorfismo $\phi \in \mathrm{Hom}_C(V, W)$. Indichiamo con $\phi^* \in \mathrm{Hom}_C(W^*, V^*)$ la trasposta di ϕ. Si ha*
(a) $\ker(\phi^*) = (\mathrm{im}\,\phi)^\perp$;
(b) $\mathrm{im}(\phi^*) = (\ker\phi)^\perp$.

dim. Per quanto riguarda (a), basta osservare che

$$x^* \in \ker(\phi^*) \quad \Leftrightarrow \quad \phi^*(x^*) \circ v = 0 \,\forall v \in V \quad \Leftrightarrow \quad x^* \circ \phi(v) = 0 \,\forall v \in V \quad \Leftrightarrow \quad x^* \in (\mathrm{im}\,\phi)^\perp.$$

Per quanto ri guarda (b), se $y^* = \phi^*(x^*)$, allora, dato $v \in \ker\phi$, si ha

$$y^* \circ v = \phi^*(x^*) \circ v = x^* \circ \phi(v) = 0,$$

da cui si deduce che $\mathrm{im}(\phi^*) \subset (\ker\phi)^\perp$. L'uguaglianza tra i due sottospazi discende da un calcolo di dimensioni. **CVD** □

Esercizio 5.5. Siano V e W spazi vettoriali su C, $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ basi di tali spazi, $\phi : V \to W$ e $\phi^* : W^* \to V^*$ due applicazioni lineari, l'una trasposta dell'altra. Si verifichi che, se $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$, allora ${}^tA = \alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{V}^*}(\phi^*)$, ove $\mathcal{V}^*$ e $\mathcal{W}^*$ sono le basi duali delle basi date. □

L'identificazione tra spostamenti e forze di cui si parlava si può ora esprimere in modo preciso parlando di *isomorfismo* tra uno spazio vettoriale ed il suo duale.

5.12 Definizione. Siano V e W due spazi vettoriali sul campo C, un'applicazione $g : V \times W \to C$ è un'*applicazione bilineare* se

$$\begin{aligned} g(v, aw + bw') &= ag(v, w) + bg(v, w') \\ g(av + bv', w) &= ag(v, w) + b(v', w), \end{aligned} \tag{5.13}$$

qualunque siano $a, b \in C$, $v, v' \in V$ e $w, w' \in W$.

Un'applicazione bilineare $g : V \times W \to C$ si dice *non-degenere*, se

$$\begin{aligned} g(v, w) = 0 \text{ per ogni } v \in V \quad &\Rightarrow \quad w = 0 \\ g(v, w) = 0 \text{ per ogni } w \in W \quad &\Rightarrow \quad v = 0. \end{aligned} \tag{5.14}$$

L'esempio fondamentale di applicazione bilineare (non-degenere) è la dualità canonica tra V e V^* e ciò non è casuale. Le relazioni tra i due concetti sono ben descritte nella seguente

5.15 Proposizione. *Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita sul campo C. Dare un'applicazione bilineare non-degenere $g : V \times W \to C$ equivale a dare un isomorfismo $\Phi_g : W \to V^*$ ovvero l'isomorfismo trasposto $\Phi_g^* : V \to W^*$.*

dim. Si consideri l'applicazione $\Phi_g : W \to V^*$ che associa al vettore $w \in W$, l'applicazione $v \mapsto g(v, w)$, al variare di v in V. La seconda delle (IV.5.13) dice che $\Phi_g(w) \in V^*$ per ogni $w \in W$, mentre la prima delle (IV.5.13) dice che Φ_g è un omomorfismo. Inoltre, la seconda delle (IV.5.13) dice che l'unico vettore di W che viene trasformato

da Φ_g nello zero di V^* è lo zero di W e quindi $\Phi_g : W \to V^*$ è un omomorfismo iniettivo. Ciò implica, in particolare, $\dim_C W \leq \dim_C V^* = \dim_C V$.

Analoghe considerazioni si possono fare per l'applicazione $\Psi_g : V \to W^*$ che associa al vettore $v \in V$, l'applicazione lineare $w \mapsto g(v, w)$. Dunque $\Psi_g : V \to W^*$ è un omomorfismo iniettivo e si ha la disuguaglianza $\dim_C V \leq \dim_C W^* = \dim_C W$. Mettendo insieme le due disuguaglianze, si conclude che $\dim_C V = \dim_C W$ e quindi che $\Phi_g : W \to V^*$ e $\Psi_g : V \to W^*$ sono due isomorfismi. Si può facilmente verificare che i due isomorfismi sono l'uno il trasposto dell'altro, ovvero $\Psi_g = \Phi_g^*$. **CVD** □

Esercizio 5.6. Vogliamo indicare in una serie di esercizi come sia possibile costruire applicazioni bilineari su uno spazio vettoriale V a partire dagli elementi del suo spazio duale [cf. IV.5.1]. Sia V uno spazio vettoriale sul campo C e sia V^* lo spazio vettoriale duale. Dati $v^*, w^* \in V^*$, si consideri l'applicazione(†)

$$\begin{aligned} v^* \otimes w^* : & V \times V \to C \\ & (x, y) \mapsto (v^* \circ x)(w^* \circ y) \end{aligned} .$$

(a) Si mostri che $v^* \otimes w^*$ è un'applicazione bilineare e si verifichi che, per ogni coppia di vettori $v^*, w^* \in V^*$ e per ogni costante $c \in C$, si ha $(cv^*) \otimes w^* = c(v^* \otimes w^*) = v^* \otimes (cw^*)$.

(b) Si mostri che, presi comunque $u^*, v^*, w* \in V^*$, si ha $(u^* + v^*) \otimes w^* = u^* \otimes w^* + v^* \otimes w^*$ e $u^* \otimes (v^* + w^*) = u^* \otimes v^* + u^* \otimes w^*$.

(c) Fissata una base $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ dello spazio V e la rispettiva base duale $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ di V^*, si mostri che l'insieme $\left\{ v_i^* \otimes v_j^* \;\middle|\; 1 \leq i, j \leq n \right\}$ è una base dello spazio vettoriale $\mathrm{Bil}(V, W, C)$ delle applicazioni bilineari su V.

(d) La definizione di prodotto tensoriale può essere estesa a più forme lineari, ovvero, dati $w_1^*, \ldots, w_r^* \in V^*$, si definisce l'applicazione r-lineare

$$\begin{aligned} w_1^* \otimes \cdots \otimes w_r^* : & \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r \text{ copie}} \to C \\ & (x_1, \ldots, x_r) \mapsto (w_1^* \circ x_1) \cdots (w_r^* \circ x_r) \end{aligned} .$$

Anche in questo caso, con le notazioni fissate in (c), l'insieme $\left\{ v_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes v_{i_r}^* \;\middle|\; 1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq n \right\}$ è la base dello spazio vettoriale delle applicazioni r-lineari. □

Esercizio 5.7. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione 4, $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_4\}$ una base di V e $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \ldots, v_4^*\}$ la relativa base duale. Date le forme lineari $v^* = 2v_1^* - v_3^* + v_4^*$ e $w^* = v_1^* - 3v_2^* - v_3^*$ si verifichi che la matrice dell'applicazione bilineare $v^* \otimes w^*$ coincide col prodotto $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -3, -1, 0)$. □

(†) L'applicazione bilineare $v^* \otimes w^*$ è detta il *prodotto tensoriale* delle forme lineari v^* e w^*.

V
Autovalori ed Autovettori

In questo capitolo ci occuperemo di trovare basi rispetto alle quali un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita ha una matrice particolarmente semplice, ovvero cercheremo, se esistono, delle direzioni dello spazio V lungo le quali l'endomorfismo si comporta come la moltiplicazione per una costante. La trattazione qui svolta, utilizzando l'ipotesi di lavorare su di un corpo di scalari algebricamente chiuso (quale, ad esempio, il corpo dei numeri complessi) evita per quanto possibile di addentrarsi in considerazioni sulla struttura dell'anello dei polinomi per stabilire certi fatti basilari sugli endomorfismi di spazi vettoriali di dimensione finita. Buona parte della §.2 si ispira all'articolo *Down with Determinants* di Sheldon Axler (*Amer. Math. Monthly, February 1995*) ed approfitto quindi di queste righe per ringraziare Frank Sullivan che mi ha fatto conoscere questa esposizione. D'altro canto non si è voluta seguire completamente quell'impostazione ed eliminare ogni traccia dei determinanti dalla trattazione, data la descrizione così esplicita che il determinante permette di dare del polinomio caratteristico e quindi degli autovalori, che del polinomio caratteristico sono le radici. In ogni caso, un lettore che preferisca un'esposizione di questi argomenti completamente scevra della presenza di determinanti, può leggere l'articolo citato o le note di Frank Sullivan tratte dallo stesso.

1. Endomorfismi e matrici simili

Per prima cosa vogliamo scrivere in maniera esplicita che relazioni ci sono tra due matrici, rispetto a basi diverse, di uno stesso endomorfismo.

1.1 Osservazione. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C e siano A e B due matrici quadrate di ordine n, ad elementi nel campo C. Allora, A e B sono matrici di uno stesso endomorfismo $\phi : V \to V$ se, e solo se, esiste una matrice $P \in \mathrm{GL}_n(C)$ tale che $B = P^{-1}AP$.*

dim. Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ due basi di V. Si ponga $B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$, $A = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi)$ e $P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(1_V)$. In particolare, si osservi che, essendo una matrice di cambiamento di base, si ha $P \in \mathrm{GL}_n(C)$ e $P^{-1} = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(1_V)$. Si consideri allora l'ovvio diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{V}} & \xrightarrow{\ \phi\ } & V_{\mathcal{V}} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle 1_V} & & \Big\uparrow{\scriptstyle 1_V} \\ V_{\mathcal{W}} & \xrightarrow{\ \phi\ } & V_{\mathcal{W}} \end{array}$$

ove, ai piedi di ogni copia di V, si è indicata la base a cui riferirsi per dedurre la seguente uguaglianza di matrici. Infatti, la commutatività del diagramma scritto sopra equivale all'uguaglianza [cf. (II.2.11)]

$$B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(1_V \circ \phi \circ 1_V) = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(1_V)\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi)\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(1_V) = P^{-1}AP.$$

Viceversa, se $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ e $P = (p_{ij})_{1\le i,j\le n}$ sono come nell'enunciato, si fissi una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ di V e si consideri l'endomorfismo $\phi : V \to V$, che ha matrice A rispetto alla base $\mathcal{W}$; ovvero sia

$$\phi(w_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i, \qquad \text{per } j = 1, \dots, n.$$

Si considerino ora i vettori

$$v_k = \sum_{h=1}^{n} p_{hk} w_h, \qquad \text{per } k = 1, \ldots, n.$$

Poichè $P \in \mathrm{GL}_n(C)$, $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V e vogliamo mostrare che è la matrice di ϕ rispetto a tale base. La relazione $PB = AP$, significa

$$\sum_{h=1}^{n} p_{ih} b_{hj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_{kj}, \qquad \text{qualunque sia la coppia } (i,j), \text{ con } 1 \leq i, j \leq n.$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned}
\phi(v_j) = \phi\left(\sum_{h=1}^{n} p_{hj} w_h\right) = \sum_{h=1}^{n} p_{hj} \phi(w_h) = \sum_{h=1}^{n} p_{hj} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ih} w_i\right) = \\
= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} a_{ih} p_{hj}\right) w_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} p_{ih} b_{hj}\right) w_i = \\
= \sum_{h=1}^{n} b_{hj} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ih} w_i\right) = \sum_{h=1}^{n} b_{hj} v_h
\end{aligned}$$

che è quanto volevamo verificare. **CVD** □

Possiamo quindi dare la seguente

1.2 Definizione. Due matrici $A, B \in M_{n\times n}(C)$ si dicono *simili* se esiste una matrice $P \in \mathrm{GL}_n(C)$ tale che $B = P^{-1}AP$.

Dunque, due matrici sono simili se, e solo se, sono matrici di uno stesso endomorfismo.

Esercizio 1.1. Si dimostrino le seguenti affermazioni.
(a) La relazione di simiglianza è una relazione di equivalenza sull'insieme $M_{n\times n}(C)$.
(b) Se $A = a\mathbf{1}_n$ è una matrice scalare, allora la classe di equivalenza di A rispetto alla relazione di simiglianza contiene la sola matrice A. □

Buona parte di questo capitolo sarà dedicata allo studio delle matrici *diagonalizzabili*, ovvero le matrici che sono simili [cf. *Definizione V.1.2*] ad una matrice diagonale. Durante tale studio introdurremo però delle nozioni valide in generale nello studio di qualsiasi endomorfismo.

Cominciamo osservando che, se l'endomorfismo $\phi : V \to V$ ammette una matrice diagonale, allora esistono vettori $v \neq 0$ tali che $\phi(v) = av$ per un'opportuna costante $a \in C$. Diamo alcune definizioni in modo da esprimere più chiaramente il problema.

1.3 Definizione. Siano V uno spazio vettoriale sul campo C e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Fissato comunque uno scalare $a \in C$, si consideri il sottospazio vettoriale(†)

$$W_\phi(a) := \ker(\phi - a1_V) = \{\, v \in V \mid \phi(v) = av \,\}.$$

Si dice che a è un *autovalore* (o *valore caratteristico*) per l'endomorfismo ϕ se $W_\phi(a) \neq (0)$, in tal caso il numero intero positivo $\dim_C W_\phi(a)$ si dirà la *nullità* di a (relativamente a ϕ); in simboli, si scriverà $null_\phi(a) := \dim_C W_\phi(a)$.

Se a è un autovalore per l'endomorfismo ϕ, ogni vettore non nullo $0 \neq v \in W_\phi(a)$ si dirà un *autovettore* (o *vettore caratteristico*) relativo all'autovalore a.

Mostriamo ora che autovettori relativi ad autovalori distinti sono tra loro linearmente indipendenti e che perciò il numero di possibili autovalori relativi ad un dato endomorfismo $\phi : V \to V$ non può eccedere la dimensione dello spazio vettoriale V.

(†) Col simbolo $a1_V : V \to V$ indichiamo l'endomorfismo di moltiplicazione per a: $v \mapsto av$, al variare di v in V. In seguito, se non vi sarà pericolo di confusione, indicheremo tale endomorfismo con la sola costante a.

1.4 Osservazione. *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Se $a_1, \dots, a_r$ sono autovalori per l'endomorfismo ϕ, a due a due distinti ($i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$); allora, presi comunque degli autovettori $v_j \in W_\phi(a_j)$, per $j = 1, \dots, r$, i vettori $v_1, \dots, v_r$ sono linearmente indipendenti.*

dim. Sia $b_1v_1 + \cdots + b_rv_r = 0$ ed applichiamo l'endomorfismo $(\phi - a_2)\cdots(\phi - a_r)$ ai due membri dell'uguaglianza. Si ottiene così la relazione

$$b_1(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\dots(a_1 - a_r)v_1 = 0,$$

ed essendo $v_1 \neq 0$ e gli autovalori $a_1, \dots, a_r$ a due a due distinti ($r \neq j \Rightarrow a_r - a_j \neq 0$), si conclude che $b_1 = 0$. In modo analogo si ottiene che anche tutti gli altri coefficienti $b_2, \dots, b_r$ sono uguali a zero. **CVD** □

Dalla *Definizione V.1.3*, discende che la costante $a \in C$ è un autovalore se, e solo se, $\ker(\phi - a)$ ha dimensione positiva, ovvero se, e solo se, $\det(\phi - a) = 0$. Dunque, per determinare gli autovalori di ϕ, possiamo considerare la funzione $c \mapsto \det(\phi - c)$, al variare di c in C, e cercare gli zeri di tale funzione. Cominciamo con una considerazione di carattere generale. Sia $C[X]$ l'anello dei polinomi in una indeterminata a coefficienti nel campo C ed indichiamo con $C(X)$ il suo campo dei quozienti. Allora, data una matrice $A(X) = (a_{ij}(X))_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n\times n}(C[X])$, questa determina un endomorfismo dello spazio vettoriale $C(X)^n$ e quindi ha senso parlare del determinante della matrice $A(X)$. Tale determinante è un polinomio, perchè

$$\det A(X) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1\sigma(1)}(X) \cdots a_{n\sigma(n)}(X) \qquad \text{(cf. III.1.7)}$$

e somme e prodotti di polinomi sono ancora dei polinomi. Allora, data una matrice $A \in M_{n\times n}(C)$, si può considerare la matrice $A - X\mathbf{1}_n \in M_{n\times n}(C[X])$ ed il suo determinante, ovvero il polinomio $\det(A - X\mathbf{1}_n) \in C[X]$.

1.5 Proposizione. *Se A e B sono due matrici simili in $M_{n\times n}(C)$, allora*

$$\det(A - X\mathbf{1}_n) = \det(B - X\mathbf{1}_n).$$

dim. Sia $P \in \mathrm{GL}_n(C)$ per cui si abbia $B = P^{-1}AP$, allora P è invertibile anche come matrice ad elementi in $C(X)$ (il suo determinante è diverso da zero). Inoltre, essendo $X\mathbf{1}_n$ una matrice scalare, si ha $X\mathbf{1}_n = P^{-1}(X\mathbf{1}_n)P$ e quindi

$$B - X\mathbf{1}_n = P^{-1}AP - P^{-1}(X\mathbf{1}_n)P = P^{-1}(A - X\mathbf{1}_n)P$$

da cui si deduce la tesi applicando il Teorema di Binet (cf. *Proposizione III.2.3*). **CVD** □

Siamo quindi in grado di associare ad ogni endomorfismo un polinomio che ne determina gli autovalori.

1.6 Definizione. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Fissata una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, sia $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ la matrice di ϕ rispetto alla base data. Si chiama *polinomio caratteristico* di ϕ il polinomio(†)

$$p_\phi(X) := (-1)^n \det(A - X\mathbf{1}_n).$$

(†) Il segno $(-1)^n$ viene posto affinché il polinomio caratteristico sia *monico*, cioè col coefficiente del termine di grado massimo uguale ad 1.

Le radici di $p_\phi(X)$ sono tutti e soli gli autovalori di ϕ e, se $a \in C$ è un autovalore, chiameremo *molteplicità* dell'autovalore a l'esponente $r \in \mathbb{N}$, tale che $(X-a)^r \mid p_\phi(X)$ e $(X-a)^{r+1} \nmid p_\phi(X)$. In tal caso scriveremo $molt_\phi(a) = r$.

Esempio 1. Se $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l'endomorfismo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

il suo polinomio caratteristico è

$$p_\phi(X) = -\det(A - X\mathbf{1}) = -\det \begin{pmatrix} 3-X & 1 & -1 \\ 1 & 3-X & -1 \\ 0 & 0 & 2-X \end{pmatrix} = (2-X)^2(X-4).$$

Dunque gli autovalori sono 2 (con molteplicità 2) e 4 (con molteplicità 1). I corrispondenti sottospazi di autovettori si determinano risolvendo i sistemi lineari omogenei $(A - 2\mathbf{1})\mathbf{x} = 0$ e $(A - 4\mathbf{1})\mathbf{x} = 0$, ovvero

$$\begin{cases} (3-2)x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + (3-2)x_2 - x_3 = 0 \\ (2-2)x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (3-4)x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + (3-4)x_2 - x_3 = 0 \\ (2-4)x_3 = 0 \end{cases}.$$

Il primo dei due sistemi ha rango 1 e quindi il sottospazio delle soluzioni ha dimensione 2 ed è generato dai due autovettori (linearmente indipendenti) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il secondo sistema ha rango 2 e quindi il sottospazio degli autovettori relativi all'autovalore 4 ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

I tre vettori v_1, v_2, v_3 sono una base di $\mathbb{R}^3$ e quindi l'endomorfismo ϕ è diagonalizzabile.

Vediamo ora l'esempio di un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che non è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).

Esempio 2. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, di matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Il polinomio caratteristico è

$$\det \begin{pmatrix} 2-X & 3 \\ -3 & -2-X \end{pmatrix} = X^2 + 5,$$

che non ha radici reali e quindi non ci sono autovalori reali per un tale ϕ. Dunque ϕ non è diagonalizzabile come endomorfismo di $\mathbb{R}^2$.

Se consideriamo invece l'endomorfismo $\phi_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ che ha la stessa matrice B, allora vi sono i due autovalori distinti $i\sqrt{5}$ e $-i\sqrt{5}$ a cui corrispondono i sottospazi di autovettori generati rispettivamente da $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2-i\sqrt{5} \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2+i\sqrt{5} \end{pmatrix}$; e quindi $\phi_{\mathbb{C}}$ è diagonalizzabile.

Nell'esempio precedente, l'endomorfismo ϕ non era diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$) perchè gli autovalori non erano numeri reali, ma questa non è l'unica ragione perchè un endomorfismo non sia diagonalizzabile. Diamo ora un esempio di endomorfismo che non è diagonalizzabile perchè, pur avendo tutti gli autovalori reali, gli autovettori corrispondenti non sono sufficienti a generare tutto lo spazio vettoriale.

Esempio 3. Sia $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è

$$p_\psi(X) = -\det \begin{pmatrix} -2-X & 4 & -2 \\ 3 & -1-X & -3 \\ -1 & 1 & -3-X \end{pmatrix} = X^3 + 6X^2 - 32 = (X-2)(4+X)^2,$$

e quindi gli autovalori di ψ sono $c_1 = 2$ (con molteplicità 1) e $c_2 = -4$ (con molteplicità 2). Gli spazi di autovettori corrispondenti si ottengono risolvendo i sistemi lineari omogenei

$$\begin{cases} -(2+2)x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - (1+2)x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - (3+2)x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -(2-4)x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - (1-4)x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - (3-4)x_3 = 0 \end{cases}$$

che sono rispettivamente equivalenti ai sistemi

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Entrambo i sistemi hanno rango 2 e quindi gli spazi di autovettori corrispondenti hanno tutti e due dimensione 1. Dunque non può esistere una base di autovettori per ψ e quindi l'endomorfismo non è diagonalizzabile.

Osserviamo ora che vi è una disuguaglianza fondamentale tra la molteplicità e la nullità associate ad uno stesso autovalore.

1.7 Proposizione. *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Per ogni autovalore $a \in C$, si ha*

$$null_\phi(a) \leq molt_\phi(a).$$

dim. Sia $r = null_\phi(a) = \dim W_\phi(a)$. Siano dati dunque r autovettori linearmente indipendenti $v_1, \ldots, v_r$, relativi all'autovalore a, e si completino tali vettori ad una base di V. Rispetto a tale base, la matrice di ϕ è composta di blocchi della forma

$$A = \begin{pmatrix} a\mathbf{1}_r & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Dunque, con un calcolo diretto, si ottiene che

$$p_\phi(X) = (-1)^n \det(A - X\mathbf{1}_n) = (-1)^n (X-a)^r \, g(X),$$

ove $g(X)$ altri non è che il poinomio caratteristico della sottomatrice C, ovvero $\det(B - X\mathbf{1})$. Quindi il polinomio caratteristico di ϕ è divisibile per $(X-a)^r$, da cui si deduce che $molt_\phi(a) \geq r = null_\phi(a)$. **CVD** □

Osservazione. *Una prima caratterizzazione degli endomorfismi diagonalizzabili.* Osserviamo che la Proposizione testè dimostrata, permette di dare una prima risposta al problema di determinare le matrici diagonalizzabili. Come prima cosa, affinché un endomorfismo $\phi : V \to V$ sia diagonalizzabile, tutti gli autovalori di ϕ devono appartenere al campo C, su cui è definito lo spazio vettoriale V. Inoltre, se $a_1, \ldots, a_r$ sono gli autovalori per l'endomorfismo ϕ, a due a due distinti ($i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$), abbiamo visto che gli autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti, e ciò significa che i relativi

spazi di autovettori hanno intersezione banale, ovvero che $i \neq j \Rightarrow W_\phi(a_i) \cap W_\phi(a_j) = (0)$. Ovvero che somma degli spazi di autovettori è diretta, ovvero si ha

$$W_\phi(a_1) \oplus \cdots \oplus W_\phi(a_r) \subseteq V. \tag{1.8}$$

La dimensione di questa somma diretta è quindi uguale alla somma delle dimensioni dei singoli sottospazi e quindi a

$$null_\phi(a_1) + \cdots + null_\phi(a_r)$$

ed osserviamo che ϕ è diagonalizzabile se, e solo se, l'inclusione in (V.1.8) è un'uguaglianza, ovvero se la somma delle nullità uguaglia la dimensione di V.

Il grado del polinomio caratteristico di un endomorfismo $\phi : V \to V$ è uguale alla dimensione dello spazio V. Inoltre, quando esistono in C tutte le radici del polinomio caratteristico, il suo grado è anche uguale alla somma delle molteplicità degli autovalori. Dunque, in base a quanto sinora osservato, si ha

$$null_\phi(a_1) + \cdots + null_\phi(a_r) \leq molt_\phi(a_1) + \cdots + molt_\phi(a_r) = \dim_C V$$

e quindi, trattandosi di somme di numeri interi positivi e stante la disuguaglianza della Proposizione precedente (cf. *Proposizione V.1.7*), vale l'uguaglianza se, e solo se, per ogni $i = 1, \ldots, r$ si ha $null_\phi(a_i) = molt_\phi(a_i)$. Possiamo cioè affermare che *un endomorfismo $\phi : V \to V$ è diagonalizzabile se, e solo se, tutti gli autovalori di ϕ appartengono al campo C, e per ogni autovalore la nullità coincide con la molteplicità.*

Esercizio 1.2. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$, avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico di ϕ, gli autovalori e le rispettive molteplicità e nullità. □

Esercizio 1.3. Si dica se è diagonalizzabile l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{C}^4$ che ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ -10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. In caso affermativo, si determini una base di $\mathbb{C}^4$ costituita da autovettori relativi a ϕ. □

Esercizio 1.4. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Si mostri che se il polinomio caratteristico di ϕ è prodotto di fattori lineari distinti in $C[X]$, allora ϕ è diagonalizzabile. □

⋆Esercizio 1.5. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Se $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$, con $\phi(W_j) \subseteq W_j$ per $j = 1, \ldots, r$, indichiamo con $\phi_j : W_j \to W_j$ la restrizione di ϕ al sottospazio W_j. Si dimostri che $p_\phi(x) = p_{\phi_1}(x) \cdots p_{\phi_r}(x)$. □

Concludiamo questa sezione con un esempio

1.9 Esempio. Abbiamo osservato che, in conseguenza della *Definizione V.1.6*, il polinomio caratteristico è un invariante associato ad un endomorfismo e che non dipende quindi dalla matrice scelta per calcolarlo. In particolare, ciò significa che, se due matrici hanno polinomi caratteristici distinti, allora non possono essere simili. Non è vero però che due matrici che abbiano lo stesso polinomio caratteristico debbano perciò essere simili. Si vedano ad esempio le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

che hanno entrambe $(X-2)^2$ come polinomio caratteristico, ma non sono simili, perchè le matrici scalari, come è A, sono simili solo a sé stesse.

2. Autovettori generalizzati

Nella sezione precedente, abbiamo dato una condizione necessaria e sufficiente affinché un endomorfismo di uno spazio vettoriale, di dimensione finita, V sia diagonalizzabile ed abbiamo visto come si debba operare per determinare sia le costanti che compaiono nell'eventuale matrice diagonale, ovvero gli autovalori dell'endomorfismo, che una base rispetto a cui si potrebbe avere la matrice diagonale, ovvero gli autovettori relativi ai vari autovalori.

D'altra parte nella stessa sezione abbiamo visto anche che esistono endomorfismi che *non* sono diagonalizzabili e ciò, essenzialmente per due diversi ordini di motivi: o perchè non vi sono tutte le radici del polinomio caratteristico (ovvero tutti gli autovalori) tra gli scalari che si considerano, oppure perchè, pur essendovi tutti gli autovalori tra gli scalari del corpo di base, gli spazi di autovettori corrispondenti non hanno dimensioni sufficientemente elevate. Al primo problema si può ovviare facilmente, supponendo di lavorare su un corpo di scalari algebricamente chiuso, ad esempio sul corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi; il secondo problema invece non è superabile e costituisce invece una caratteristica intrinseca degli endomorfismi, indipendente dal corpo su cui li si considera. Gran parte del seguito di questo capitolo sarà dedicata allo studio degli endomorfismi non diagonalizzabili ed alle opportune generalizzazioni dei concetti introdotti nella sezione precedente, necessarie a studiare questa nuova classe di applicazioni.

D'ora in poi, salvo diverso avviso, supporremo di lavorare con un endomorfismo $\phi : V \to V$, ove V è uno spazio vettoriale di dimensione finita sul corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi(†).

2.1 Definizione. Un vettore $v \in V$ è un *autovettore generalizzato* per $\phi : V \to V$ se $(\phi - a1_V)^m(v) = 0$ per qualche autovalore $a \in \mathbb{C}$ e per qualche intero positivo m. Si chiama *periodo* dell'autovettore generalizzato v il minimo intero m per cui $v \in \ker(\phi - a1_V)^m$, ovvero l'intero s per cui $(\phi - a1_V)^s(v) = 0 \neq (\phi - a1_V)^{s-1}(v)$.

È immediato osservare che si tratta di una generalizzazione degli autovettori e che si ha

$$\ker(\phi - a) \subseteq \ker(\phi - a)^2 \subseteq \cdots \subseteq \ker(\phi - a)^r \subseteq \cdots$$

ovvero che gli autovettori generalizzati sono l'unione di questa famiglia di sottospazi. In realtà, possiamo mostrare che, da un certo esponente r in poi, i sottospazi sono tutti uguali tra loro e coincidono quindi con l'unione.

2.2 Osservazione. *Sia v un autovettore generalizzato per $\phi : V \to V$ e sia k un intero positivo tale che $(\phi - a)^k(v) = 0 \neq (\phi - a)^{k-1}(v)$. Allora i vettori $v, (\phi - a)(v), \ldots, (\phi - a)^{k-1}(v)$ sono linearmente indipendenti.*

dim. Se $b_1 v + b_2(\phi - a)(v) + \cdots + b_k(\phi - a)^{k-1}(v) = 0$, allora, applicando $(\phi - a)^{k-1}$ ai due membri dell'uguaglianza, si ottiene $b_1(\phi - a)^{k-1}(v) = 0$, che implica $b_1 = 0$. Dunque, deve essere $b_2(\phi - a)(v) + \cdots + b_k(\phi - a)^{k-1}(v) = 0$, ed applicando $(\phi - a)^{k-2}$ ai due membri dell'uguaglianza, si ottiene $b_2 = 0$; e così via per tutti i coefficienti successivi. **CVD** □

Da quanto visto, risulta chiaro che non vi possono essere autovettori generalizzati relativi all'autovalore a di periodo superiore ad $n = \dim_{\mathbb{C}} V$ e quindi appartengono al sottospazio $\ker(\phi - a)^n$. Vedremo in seguito che, in molti casi, si potrà migliorare la scelta dell'esponente. Ad esempio, se ϕ è diagonalizzabile, gli autovettori usuali sono tutti e soli gli autovettori generalizzati [esercizio!] e quindi l'esponente può essere preso uguale ad 1.

Possiamo estendere il contenuto dell' *Osservazione V.1.4* al caso di autovettori generalizzati.

2.3 Proposizione. *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{C}$ e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Se $a_1, \ldots, a_r$ sono autovalori per l'endomorfismo ϕ, a due a due distinti; allora, presi*

(†) Gran parte delle considerazioni che faremo saranno valide su qualsiasi corpo algebricamente chiuso e, più in generale, anche nel caso in cui il corpo non sia algebricamente chiuso, ma contenga tutti gli autovalori dell'endomorfismo ϕ.

comunque degli autovettori generalizzati $0 \neq v_j \in \ker(\phi - a_j)^n$, *per* $j = 1, \dots, r$, *i vettori* $v_1, \dots, v_r$ *sono linearmente indipendenti.*

dim. Sia $b_1v_1 + \cdots + b_rv_r = 0$ e, per $j = 1, \dots, r$, sia $k_j \geq 1$ il minimo esponente per cui $(\phi - a_j)^{k_j}(v_j) = 0$. Allora, applicando l'endomorfismo $(\phi - a_1)^{k_1-1}(\phi - a_2)^{k_2} \cdots (\phi - a_r)^{k_r}$ ai due membri dell'uguaglianza, ed osservato che i vari fattori in questo prodotto *commutano tra loro* si ottiene $b_1(a_1 - a_2)^{k_2} \cdots (a_1 - a_r)^{k_r}(\phi - a_1)^{k_1-1}v_1 = 0$, dato che $(\phi - a_1)^{k_1-1}v_1 \neq 0$ ed appartiene a $\ker(\phi - a_1)$, ovvero è un autovettore relativo all'autovalore a_1. Quindi deve essere $b_1 = 0$ ed analogamente si procede per verificare che $b_2 = \cdots = b_r = 0$. **CVD** □

Avevamo visto che l'ostacolo fondamentale alla diagonalizzabilità di un endomorfismo era l'insufficienza degli autovettori per generare tutto lo spazio. Il passaggio agli autovettori generalizzati permette di risolvere questo problema.

2.4 Proposizione. *Siano* V *uno spazio vettoriale di dimensione* n *sul campo* $\mathbb{C}$ *e* $\phi : V \to V$ *un endomorfismo. Lo spazio* V *è generato da autovettori generalizzati.*

dim. Possiamo dimostrare questo fatto facendo induzione sulla dimensione dello spazio V, perchè, se $n = 1$, ogni endomorfismo è la moltiplicazione per una costante e quindi ogni vettore è un autovettore e la tesi è verificata. Supponiamo ora $n > 1$. Sia a un autovalore per ϕ e consideriamo lo spazio degli autovettori generalizzati $\ker(\phi - a)^n$ che ha quindi dimensione positiva. Se $V = \ker(\phi - a)^n$ la tesi è verificata, altrimenti, mostriamo che si ha $V = \ker(\phi - a)^n \oplus \operatorname{im}(\phi - a)^n$ e $\phi(\operatorname{im}(\phi - a)^n) \subseteq \operatorname{im}(\phi - a)^n$. Per motivi di dimensione, per verificare che $V = \ker(\phi - a)^n \oplus \operatorname{im}(\phi - a)^n$ è sufficiente verificare che $\ker(\phi - a)^n \cap \operatorname{im}(\phi - a)^n = \langle 0 \rangle$; infatti, se $v \in \ker(\phi - a)^n \cap \operatorname{im}(\phi - a)^n$, si ha che $v = (\phi - a)^n w$ per un qualche vettore w e, d'altra parte, $0 = (\phi - a)^n v = (\phi - a)^{2n} w$ e quindi anche w è un autovettore generalizzato e si ha perciò $v = (\phi - a)^n w = 0$. Infine, se $u = (\phi - a)^n u'$, allora $\phi(u) = (\phi - a)^n \phi(u')$ perchè ϕ commuta con $(\phi - a)^n$ dato che le potenze di ϕ commutano tra loro e l'applicazione lineare ϕ commuta con la moltiplicazione per scalari.

Dunque, il sottospazio $\operatorname{im}(\phi - a)^n$ ha dimensione strettamente più piccola di n e ϕ induce un endomorfismo di tale spazio, dunque per l'ipotesi induttiva è generato da autovettori generalizzati per ϕ e la tesi è dimostrata. **CVD** □

Possiamo raccogliere quanto dimostrato finora in un unico enunciato.

2.5 Teorema. *Siano* V *uno spazio vettoriale di dimensione* n *sul campo* $\mathbb{C}$, $\phi : V \to V$ *un endomorfismo il cui polinomio caratteristico sia* $p_\phi(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r}$ *con* $a_1, \dots, a_r$ *a due a due distinti. Allora*

(a) $V = \ker(\phi - a_1)^n \oplus \cdots \oplus \ker(\phi - a_r)^n$;
(b) $\phi(\ker(\phi - a_j)^n) \subseteq \ker(\phi - a_j)^n$, *per* $j = 1, \dots, r$;
(c) $\dim_{\mathbb{C}} \ker(\phi - a_j)^n = m_j$, *e quindi* $\ker(\phi - a_j)^n = \ker(\phi - a_j)^{m_j}$, *per* $j = 1, \dots, r$.

dim. (a). La decomposizione di $V = \ker(\phi - a_1)^n \oplus \cdots \oplus \ker(\phi - a_r)^n$ significa esattamente che lo spazio V è generato da autovettori generalizzati per ϕ (e quindi è somma dei sottospazi scritti) e che autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti (e quindi che la somma è diretta).

(b). $\phi(\ker(\phi - a_j)^n) \subseteq \ker(\phi - a_j)^n$, discende dal fatto, già osservato nella dimostrazione della *Proposizione V.2.4*, che ϕ commuta con $(\phi - a_j)^n$, dato che le potenze di ϕ commutano tra loro e ϕ è lineare e quindi commuta con la moltiplicazione per scalari.

(c). La restrizione di ϕ al sottospazio $\ker(\phi - a_j)^n$ ha come unico autovalore a_j, e quindi il polinomio caratteristico di questa restrizione è $(x - a_j)^{d_j}$, ove $d_j = \dim_{\mathbb{C}} \ker(\phi - a_j)^n$. Poichè il polinomio caratteristico di ϕ è il prodotto dei polinomi caratteristici delle sue restrizioni agli addendi diretti (cf. `Esercizio V.1.5`) ed è uguale ad $(x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r}$, si conclude che $d_j = m_j$, per $j = 1, \dots, r$. Da ultimo l'identità $\ker(\phi - a_j)^n = \ker(\phi - a_j)^{m_j}$, discende dall'*Osservazione V.2.2*. **CVD** □

Abbiamo quindi visto (cf. *Teorema V.2.5*) che gli autovettori generalizzati relativi all'autovalore a_j hanno periodo minore o uguale alla molteplicità m_j dell'autovalore. Diamo quindi la seguente definizione.

2.6 Definizione. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{C}$, $\phi : V \to V$ un endomorfismo il cui polinomio caratteristico sia $p_\phi(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r}$ con $a_1, \ldots, a_r$ a due a due distinti. Per $j = 1, \ldots, r$, indichiamo quindi con c_j il massimo periodo di un autovettore generalizzato relativo all'autovalore a_j. Si chiama *polinomio minimo* per l'endomorfismo ϕ il polinomio $\lambda_\phi(x) = (x - a_1)^{c_1} \cdots (x - a_r)^{c_r}$.

Il nome di polinomio minimo deriva dal fatto che si tratta del polinomio monico $f(x)$, di grado minimo tale che $f(\phi)$ sia l'endomorfismo che manda a zero tutti i vettori di V. Osserviamo subito come il polinomio minimo caratterizzi ϕ, ad esempio, si ha

2.7 Proposizione. *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{C}$ e $\phi : V \to V$ un endomorfismo; allora ϕ è diagonalizzabile se, e solo se, il suo polinomio minimo è prodotto di fattori lineari distinti.*

dim. Osserviamo dapprima che, poichè per ogni autovalore esiste almeno un autovettore non nullo, tutti gli esponenti $c_1 \ldots c_r$ del polinomio minimo sono maggiori o uguali ad 1; dunque $\lambda_\phi(x)$ è prodotto di fattori lineari distinti se, e solo se, tutti questi esponenti sono uguali esattamente ad 1, cioè se, e solo se, tutti gli autovettori generalizzati hanno periodo minore o uguale ad 1 e quindi sono autovettori (usuali). Ciò permette di concludere. **CVD** □

Da quanto abbiamo dimostrato finora, discende immediatamente il seguente risultato.

2.8 Teorema. [Hamilton-Cayley] *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{C}$, $\phi : V \to V$ un endomorfismo e $\lambda_\phi(x)$ il suo polinomio minimo. Si ha $\lambda_\phi(\phi)v = 0$ per ogni vettore v di V. Inoltre, il polinomio minimo di ϕ divide il polinomio caratteristico ed i due polinomi hanno le stesse radici.*

Esercizio 2.1. Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V sul corpo C; si dice che ϕ è *nilpotente* se esiste un numero intero positivo r tale che $\phi^r(v) = 0$ per ogni $v \in V$. Si mostri che un endomorfismo ϕ di uno spazio vettoriale V, di dimensione n, è nilpotente se, e solo se, 0 è l'unico autovalore di ϕ. □

Esercizio 2.2. Nelle notazioni del *Teorema V.2.5*, sia $W_j = \ker(\phi - a_j)^{m_j}$, per $j = 1, \ldots, r$ e si indichino con $\delta_j : W_j \to W_j$ la moltiplicazione per lo scalare a_j e con $\nu_j : W_j \to W_j$ la restrizione di $\phi - a_j$ a W_j, per $j = 1, \ldots, r$.

(a) Si verifichi che ν_j è un endomorfismo *nilpotente* (ovvero, una sua potenza manda a zero tutti i vettori di W_j) e che δ_j commuta con ν_j.

(b) Si considerino gli endomorfismi $\nu : V \to V$ e $\delta : V \to V$, definiti dalle condizioni $\nu_{|W_j} = \nu_j$ e $\delta_{|W_j} = \delta_j$, per $j = 1, \ldots, r$. Si mostri che $\phi = \delta + \nu$ e che $\delta \circ \nu = \nu \circ \delta$ (ovvero: *ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{C}$ è somma di un endomorfismo diagonalizzabile e di un endomorfismo nilpotente che commutano tra loro*). □

Possiamo quindi trarre le conseguenze delle osservazioni sin qui fatte per quanto riguarda possibili matrici dell'endomorfismo ϕ. In base al *Teorema V.2.5*, si ha che

$$V = \ker(\phi - a_1)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \ker(\phi - a_r)^{m_r}$$

e ϕ induce un endomorfismo su ciascuno degli addendi diretti. Quindi, unendo insieme, nell'ordine, una base $w_1^{(1)}, \ldots w_{m_1}^{(1)}$ di $\ker(\phi - a_1)^{m_1}$, una base $w_1^{(2)}, \ldots w_{m_2}^{(2)}$ di $\ker(\phi - a_2)^{m_2}$ e così via, fino ad una base $w_1^{(r)}, \ldots w_{m_r}^{(r)}$ di $\ker(\phi - a_r)^{m_r}$, si ottiene una base di V rispetto a cui la matrice di ϕ è fatta di blocchi quadrati di ordine $m_1, \ldots, m_r$ posti lungo la diagonale principale.

Per ciascuno dei blocchi, possiamo scegliere in modo più accurato la base. Supponiamo quindi di lavorare in un sottospazio di autovettori generalizzati e, per non portarci dietro troppi indici, siano a un autovalore per ϕ, m la sua molteplicità e c il massimo periodo di un autovettore generalizzato relativo ad a. Si ha quindi la successione di sottospazi

$$\ker(\phi - a) \subset \ker(\phi - a)^2 \subset \cdots \subset \ker(\phi - a)^c$$

ove ciascuna delle inclusioni è propria (cf. *Osservazione V.2.2*). Se scegliamo una base di $\ker(\phi - a)$, la completiamo ad una base di $\ker(\phi - a)^2$, completiamo la base così ottenuta ad una base di $\ker(\phi - a)^3$, e

così via fino ad una base di tutto il sottospazio di autovettori generalizzati $\ker(\phi-a)^c$, si ha che la matrice rispetto a questa base della restrizione di ϕ è una matrice triangolare superiore, ovvero una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} a & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$$

perchè, se $v \in \ker(\phi - a)^k$, allora $\phi(v) = av + (\phi - a)v$ e $(\phi - a)v \in \ker(\phi - a)^{k-1}$.

Possiamo quindi enunciare un primo risultato sulla matrice di un endomorfismo.

2.9 Teorema. (Forma Triangolare) *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{C}$, $\phi : V \to V$ un endomorfismo il cui polinomio caratteristico sia $p_\phi(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r}$ con $a_1, \dots, a_r$ a due a due distinti. Allora esiste una base di V su $\mathbb{C}$, rispetto alla quale la matrice di ϕ assume la forma*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

ove A_j è una matrice quadrata, di ordine m_j, del tipo

$$A_j = \begin{pmatrix} a_j & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & a_j \end{pmatrix}.$$

Il risultato enunciato sopra può essere considerato una forma debole del Teorema di Jordan e riscrive, in termini di matrici, il contenuto dell'`Esercizio V.2.2`. Il citato Teorema di Jordan consiste in un raffinamento nella scelta della base di autovettori generalizzati, di modo che la parte della matrice posta al di sopra della diagonale principale (cioè la parte nilpotente) diventi anch'essa nulla, con l'eccezione delle entrate di posto $(i, i+1)$, per $i = 1, \dots, n-1$, che potranno essere uguali ad 1 oppure a 0. L'idea fondamentale nella dimostrazione di questo risultato consiste in una generalizzazione della *Osservazione V.2.2*. Procediamo con ordine e consideriamo come sopra un autovalore a e la successione di sottospazi

$$\ker(\phi - a) \subset \ker(\phi - a)^2 \subset \cdots \subset \ker(\phi - a)^c$$

e sia $d_j = \dim_{\mathbb{C}} \ker(\phi - a)^j$, per $j = 1, \dots, c$. Preso un vettore $0 \neq v \in \ker(\phi - a)^c \setminus \ker(\phi - a)^{c-1}$, sappiamo che i vettori $v, (\phi - a)v, \dots, (\phi - a)^{c-1}v$ sono linearmente indipendenti (cf. *Osservazione V.2.2*). Si osservi che ϕ induce un endomorfismo nel sottospazio $\langle v, (\phi - a)v, \dots, (\phi - a)^{c-1}v \rangle$ e, presi come base del sottospazio i vettori dati, *nell'ordine inverso*, la matrice della restrizione di ϕ è una matrice quadrata, di ordine c del tipo

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Una matrice di questo tipo è detta un *blocco di Jordan* di ordine c. Sia $d_c - d_{c-1} = s \geq 1$. Vogliamo mostrare che la matrice della restrizione di ϕ agli autovettori generalizzati relativi all'autovalore a contiene s blocchi di Jordan di ordine c. Ciò significa che, presi dei vettori $v_1, \dots, v_s$ tali che

$$\ker(\phi - a)^c = \ker(\phi - a)^{c-1} \oplus \langle v_1, \dots, v_s \rangle$$

è sufficiente mostrare che i vettori

$$\begin{gathered} v_1, (\phi - a)v_1, \ldots, (\phi - a)^{c-1}v_1, \\ v_2, (\phi - a)v_2, \ldots, (\phi - a)^{c-1}v_2, \\ \cdots, \\ v_s, (\phi - a)v_s, \ldots, (\phi - a)^{c-1}v_s \end{gathered}$$

sono linearmente indipendenti. Se fosse

$$a_1^{(0)}v_1+\cdots+a_s^{(0)}v_s+a_1^{(1)}(\phi-a)v_1+\cdots+a_s^{(1)}(\phi-a)v_s+\cdots+a_1^{(c-1)}(\phi-a)^{c-1}v_1+\cdots+a_s^{(c-1)}(\phi-a)^{c-1}v_s = 0,$$

allora si avrebbe $a_1^{(0)}v_1 + \cdots + a_s^{(0)}v_s \in \ker(\phi - a)^{c-1}$ visto che tutti gli altri termini della somma stanno in questo sottospazio e quindi deve essere $a_1^{(0)} = \cdots = a_s^{(0)} = 0$. Dunque deve aversi

$$a_1^{(1)}v_1 + \cdots + a_s^{(1)}v_s + \cdots + a_1^{(c-1)}(\phi - a)^{c-2}v_1 + \cdots + a_s^{(c-1)}(\phi - a)^{c-2}v_s \in \ker(\phi - a),$$

e quindi, $a_1^{(1)} = \cdots = a_s^{(1)} = 0$ dato che dovrebbe aversi $a_1^{(1)}v_1 + \cdots + a_s^{(1)}v_s \in \ker(\phi - a)^{c-1}$, essendo $\ker(\phi - a) \subseteq \ker(\phi - a)^{c-1}$ e $\ker(\phi - a)^{c-1} \cap \langle v_1, \ldots, v_s\rangle = \langle 0\rangle$. Procedendo analogamente, si ottiene

$$a_1^{(c-1)}v_1 + \cdots + a_s^{(c-1)}v_s \in \ker(\phi - a)^{c-1}$$

e quindi $a_1^{(c-1)} = \cdots = a_s^{(c-1)} = 0$ che conclude la verifica dell'indipendenza.

L'osservazione appena fatta sull'indipendenza, ci dice che, se $d_c - d_{c-1} = s$, allora $d_j - d_{j-1} \geq s$ per ogni $j = 1, \ldots c$, perchè i vettori $(\phi - a)^{c-j}v_1, \ldots, (\phi - a)^{c-j}v_s$ hanno esattamente periodo j e sono linearmente indipendenti. Allora, se $d_j - d_{j-1} = s$ per ogni $j = 1, \ldots c$, si ha $m = \dim \ker(\phi - a)^c = cs$ e, prendendo la base descritta sopra, si vede che la matrice della restrizione di ϕ è fatta di s blocchi di Jordan di ordine c. Altrimenti, si prenda il massimo indice $j < c$, per cui si abbia $d_j - d_{j-1} = t > s$ e si prendano dei vettori $w_1, \ldots, w_{t-s}$ tali che

$$\ker(\phi - a)^j = \ker(\phi - a)^{j-1} \oplus \left\langle (\phi - a)^{c-j}v_1, \ldots, (\phi - a)^{c-j}v_s \right\rangle \oplus \langle w_1, \ldots, w_{t-s}\rangle .$$

È sufficiente mostrare che i vettori

$$\begin{gathered} w_1, (\phi - a)w_1, \ldots, (\phi - a)^{j-1}w_1, \\ w_2, (\phi - a)w_2, \ldots, (\phi - a)^{j-1}w_2, \\ \cdots, \\ w_{t-s}, (\phi - a)w_{t-s}, \ldots, (\phi - a)^{j-1}w_{t-s} \end{gathered}$$

sono linearmente indipendenti, per concludere che allora la matrice della restrizione di ϕ contiene anche $t - s$ blocchi di Jordan di ordine j. Procedendo in modo analogo con gli autovettori generalizzati di ordine più piccolo si arriva a concludere che la restrizione di ϕ al sottospazio $\ker(\phi - a)^c$ degli autovettori generalizzati relativi all'autovalore a ha una matrice fatta di blocchi di Jordan di ordine minore o uguale a c, (ed uno almeno di ordine esattamente c) ove c è il massimo periodo di un autovettore generalizzato, ovvero l'esponente con cui il fattore $(x - a)$ compare nel polinomio minimo di ϕ.

Raccogliamo quindi le osservazioni nel seguente

2.10 Teorema. [Camille Jordan] *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{C}$, $\phi : V \to V$ un endomorfismo il cui polinomio caratteristico sia $p_\phi(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r}$ con $a_1, \ldots, a_r$ a due a due distinti. Allora esiste una base di V su $\mathbb{C}$, rispetto alla quale la matrice di ϕ assume la forma*

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_r \end{pmatrix}$$

ove J_k è una matrice di ordine m_k del tipo

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_s \end{pmatrix}$$

ove $B_1, \dots, B_s$ sono opportuni blocchi di Jordan relativi all'autovalore a_k.

Diamo qualche esempio di calcoli espliciti per determinare gli invarianti associati ad un endomorfismo descritti in questa sezione. Si osservi che, pur non considerando spazi vettoriali complessi, ma definiti sul corpo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, tutta la teoria svolta funziona anche in questo ambito, perchè tutti gli autovalori degli endomorfismi considerati sono numeri razionali.

Esercizio 2.3. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una base $\{v_1, \dots, v_5\}$ di $\mathbb{Q}^5$ rispetto a cui ϕ abbia matrice J.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = -\det(A - x\mathbf{1}_5) = (x-3)^5$ e si ha

$$A - 3\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A - 3\mathbf{1}_5)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ed $(A - 3\mathbf{1}_5)^3 = \mathbf{0}$. Il polinomio minimo è quindi $(x-3)^3$ e, considerando il rango delle potenze di $A - 3\mathbf{1}_5$, si conclude che

$$\dim \ker(\phi - 3) = 2, \qquad \dim \ker(\phi - 3)^2 = 4, \qquad \dim \ker(\phi - 3)^3 = 5.$$

Dunque la matrice di Jordan di ϕ ha un blocco di ordine 3 ed un blocco di ordine 2, dato che si ha $\dim \ker(\phi - 3)^3 - \dim \ker(\phi - 3)^2 = 1$ e $\dim \ker(\phi - 3)^2 - \dim \ker(\phi - 3) = 2$. La matrice di Jordan di ϕ è quindi

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

ed ora determiniamo una base rispetto a cui ϕ abbia questa matrice. Preso il vettore $e_2 \notin \ker(\phi - 3)^2$, i vettori

$$v_3 = e_2, \qquad v_2 = (\phi - 3)(e_2) = 2e_4, \qquad v_1 = (\phi - 3)^2(e_2) = -2e_4 + 2e_5,$$

sono linearmente indipendenti e formano "la base del blocco di ordine 3". Inoltre, il vettore $e_1 \in \ker(\phi - 3)^2$ e

$$\ker(\phi - 3)^2 = \langle e_1 \rangle \oplus \langle (\phi - 3)(e_2) \rangle \oplus \ker(\phi - 3) = \langle e_1, e_4 \rangle \oplus \ker(\phi - 3).$$

Quindi, posto

$$v_5 = e_1, \qquad v_4 = (\phi - 3)(e_1) = -2e_1 - 2e_2 + 2e_3,$$

si ottiene la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$, rispetto a cui ϕ ha matrice J. Infatti, considerata la matrice di cambiamento di base

$$P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $AP = PJ$, ovvero $J = P^{-1}AP$. □

Esercizio 2.4. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}_4) = (x-2)^2(x-3)^2$ e si ha

$$A - 2\mathbf{1}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (A - 2\mathbf{1}_4)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad A - 3\mathbf{1}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che $\mathrm{rk}(A - 2\mathbf{1}_4) = 3$, $\mathrm{rk}(A - 2\mathbf{1}_4)^2 = 2$ e $\mathrm{rk}(A - 3\mathbf{1}_4) = 3$. Dunque

$$\mathbb{Q}^4 = \ker(\phi - 3)^2 \oplus \ker(\phi - 2)^2$$

ed, in entrambo i casi, 2 è il massimo periodo per un autovettore generalizzato. Quindi il polinomio minimo deve coincidere con il polinomio caratteristico ed una matrice di Jordan per ϕ è

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il vettore $v_4 = 2e_1 + e_2 - e_3$ appartiene a $\ker(\phi-2)^2$, ma non a $\ker(\phi-2)$, quindi possiamo porre $v_3 = (\phi-2)(v_4) = -e_2 - e_4$. Inoltre, essendo $(\phi-2)^2 \circ (\phi-3)^2 = 0$, (Teorema di Hamilton-Cayley) si ha $\ker(\phi-3)^2 = \mathrm{im}(\phi-2)^2$, e quindi si verifica facilmente che il vettore $v_2 = -e_1 + e_3$ appartiene a $\ker(\phi-3)^2$, ma non a $\ker(\phi-3)$; perciò possiamo porre $v_1 = (\phi-3)(v_2) = 3e_2 + 2e_4$ ed ottenere così una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ di $\mathbb{Q}^4$ rispetto a cui l'endomorfismo ϕ ha matrice J. Considerata la matrice

$$P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $AP = PJ$, ovvero $P^{-1}AP = J$. □

Prima di proporre al lettore una serie di esercizi su cui verificare la comprensione di quanto esposto, riprendiamo il discorso che concludeva la sezione precedente.

2.11 Esempio. Abbiamo visto che polinomio caratteristico e polinomio minimo sono invarianti associati ad un endomorfismo ϕ che dipendono solo dall'endomorfismo e non dalla matrice scelta per calcolarli. In particolare, ciò significa che, se due matrici hanno polinomi caratteristici o polinomi minimi distinti, allora non possono essere simili. Non è vero però che due matrici per cui coincidano polinomio caratteristico e polinomio minimo debbano per questo essere simili. Si vedano ad esempio le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

che hanno entrambe $(X-2)^4$ come polinomio caratteristico ed $(X-2)^2$ come polinomio minimo, ma non sono simili, perchè $\ker(A-2)$ ha dimensione 3, mentre $\ker(B-2)$ ha dimensione 2.

Esercizio 2.5. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una base $\{v_1, \ldots, v_4\}$ di $\mathbb{C}^4$ rispetto a cui ϕ abbia matrice J. □

Esercizio 2.6. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$, avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 3 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ -3 & 6 & -3 & -3 & 5 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una base $\{v_1, \ldots, v_5\}$ di $\mathbb{Q}^5$ rispetto a cui ϕ abbia matrice J. □

Esercizio 2.7. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$, avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una base $\{v_1, \ldots, v_5\}$ di $\mathbb{Q}^5$ rispetto a cui ϕ abbia matrice J. □

Esercizio 2.8. Sia $P \in M_2(\mathbb{R})$ una matrice con tutte le entrate positive.

(a) Si mostri che P ha due autovalori reali distinti.

(b) Sia λ_1 l'autovalore maggiore di P e si indichi con $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ un autovettore (non-nullo) ad esso relativo. Si mostri che $x_1 x_2 > 0$.

(c) Sia λ_2 l'autovalore minore di P e si indichi con $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ un autovettore (non-nullo) ad esso relativo. Si mostri che $y_1 y_2 < 0$. □

Esercizio 2.9. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$, avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$. □

Esercizio 2.10. Sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}$ la matrice (a blocchi) di una rotazione di angolo ϑ attorno ad un asse r dello spazio euclideo tridimensionale E^3.

(a) Si determinino gli autovalori di A (in $\mathbb{C}$).
(b) Si dimostri che $\cos\vartheta = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}A - 1)$. □

Esercizio 2.11. Sia A una matrice reale antisimmetrica (${}^tA = -A$).
(a) Si mostri che gli autovalori di A sono immaginari puri.
(b) Si mostri che $\mathbf{1} + A$ è una matrice invertibile.
(c) Si mostri che $P = (\mathbf{1} - A)(\mathbf{1} + A)^{-1}$ è una matrice ortogonale. □

Esercizio 2.12. Sia V uno spazio vettoriale sul corpo C e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una sua base. Si consideri l'endomorfismo $\phi : V \to V$ definito dalle condizioni

$$\begin{cases} \phi(v_i) = v_{i+1} & \text{se } 1 \le i < n \\ \phi(v_n) = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \end{cases}.$$

Si determinino, la matrice di ϕ ed il suo polinomio caratteristico. È vero o falso che il polinomio minimo ed il polinomio caratteristico di ϕ coincidono? □

Esercizio 2.13. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$. □

Esercizio 2.14. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 10 sul corpo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Si determinino il polinomio caratteristico, il polinomio minimo e la matrice di Jordan di tutti gli endomorfismi ϕ di V soddisfacenti alle condizioni:

$$\dim\ker(\phi - 5) = 2 < \dim\ker(\phi - 5)^2 < \dim\ker(\phi - 5)^3 = 4,$$
$$\dim\ker(\phi + 2) = 2 < \dim\ker(\phi + 2)^4 = 4, \qquad \dim\mathrm{im}\,\phi = 8.$$

□

Esercizio 2.15. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 9 & -5 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$. □

Esercizio 2.16. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$. □

Esercizio 2.17. Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, si indichi con $\mathscr{C}_A$ il sottospazio vettoriale

$$\mathscr{C}_A = \{\, X \in M_n(\mathbb{C}) \mid XA = AX \,\}.$$

(a) Si mostri che $\dim \mathscr{C}_A = \dim \mathscr{C}_B$ quando A e B sono simili.
(b) Si mostri che $\mathscr{C}_A = \left\langle \mathbf{1}, A, \dots, A^{n-1} \right\rangle$ quando il polinomio caratteristico di A è prodotto di n fattori lineari distinti. □

Esercizio 2.18. Sia $\Delta \in M_n(\mathbb{C})$, una matrice diagonale. Si mostri che ogni matrice diagonale si scrive come combinazione lineare di $\mathbf{1}, \Delta, \dots, \Delta^{n-1}$ se, e solo se, gli autovalori di Δ sono a due a due distinti. □

Esercizio 2.19. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul corpo $\mathbb{Q}$ e si consideri un endomorfismo $\phi : V \to V$, di polinomio minimo $(x-2)^2(x+3)$. Si determinino Il polinomio caratteristico, il polinomo minimo e la matrice di Jordan dell'endomorfismo $L_\phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V)$, definito ponendo $L_\phi(\psi) := \phi \circ \psi$. □

Esercizio 2.20. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$. □

2.12 Remark. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n (su $\mathbb{C}$) e $\phi : V \to V$ un endomorfismo per cui il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo coincidono. Vogliamo mostrare che, in tal caso esiste un vettore v tale che $v, \phi(v), \dots, \phi^{n-1}(v)$ sia una base di V. In particolare, ciò significa che, se $p_\phi(X) = \lambda_\phi(X) = X^n - a_1X^{n-1} - \cdots - a_n$, rispetto alla base $\{v, \phi(v), \dots, \phi^{n-1}(v)\}$, la matrice di ϕ è uguale a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 \end{pmatrix} \qquad [\textit{matrice compagna del polinomio } X^n - a_1X^{n-1} - \cdots - a_n]. \tag{2.13}$$

Questa asserzione è vera su qualunque corpo C, anche non-algebricamente chiuso ed è questo il motivo per cui abbiamo messo tra parentesi la condizione che lo spazio V sia definito su $\mathbb{C}$. La dimostrazione, nel caso generale, richiederebbe qualche conoscenza sulla struttura dell'anello dei polinomi (a coefficienti in un corpo C) che non abbiamo introdotto e perciò, ci limitiamo però a dare una traccia della dimostrazione nell'ipotesi che il corpo di base sia il corpo complesso (algebricamente chiuso).

Esercizio 2.21. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $\phi : V \to V$ un endomorfismo con $p_\phi(X) = \lambda_\phi(X) = (X-a_1)^{m_1} \cdots (X-a_r)^{m_r}$, ove gli autovalori $a_1, \dots, a_r$ sono a due a due distinti.

Si mostri che, per ogni $j = 1, \dots, r$, esiste un vettore $w_j \in \ker(\phi - a_j)^{m_j}$ di periodo esattamente m_j. Si mostri che il vettore $v = w_1 + \cdots + w_s$ è il vettore cercato, ovvero che $v, \phi(v), \dots, \phi^{n-1}(v)$ è una base di V. □

⋆Esercizio 2.22. Siano V uno spazio vettoriale sul corpo C, $\psi : V \to V$ un endomorfismo nilpotente e q è il minimo intero positivo tale che $\psi^q(v) = 0$ per ogni $v \in V$. Si mostri che esiste una famiglia di sottospazi, $H_1, \dots, H_q$, di V, soddisfacenti alle condizioni seguenti.
(a) $\ker \psi = H_1$ e $\ker \psi^j = H_j \oplus \ker \psi^{j-1}$ per $j = 2, \dots, q$;
(b) $\psi(H_j) \subseteq H_{j-1}$ e la restrizione di ψ ad H_j è iniettiva, per $j = 2, \dots, q$;

(c) $V = H_1 \oplus \cdots \oplus H_q$. □

Esercizio 2.23. Siano V uno spazio vettoriale sul corpo C, $\psi : V \to V$ un endomorfismo nilpotente ed $H_1, \ldots, H_q$ una famiglia di sottospazi di V soddisfacenti alle condizioni dell'esercizio precedente, ove q è il minimo intero tale che $\psi^q(v) = 0$ per ogni $v \in V$.

(a) Fissata una base di $v_1, \ldots, v_s$ di H_q, si verifichi che i vettori

$$v_1, \psi(v_1), \ldots, \psi^{q-1}(v_1), v_2, \psi(v_2), \ldots, \psi^{q-1}(v_s)$$

sono linearmente indipendenti.

(b) Sia j il minimo intero positivo tale che $\psi^j(v_1), \ldots, \psi^j(v_s)$ non siano una base di H_{q-j} e si prendano dei vettori $w_1, \ldots, w_t$ che completino i vettori dati ad una base di H_{q-j}. Si mostri che i vettori

$$w_1, \psi(w_1), \ldots, \psi^{q-j-1}(w_1), w_2, \psi(w_2), \ldots, \psi^{q-j-1}(w_t),$$
$$v_1, \psi(v_1), \ldots, \psi^{q-1}(v_1), v_2, \psi(v_2), \ldots, \psi^{q-1}(v_s)$$

sono linearmente indipendenti.

(c) Si prosegua analogamente a quanto fatto nel punto (*b*) per tutti gli indici minori di j, e si dimostri che con questa tecnica si determina una base di $V = H_1 \oplus \cdots \oplus H_q$ rispetto a cui ψ ha matrice di Jordan. □

Esercizio 2.24. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_5\}$ una sua base. Sia dato inoltre, l'endomorfismo $\psi : V \to V$, avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 & -2 & 2 \\ -5 & 9 & -7 & -5 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base $\mathcal{V}$.

(a) Si mostri che ψ è nilpotente e si determini il minimo intero positivo q tale che $\psi^q = 0$ (il *periodo* di ψ).

(b) Si determini una decomposizione $V = H_1 \oplus \cdots \oplus H_q$ del tipo descritto nell'`Esercizio V.2.22`. □

Esercizio 2.25. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$. □

Esercizio 2.26. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Inoltre siano dati dei sottospazi $W_1, \ldots, W_r$, di dimensione positiva, tali che ϕ induca un endomorfismo su ciascuno di tali spazi e $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$.

Si dimostri, che il polinomio minimo di ϕ è il minimo comune multiplo dei polinomi minimi delle restrizioni $\phi_{|W_i}$ per $i = 1, \ldots, r$. □

Esercizio 2.27. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico, il polinomio minimo e la decomposizione di Jordan $\phi = \delta + \nu$ ove δ è un endomorfismo diagonalizzabile e ν è un endomorfismo nilpotente. Si determinino infine la matrice di Jordan J di ϕ ed una base $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_4\}$ di $\mathbb{Q}^4$ rispetto a cui ϕ abbia matrice J. □

Esercizio 2.28. Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Si mostri che A è nilpotente se, e solo se,

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{tr}(A^n) = 0.$$

(Si ricordi l'applicazione data del determinante di van der Monde nell'*Osservazione III.3.8*) □

Esercizio 2.29. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione N sul corpo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo avente tutti gli autovalori reali e soddisfacente alla condizione $\phi^k = \mathbf{1}_V$ per qualche intero positivo k. Si mostri che ϕ è diagonalizzabile e $\phi^2 = \mathbf{1}_V$. □

Esercizio 2.30. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 15 sul corpo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo tale che

$$\mathrm{rk}(\phi) = 10, \quad \mathrm{rk}(\phi^2) = 7, \quad \mathrm{rk}(\phi^3) = 4, \quad \mathrm{rk}(\phi^4) = 2, \quad \mathrm{rk}(\phi^5) = 0.$$

Si scriva una matrice di Jordan di ϕ. □

Esercizio 2.31. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice che soddisfa alla condizione $A^2 = A$. Si mostri che $\mathrm{tr}\, A = \mathrm{rk}\, A$. □

Esercizio 2.32. Si consideri una matrice di Jordan di ordine n, con $(J - \alpha\mathbf{1})^n = \mathbf{0} \neq (J - \alpha\mathbf{1})^{n-1}$, ovvero

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \alpha & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Si mostri che J è simile alla sua trasposta e si determini una matrice invertibile P tale che $P^{-1}JP = {}^tJ$.

Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$. È vero o falso che A è simile a ${}^tA$? □

Esercizio 2.33. *Sia $n \geq 3$ e si consideri la matrice $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, di ordine n, ove*

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{se } |j - i| = 1 \\ \beta & \text{se } j - i = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Posto $\delta_n = \det A_n$, si scriva la relazione ricorsiva che governa la successione $(\delta_n)_{n \geq 3}$ e si calcolino i valori iniziali necessari per determinare la successione.

Si dica se, per $\alpha = 2$ e $\beta = 4$, la successione $(\delta_n)_{n \geq 3}$ converge in $\mathbb{C}$.

Svolgimento. Si tratta di calcolare il determinante di una matrice di ordine n, del tipo

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha & \beta & \ddots & & \vdots \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \alpha & 0 & \alpha & \beta \\ \vdots & & & \ddots & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Applicando opportunamente (come?) la regola di Laplace alla generica matrice A_n, si ottiene la relazione ricorsiva

$$\delta_n = -\alpha^2 \delta_{n-2} + \alpha^2 \beta \delta_{n-3}$$

e quindi, per n sufficientemente elevato, il valore di δ_n è determinato dai tre valori precedenti e possiamo scrivere la relazione ricorsiva in forma matriciale, ovvero

$$\begin{pmatrix} \delta_n \\ \delta_{n-1} \\ \delta_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^2 & \alpha^2\beta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{n-1} \\ \delta_{n-2} \\ \delta_{n-3} \end{pmatrix}.$$

Dunque la successione $(\delta_n)_{n\geq 3}$ è determinata da questa regola e dal 'vettore iniziale' $\begin{pmatrix} \delta_5 \\ \delta_4 \\ \delta_3 \end{pmatrix}$, le cui componenti sono

$$\delta_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} = \alpha^2\beta, \qquad \delta_4 = \det \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} = \alpha^4, \qquad \delta_5 = \det \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} = -2\alpha^4\beta.$$

Nel caso in cui $\alpha = 2$ e $\beta = 4$, la relazione ricorsiva che governa la successione $(\delta_n)_{n\geq 3}$ è determinata dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 16 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $x^3 + 4x - 16$. Gli autovalori di B sono dunque 2, $1 + i\sqrt{7}$, $1 - i\sqrt{7}$, ed hanno tutti modulo strettamente maggiore di 1. Da ciò si conclude che, qualunque sia il 'vettore iniziale', applicando ad esso ripetutamente la matrice B, il modulo dei vettori così ottenuti cresce indefinitamente e quindi la successione data non può convergere. □

Esercizio 2.34. Al variare di n tra gli interi positivi, si indichi con B_n la matrice quadrata di ordine n del tipo

$$B_n = \begin{pmatrix} 2a & a & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a & 2a & a & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & a & 2a & a & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a & 2a & a & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & a & 2a & a \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a & 2a \end{pmatrix},$$

ove a è una costante reale.

Si scriva in modo esplicito $\delta_n(a) := \det B_n$ quale funzione della variabile a e si dia una condizione necessaria e sufficiente su a affinchè esista finito $\lim_{n\to\infty} \delta_n(a)$. □

Esercizio 2.35. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Siano poi Φ un automorfismo di V, N un endomorfismo di V e λ una costante di modulo minore di 1, legati dalla relazione: $\Phi N = \lambda N \Phi$. Si mostri che, sotto tali ipotesi, N è un endomorfismo nilpotente. □

Esercizio 2.36. Sia $P \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice diagonalizzabile. Si mostri che $\mathbf{1} + P^2$ è invertibile. □

Esercizio 2.37. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 4. Si determinino (a meno di similitudine) le matrici di tutti gli automorfismi di V che coincidono con il proprio inverso. □

Esercizio 2.38. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 9. Si determinino (se esistono) tutti gli endomorfismi ϕ di V soddisfacenti alle condizioni:

$$\dim\ker(\phi-2)^3 = 3, \qquad \dim\ker(\phi-2) = 1, \qquad \dim\ker(\phi-3)^2 = 4,$$
$$\dim\ker(\phi-3) = 2, \qquad \dim\operatorname{im}\phi^2 = 7.$$

□

Esercizio 2.39. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 12 sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Si dica se esistono endomorfismi $\phi : V \to V$ soddisfacenti alle condizioni:

$$\dim \operatorname{im}(\phi-2)^2 = 10, \quad \dim \operatorname{im}(\phi-3)^2 = 9, \quad \dim \operatorname{im}(\phi-3)^3 = 8,$$
$$\dim \operatorname{im}(\phi-1) = 10, \quad \dim \operatorname{im}(\phi-1)^3 = 6.$$

In caso affermativo si determinino tali endomorfismi e se ne calcoli il determinante. □

Esercizio 2.40. Ricordiamo che una matrice quadrata $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ si dice *triangolare superiore* se, e solo se, le entrate poste al di sotto della diagonale principale sono tutte nulle; ovvero se, e solo se, $i > j \ \Rightarrow \ b_{ij} = 0$.

Siano dati uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, ed una sua base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$.

(a) Si mostri che se ϕ e ψ sono due endomorfismi di V tali che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ ed $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\psi)$ siano matrici triangolari superiori, allora anche $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\psi \circ \phi)$ è una matrice triangolare superiore.

(b) Se ϕ è un endomorfismo invertibile, allora $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ è una matrice triangolare superiore se, e solo se, $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi^{-1})$ lo è.

(c) È vero o falso che per ogni endomorfismo ϕ di V esiste una base $\mathcal{V}$ rispetto alla quale ϕ abbia matrice triangolare superiore? □

Esercizio 2.41. Si determini l'insieme delle matrici reali di ordine 3 che siano simultaneamente antisimmetriche e nilpotenti. □

Esercizio 2.42. Si ricorda che una matrice X si dice *idempotente* se $X^2 = X$.

(a) Si mostri che due matrici idempotenti A e B (di ordine n) sono simili se, e solo se, $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$.

(b) È vero o falso che due matrici nilpotenti A e B (di ordine n) sono simili se, e solo se, $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$? □

Esercizio 2.43. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 6 sul corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Si determinino gli endomorfismi di V che hanno polinomio minimo uguale a $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ e rango maggiore o uguale a 4. □

Esercizio 2.44. Siano dati uno spazio vettoriale V, di dimensione n sul corpo C, ed un endomorfismo $\phi : V \to V$. Si consideri l'applicazione

$$\Lambda_\phi : \operatorname{End}_C V \to \operatorname{End}_C V$$
$$\psi \mapsto \phi \circ \psi - \psi \circ \phi$$

(a) Si mostri che Λ_ϕ è un'applicazione lineare.

(b) Si mostri che $\operatorname{rk} \Lambda_\phi \le n^2 - \deg(\lambda_\phi(X))$, ove $\lambda_\phi(X)$ indica il polinomio minimo dell'endomorfismo ϕ e si dia un esempio in cui la disuguaglianza vale in senso stretto.

(c) Si supponga $n = 2$ e $\lambda_\phi(X) = (X-\alpha)^2$. Si mostri che, in tal caso, $\Lambda_\phi^3 = 0 \neq \Lambda_\phi^2$ (cioè Λ_ϕ è nilpotente, di periodo 3). □

Esercizio 2.45. Notazioni come nell'esercizio precedente. Nell'ipotesi che il polinomio caratteristico $p_\phi(X)$ di ϕ sia prodotto di fattori lineari distinti in $C[X]$, si mostri che Λ_ϕ è diagonalizzabile e si determinino gli autovalori di Λ_ϕ (in funzione degli autovalori di ϕ) e le dimensioni dei relativi autospazi. □

Esercizio 2.46. Sia V il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale formato dai polinomi in $\mathbb{C}[X]$, di grado minore di n e si consideri l'endomorfismo $\delta : V \to V$ che ad ogni polinomio $P(X)$ associa il polinomio $X\frac{dP}{dX}$. Si determinino il polinomio caratteristico, il polinomio minimo, la matrice di Jordan J di δ ed una base rispetto a cui δ ha matrice J. □

Esercizio 2.47. Sia V il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale formato dai polinomi in $\mathbb{C}[X]$, di grado minore di n e si consideri l'endomorfismo $D : V \to V$ che ad ogni polinomio $P(X)$ associa la sua derivata $\frac{dP}{dX}$. Si determinino il polinomio caratteristico, il polinomio minimo e la matrice di Jordan J dell'endomorfismo D ed inoltre, si determini una base rispetto a cui D ha matrice J. □

Esercizio 2.48. Sia A una matrice $n \times n$ ad elementi in $\mathbb{C}$ tale che $A^n = \mathbf{1}$. Si dimostri che A è diagonalizzabile. □

Esercizio 2.49. Siano A e B due matrici $n \times n$ ad elementi in $\mathbb{C}$ tali che $AB = BA$ ed $A^n = B^n = \mathbf{1}$. Si dimostri che A e B sono simultaneamente diagonalizzabili (cioè esiste una base di autovettori comuni ad entrambi gli endomorfismi). □

Esercizio 2.50. Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ una sua base. Per ogni $i = 1, \dots, n$, sia $W_i = L(w_1, \dots, w_i)$ e sia $W_0 = \{0\}$.

(a) Sia $\phi : V \to V$ tale che $\phi(w_{j+1}) \in W_j$, per $j = 0, \dots, n-1$ e si determini il polinomio caratteristico di ϕ.
(b) Nelle ipotesi del punto precedente, sapendo che $\operatorname{rk} \phi = 4 < n-2$, si determini l'endomorfismo ϕ di modo che il polinomio minimo di un tale ϕ abbia grado massimo. □

Esercizio 2.51. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Inoltre siano dati dei sottospazi $W_1, \dots, W_r$, di dimensione positiva, tali che ϕ induca un endomorfismo su ciascuno di tali spazi e $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$.

Si dica quali tra le seguenti asserzioni sono vere e quali sono false, giustificando la propria scelta,
(a) Il polinomio caratteristico di ϕ è il prodotto dei polinomi caratteristici delle restrizioni $\phi_{|W_i}$ per $i = 1, \dots, r$.
(b) Il polinomio minimo di ϕ è il prodotto dei polinomi minimi delle restrizioni $\phi_{|W_i}$ per $i = 1, \dots, r$.
(c) Il polinomio minimo di ϕ è il massimo comun divisore dei polinomi minimi delle restrizioni $\phi_{|W_i}$ per $i = 1, \dots, r$.
(d) Il polinomio minimo di ϕ è il minimo comune multiplo dei polinomi minimi delle restrizioni $\phi_{|W_i}$ per $i = 1, \dots, r$. □

Esercizio 2.52. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{Q}$ e sia $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare, rispetto a cui V è *semplice*, ovvero tale che gli unici sottospazi di V su cui ϕ induca un endomorfismo siano (0) e V.

(a) Si mostri che, preso un vettore non nullo $v \in V$, l'insieme $\{v, \phi(v), \dots, \phi^{n-1}(v)\}$ è una base di V.
(b) Si scrivano la matrice di ϕ rispetto a tale base, il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ. □

Esercizio 2.53. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e sia $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Un sottospazio W di V si dice *ϕ-semplice* (o *semplice*[(**)], sottintendendo ϕ) se $\phi(W) \subseteq W$ e gli unici sottospazi di W su cui ϕ induce un endomorfismo sono (0) e W.

(a) Si mostri che lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con l'endomorfismo ϕ, di matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica, è semplice.
(b) Sia C un campo algebricamente chiuso e siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Si mostri che ogni sottospazio semplice di V ha dimensione 1.
(c) Siano C un campo algebricamente chiuso, V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Si mostri che V è somma diretta di sottospazi semplici (ovvero è *semisemplice*) se, e solo se, ϕ è diagonalizzabile. □

Esercizio 2.54. Al variare di n tra gli interi positivi, si indichi con C_n la matrice quadrata di ordine n del tipo

$$C_n = \begin{pmatrix} b & 2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -b^2 & b & 2 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & -b^2 & b & 2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -b^2 & b & 2 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & -b^2 & b & 2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -b^2 & b \end{pmatrix},$$

ove b è una costante reale.

Si scriva in modo esplicito $\delta_n(b) := \det C_n$ quale funzione della variabile b. □

Esercizio 2.55. Siano V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione n, $h : V \times V \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana definita positiva e si ponga $\|v\| := \sqrt{h(v,v)}$, per ogni $v \in V$.

(**) Le notazioni qui introdotte, vengono dall'ambito della teoria dei moduli su un anello. Infatti, aver fissato un endomorfismo $\phi : V \to V$, determina una struttura di $C[X]$-modulo sul gruppo V (cf. *Algebra Lineare e Geometria* §.2.4 e §.6.6) ed i sottospazi vettoriali W di V che siano ϕ-invarianti (ovvero tali che $\phi(W) \subseteq W$) sono i sottomoduli di V. Un modulo si dice *semplice* se non ha sottomoduli propri. Un modulo che sia somma diretta di sottomoduli semplici si dice *semisemplice*.

Dato un endomorfismo $\phi : V \to V$ i cui autovalori abbiano tutti valore assoluto minore di 1, si mostri che si ha $\lim_{k\to\infty} \phi^k(v) = 0$ per ogni vettore $v \in V$. □

Esercizio 2.56. Si determini la forma di Jordan della matrice simmetrica complessa $A = \begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}$. □

Per chi vuol capire la forma di Jordan e non c'è ancora riuscito. Il 12 aprile del 2000, Valentino Cristante propose questa serie di esercizi ai suoi studenti, sperando di rendere maggiormente comprensibile la determinazione della forma di Jordan di un endomorfismo (nilpotente) e presentandoli con il titolo riportato sopra. Mi permetto di riprodurli qui, lasciando a Cristante il merito della scelta degli argomenti ed assumendomi completamente la responsabilità di aver introdotto eventuali errori nella trascrizione.

Siano C un corpo, $n \geq 1$ un intero e

$$J(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(C)$$

la *matrice di Jordan nilpotente* di ordine n e rango $n-1$ [blocco di Jordan di ordine n].

Come sappiamo, ogni matrice (quadrata) nilpotente è simile ad una matrice di Jordan, cioè ad una matrice del tipo

$$J = J_{(r_1,\dots,r_s))} = \begin{pmatrix} J(r_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(r_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J(r_s) \end{pmatrix}.$$

Più precisamente, se si richiede che sia $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_s$, allora ogni classe di simiglianza di matrici nilpotenti contiene un'unica matrice di tipo J. Dunque, ad ogni matrice nilpotente, $A \in M_n(C)$ (risp. endomorfismo nilpotente ϕ di C^n) restano associati un intero s, $1 \leq s \leq n$, ed una successione non crescente r_i, $i = 1, \dots, s$, di interi ≥ 1, tali che $r_1 + \cdots + r_s = n$; tale successione, che determina la classe di simiglianza di A (risp. la matrice di Jordan di ϕ), sarà detta la *successione di Jordan* di A (risp. di ϕ).

Questo esercizio spiega come, data una matrice nilpotente $A \in M_n(C)$, si possa procedere per calcolare esplicitamente la sua successione di Jordan, e quindi determinare J. Questo procedimento è importante perché è costruttivo e, come sappiamo, la conoscenza di J è il primo passo per trovare una matrice $P \in \mathrm{GL}_n(C)$, tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice di Jordan.

Esercizio 2.57. Nel piano cartesiano si considerino i punti $P_i = (i, y_i)$, ove $i \geq 0$, $y_i = \mathrm{rk}(A^i)$ e si indichi con $\mathcal{P}$ la curva poligonale di lati $l_i = (P_i, P_{i+1})$; $\mathcal{P}$ sarà detto il poligono dei ranghi di A. Evidentemente, $y_0 = n$, l'ordine della matrice A, e y_1 ne è il rango.

(i) Si mostri che $y_0 - y_1 = s$ è il numero di blocchi di Jordan di J; che $y_1 - y_2$ è il numero di blocchi di Jordan di ordine > 1 di J, e, più in generale, che $y_i - y_{i+1}$ è il numero di blocchi di Jordan di ordine $> i$ di J. Si concluda mostrando che il numero di blocchi di Jordan di ordine i è

$$m_i = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}, \qquad \text{per } i = 1, \dots, n;$$

poi si mostri che

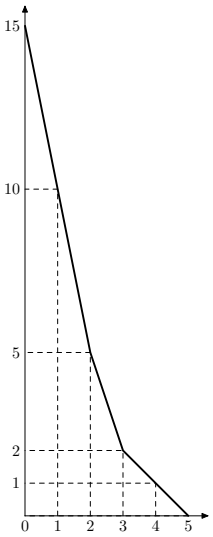
$$y_i = \sum_{j=0}^{n-i-1} (n-i-j)m_{n-j}, \qquad \text{per } i = 0, \dots, n-1.$$

Più in particolare, si mostri che, se r è il grado del polinomio minimo, allora y_{r-1} coincide con il numero di blocchi di ordine r.

(ii) Si indichi con $\mathcal{P}'$ il poligono di vertici $P'_i = (i, z_i)$, ove $z_i = \mathrm{null}(A^i)$, e lati $l'_i = (P_i, P_{i+1})$; $\mathcal{P}'$ sarà detto il *poligono delle nullità* di A; si usi $\mathcal{P}'$ per determinare la successione di Jordan di A.

(iii) Si mostri che due matrici quadrate nilpotenti sono simili se, e solo se, hanno gli stessi poligoni dei ranghi oppure se, e solo se, hanno gli stessi poligoni delle nullità.
(iv) Sia $Y = -p_i X + q_i$ l'equazione della retta che contiene il lato l_i di $\mathcal{P}$; si mostri che $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è una successione non crescente, definitivamente nulla, di interi ≥ 0. Cosa si può dire di A quando due lati consecutivi, l_i, l_{i+1}, appartengono ad una stessa retta? Cosa si può dire di $\mathcal{P}$ quando tutti i blocchi di Jordan hanno lo stesso ordine? Si spieghi come, dall'esame di $\mathcal{P}$, si possano determinare i dati seguenti: a) il grado del polinomio minimo di A; b) la cardinalità dell'insieme degli ordini dei blocchi di Jordan; c) la molteplicità con la quale compaiono blocchi di un certo ordine; d) l'assenza di blocchi di un certo ordine.
(v) Si disegnino tutti i possibili poligoni dei ranghi per le matrici nilpotenti di ordine ≤ 4; si osservi poi che 4 è il minimo intero, n, per cui esistono 2 matrici di ordine n, non simili, con lo stesso polinomio minimo. □

Esercizio 2.58. Si consideri la matrice $J = J_{(5,4,4,3,3,3,1,1)}$ e la si interpreti come la matrice di un endomorfismo $\phi : C^{24} \to C^{24}$, rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_{24}\}$.



(i) Si disegni il poligono dei ranghi, $\mathcal{P}$, di J e si controlli l'esattezza di $\mathcal{P}$ ritrovando la successione dei blocchi con le formule dell'esercizio precedente.
(ii) Si mostri che

$$\ker \phi = \{e_1, e_6, e_{10}, e_{14}, e_{17}, e_{20}, e_{23}, e_{24}\}$$
$$\ker \phi^2 = \{e_1, e_6, e_{10}, e_{11}, e_{14}, e_{15}, e_{17}, e_{18}, e_{20}, e_{21}, e_{23}, e_{24}\}$$

e si calcolino i nuclei delle potenze successive di ϕ.
(iii) Si determini una successione di sottospazi H_i, ove $i = 0, \dots, 5$, di C^{24} con le seguenti proprietà: $H_0 = \langle 0 \rangle$, $H_i \oplus \ker \phi^{i-1} = \ker \phi^i$ e $\phi(H_i) \subseteq H_{i-1}$ per $i = 1, \dots, 5$. Si mostri poi che $H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_5 = C^{24}$.
(iv) Sia ψ un endomorfismo di C^{24} la cui successione di Jordan è $(5, 4, 4, 3, 3, 3, 1, 1)$; si mostri che, preso comunque un vettore $v \in \ker \phi^5 \smallsetminus \ker \phi^4$, i vettori

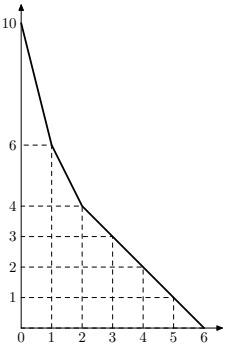
$$v_1 = \psi^4(v), \quad v_2 = \psi^3(v), \quad v_3 = \psi^2(v), \quad v_4 = \psi(v), \quad v_5 = v,$$

sono i primi 5 elementi di una base di Jordan per ψ.
(v) Si mostri che, presi due vettori, $w, z \in \ker \phi^4 \smallsetminus \ker \phi^3$, tali che $\ker \phi^4 = \langle w, z \rangle \oplus \langle \psi(v) \rangle \oplus \ker \phi^3$, i vettori

$$v_1 = \psi^4(v), \quad v_2 = \psi^3(v), \quad v_3 = \psi^2(v), \quad v_4 = \psi(v), \quad v_5 = v,$$
$$v_6 = \psi^3(w), \quad v_7 = \psi^2(w), \quad v_8 = \psi(w), \quad v_9 = w,$$
$$v_{10} = \psi^3(z), \quad v_{11} = \psi^2(z), \quad v_{12} = \psi(z), \quad v_{13} = z,$$

sono i primi 13 elementi di una base di Jordan per ψ. Si proceda analogamente fino a trovare una base di Jordan per ψ. □

Esercizio 2.59. Determinare la matrice di Jordan degli endomorfismi nilpotente i cui poligoni dei ranghi sono rappresentati qui a fianco. □



Esercizio 2.60. Come si presenta il poligono dei ranghi di un endomorfismo nilpotente, la cui matrice di Jordan è composta dall'unico blocco $J(n)$? Determinare la forma di Jordan delle matrici nilpotenti di ordine 24 il cui poligono dei ranghi è contenuto in un'unica retta. □

Esercizio 2.61. Siano $P_i = (i, y_i)$, per $i \geq 0$, i vertici del poligono dei ranghi di una matrice nilpotente, A, di ordine $n = y_0$. È vero che esiste una matrice nilpotente, B, di ordine y_1, che abbia come vertici del poligono dei ranghi i punti $Q_i = (i, y_{i+1})$, per $i \geq 0$? □

3. Complementi

In questa sezione daremo qualche approfondimento ulteriore e qualche applicazione degli argomenti sviluppati in questo capitolo.

Endomorfismi Autoaggiunti. Teorema Spettrale. Sia V uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbb{C}$, dotato di una forma hermitiana definita positiva $h : V \times V \to \mathbb{C}$, (oppure uno spazio vettoriale su un corpo qualunque C, dotato di un'applicazione bilineare simmetrica, non degenere, $g : V \times V \to C$). Nei capitoli precedenti abbiamo definito l'aggiunto di un omomorfismo di spazi vettoriali (cf. `Esercizio IV.4.1`), in questa sezione vogliamo mostrare le proprietà degli endomorfismi *autoaggiunti* ovvero degli endomorfismi che coincidono con il proprio aggiunto (ovvero, nel caso di uno spazio vettoriale su un corpo qualunque C, dotato di un'applicazione bilineare simmetrica, non degenere, $g : V \times V \to C$, quelli che coincidono con il proprio trasposto). Ciò significa precisamente che, per ogni coppia di vettori, $v, w \in V$, si ha $h(\phi(v), w) = h(v, \phi(w))$ (ovvero $g(\phi(v), w) = g(v, \phi(w))$).

Esercizio 3.1. Sia V uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbb{C}$, dotato di una forma hermitiana definita positiva $h : V \times V \to \mathbb{C}$, e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di tale spazio. Si mostri che un endomorfismo $\phi : V \to V$ è autoaggiunto se, e solo se, la sua matrice $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ è hermitiana, ovvero $\overline{{}^tA} = A$. □

Esercizio 3.2. Sia V uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbb{R}$, dotato di un'applicazione bilineare definita positiva $g : V \times V \to \mathbb{R}$, e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di tale spazio. Si mostri che un endomorfismo $\phi : V \to V$ è autoaggiunto se, e solo se, la sua matrice $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ è simmetrica, ovvero ${}^tA = A$. □

Esercizio 3.3. *Sia V uno spazio vettoriale sul corpo C, dotato di un'applicazione bilineare, simmetrica e non-degenere, $g : V \times V \to C$ e sia $\pi : V \to V$ una proiezione ($\pi^2 = \pi$). Si mostri che π è autoaggiunta se, e solo se, π è una proiezione ortogonale* ($\ker \pi = (\operatorname{im} \pi)^\perp$).

Svolgimento. Supponiamo che π sia autoaggiunta e mostriamo che è una proiezione ortogonale. Infatti, $\ker \pi = \{\, v - \pi(v) \mid v \in V \,\}$ e, presi comunque $v, w \in V$, si ha

$$g(v - \pi(v), \pi(w)) = g(\pi(v) - \pi^2(v), w) = g(0, w) = 0.$$

Viceversa, presi comunque $v, w \in V$, si ha

$$\begin{aligned} g(v, \pi(w)) - g(\pi(v), w) = g(v, \pi(w)) - g(\pi(v), \pi(w)) + g(\pi(v), \pi(w)) - g(\pi(v), w) = \\ = g(v - \pi(v), \pi(w)) - g(\pi(v), w - \pi(w)) = 0 \end{aligned}$$

e quindi $\pi^* = \pi$. □

La struttura degli endomorfismi autoaggiunti è particolarmente semplice, perchè questi sono tutti diagonalizzabili. Questo fatto è spesso enunciato col nome di

3.1 Teorema Spettrale. *Sia V uno spazio vettoriale, di dimensione n sul corpo $\mathbb{C}$, dotato di una forma hermitiana definita positiva $h : V \times V \to \mathbb{C}$, e $\phi : V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto. Allora esiste una base ortonormale di autovettori per l'endomorfismo ϕ.*

dim. La dimostrazione si può fare per induzione sulla dimensione, n, di V. Infatti, se $n = 1$, ogni endomorfismo è la moltiplicazione per una costante e quindi ogni vettore è un autovettore. Se la dimensione n è maggiore di 1, sappiamo che esiste almeno un autovettore $v \neq 0$ per ϕ e sia α l'autovalore relativo. Per concludere è sufficiente mostrare che ϕ induce un endomorfismo del sottospazio $\langle v \rangle^\perp$, perchè in tal caso, possiamo applicare a questo sottospazio l'ipotesi induttiva. Infatti, se $w \in \langle v \rangle^\perp$, poiché ϕ è autoaggiunto, si ha $h(v, \phi(w)) = h(\phi(v), w) = \alpha h(v, w) = 0$, e quindi $\phi(w) \in \langle v \rangle^\perp$, che è quanto volevamo. **CVD** □

Il risultato si specializza nel caso di spazi vettoriali reali.

3.2 Corollario. *Sia V uno spazio vettoriale reale, di dimensione n, dotato di un'applicazione bilineare definita positiva $g : V \times V \to \mathbb{R}$, e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto. Allora esiste una base ortonormale di autovettori per l'endomorfismo ϕ.*

dim. Sia fissata una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, di V, sia $V_{\mathbb{C}}$ lo spazio vettoriale complesso generato da $\mathcal{V}$ e consideriamo V immerso in $V_{\mathbb{C}}$, identificando i suoi elementi con i vettori che hanno coordinate reali rispetto alla base $\mathcal{V}$[(†)]. L'applicazione bilineare, g, si estende in modo naturale ad una forma hermitiana $h : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, ponendo $h(v_i, v_j) := g(v_i, v_j)$ per ogni coppia di vettori della base $\mathcal{V}$. Anche ϕ si estende ad un endomorfismo $\phi_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, ponendo $\phi_{\mathbb{C}}(v_j) := \phi(v_j)$, per $j = 1, \dots, n$ e si tratta di un endomorfismo autoaggiunto rispetto ad h; dunque, per il Teorema Spettrale esiste una base ortonormale di autovettori per $V_{\mathbb{C}}$. Vogliamo mostrare che esiste una base ortonormale *reale* di autovettori per $\phi_{\mathbb{C}}$ (e quindi per ϕ). Osserviamo dapprima che gli autovettori di $\phi_{\mathbb{C}}$ sono numeri reali; infatti, se $\phi_{\mathbb{C}}(v) = av$, $(\exists v \neq 0)$ si ha

$$\bar{a}h(v,v) = h(av,v) = h(\phi_{\mathbb{C}}(v),v) = h(v,\phi_{\mathbb{C}}(v)) = h(v,av) = ah(v,v).$$

Essendo $h(v,v) \neq 0$, ciò è possibile se, e solo se, $\bar{a} = a$. Dunque sia W il sottospazio di V generato su $\mathbb{R}$ dagli autovettori reali di $\phi_{\mathbb{C}}$ e sia $W_{\mathbb{C}}$ l'analogo sottospazio di $V_{\mathbb{C}}$. Se $W \neq V$, allora $W_{\mathbb{C}} \neq V_{\mathbb{C}}$ e si verifica facilmente che $\phi_{\mathbb{C}}(W_{\mathbb{C}}^{\perp}) \subseteq W_{\mathbb{C}}^{\perp}$. Infatti, se $x \in W_{\mathbb{C}}^{\perp}$, e v è un autovettore reale di $\phi_{\mathbb{C}}$, corrispondente all'autovalore a, si ha

$$h(\phi_{\mathbb{C}}(x), v) = h(x, \phi_{\mathbb{C}}(v)) = ah(x,v) = 0$$

e dunque $\phi_{\mathbb{C}}$ induce un endomorfismo su $W_{\mathbb{C}}^{\perp}$, il cui polinomio caratteristico divide il polinomio caratteristico di $p_{\phi_{\mathbb{C}}}(X) = p_{\phi}(X)$ e quindi ha tutti gli autovalori reali. Vi sono perciò autovettori reali in $W_{\mathbb{C}}^{\perp}$, contro l'ipotesi che W fosse il massimo sottospazio generato da autovettori reali. La contraddizione nasce dall'aver supposto $W \neq V$ e quindi $W = V$. **CVD** □

I risultati precedenti possono essere riscritti in termini di matrici e lasciamo questo compito al lettore, sotto forma di esercizio.

Esercizio 3.4. Sia A una matrice hermitiana in $M_n(\mathbb{C})$. Allora esiste una matrice unitaria U (cioè ${}^t\overline{U} = U^{-1}$) tale che ${}^t\overline{U}AU$ sia una matrice diagonale. □

Esercizio 3.5. Sia A una matrice simmetrica in $M_n(\mathbb{R})$. Allora esiste una matrice ortogonale P (cioè ${}^tP = P^{-1}$) tale che ${}^tPAP$ sia una matrice diagonale. □

Diamo ora un esempio della rilevanza degli endomorfismi autoaggiunti nell'ambito della Fisica.

Esercizio 3.6. *Sia V uno spazio vettoriale complesso (di dimensione infinita), dotato di una forma hermitiana, definita positiva, $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$. In meccanica quantistica, ad ogni stato di un oggetto fisico si associa un vettore $v \in V$ con $\|v\| = 1$ e ad ogni grandezza misurabile, A, un endomorfismo autoaggiunto $\phi_A : V \to V$. Il valore teorico atteso della grandezza A nello stato v è dato dalla grandezza $\langle v, \phi_A(v) \rangle \in \mathbb{R}$. Sia $a \in \mathbb{R}$ il valore misurato della grandezza A. Questo valore può essere diverso dal valore teorico ed il valor medio dell'errore quadratico compiuto nella misura è dato dalla grandezza $|\Delta A|^2 = \|(\phi_A - a\mathbf{1})(v)\|^2$.*

(a) Siano A e B due grandezze misurabili e ϕ_A, ϕ_B gli endomorfismi autoaggiunti ad esse associati. Posto $\lambda = i(\phi_A\phi_B - \phi_B\phi_A)$ e $\mu = \phi_A\phi_B + \phi_B\phi_A$ si mostri che λ e μ sono autoaggiunti e che, per ogni v, con $\|v\| = 1$, si ha

$$|\Delta A|^2 |\Delta B|^2 \geq \tfrac{1}{4} |\langle v, \lambda(v) \rangle|^2.$$

(†) Il lettore più attento potrà facilmente verificare che lo spazio $V_{\mathbb{C}}$ e l'immagine di V al suo interno non dipendono dalla scelta della base di V.

(b) Siano A la posizione di una particella e B la sua quantità di moto. Sapendo che $\phi_A\phi_B - \phi_B\phi_A = i\hbar\mathbf{1}_V$ ($\hbar$ è la costante di Planck), si deduca dal punto precedente il principio di indeterminazione di Heisenberg, ovvero

$$|\Delta A||\Delta B| \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Svolgimento. (a). Gli endomorfismi ϕ_A e ϕ_B sono autoaggiunti, ovvero si ha ${}^t\overline{\phi_A} = \phi_A$ e ${}^t\overline{\phi_B} = \phi_B$; quindi è immediato verificare che anche $\lambda = i(\phi_A\phi_B - \phi_B\phi_A)$ e $\mu = \phi_A\phi_B + \phi_B\phi_A$ sono autoaggiunti.

Consideriamo ora gli endomorfismi $\phi'_A = \phi_A - a\mathbf{1}$ e $\phi'_B = \phi_B - b\mathbf{1}$. Per le ipotesi fatte anche ϕ'_A e ϕ'_B sono autoaggiunti e si ha

$$\lambda' = i(\phi'_A\phi'_B - \phi'_B\phi'_A) = i(\phi_A\phi_B - \phi_B\phi_A) = \lambda.$$

Sia v, con $\|v\| = 1$, ed osserviamo che, in base alla disuguaglianza di Schwarz, si ha

$$|\Delta A|^2|\Delta B|^2 = |\phi'_A(v)|^2|\phi'_B(v)|^2 \geq |\langle\phi'_A(v), \phi'_B(v)\rangle|^2 = |\langle v, \phi'_A(\phi'_B(v))\rangle|^2.$$

Ora, considerando gli endomorfismi autoaggiunti λ' e $\mu' = \phi'_A\phi'_B + \phi'_B\phi'_A$, si ha $\phi'_A(\phi'_B(v)) = \frac{1}{2}\mu'(v) - \frac{i}{2}\lambda'(v)$, e quindi,

$$|\langle v, \phi'_A(\phi'_B(v))\rangle|^2 = \left|\tfrac{1}{2}\langle v, \mu(v)\rangle + \tfrac{i}{2}\langle v, \lambda'(v)\rangle\right|^2 \geq \tfrac{1}{4}|\langle v, \lambda(v)\rangle|^2$$

dato che $\lambda' = \lambda$.

(b). Se A e B sono rispettivamente la posizione la quantità di moto di una particella, si può applicare la disuguaglianza precedente, tenendo conto della relazione fondamentale $\phi_A\phi_B - \phi_B\phi_A = i\hbar\mathbf{1}_V$, ed ottenere così

$$|\Delta A|^2|\Delta B|^2 \geq \frac{1}{4}|\langle v, \lambda(v)\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{4}|\langle v, v\rangle|^2$$

che permette di concludere, dato che $\|v\| = 1$. □

Esercizio 3.7. Sia A una matrice quadrata, di ordine n, ad elementi nel corpo C.

(i) Sia $C = \mathbb{R}$. Si mostri che una matrice simmetrica A è nilpotente se, e solo se, $\mathrm{tr}(A^2) = 0$.
(ii) Sia $C = \mathbb{C}$. Si dia l'esempio di una matrice simmetrica B, non nilpotente, e tale che $\mathrm{tr}(B^2) = 0$.
(iii) Sia $C = \mathbb{C}$. Si mostri che A è nilpotente se, e solo se, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{tr}(A^n) = 0$. □

Esercizio 3.8. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice antisimmetrica (${}^tA = -A$). Si mostri che esiste una matrice (unitaria) $U \in M_n(\mathbb{C})$, tale che ${}^t\bar{U}U = \mathbf{1}$ e $U^{-1}AU$ sia una matrice diagonale e che tutti gli autovalori di A sono numeri immaginari. □

Esercizio 3.9. Sia $P \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice ortogonale (${}^tPP = \mathbf{1}$). Si mostri che esiste una matrice (unitaria) $U \in M_n(\mathbb{C})$, tale che ${}^t\bar{U}U = \mathbf{1}$ e $U^{-1}PU$ sia una matrice diagonale. □

⋆Esercizio 3.10. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{C}^n$ con la forma hermitiana definita positiva standard $\langle v, w\rangle = {}^t\overline{w}v$ (cioè la forma hermitiana che rende la base canonica una base ortonormale) e sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matrice hermitiana (${}^t\overline{A} = A$).

(a) Si mostri che per ogni vettore $v \in V$, si ha $\langle Av, v\rangle \in \mathbb{R}$ e che, indicati con α e β, rispettivamente, il minimo ed il massimo degli autovalori di A, si ha $\alpha \leq \dfrac{\langle Av, v\rangle}{\langle v, v\rangle} \leq \beta$ per ogni $v \in V$.

(b) Fissati comunque un sottospazio $W \subset V$ ed una sua base ortonormale $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_r\}$, si consideri il numero reale

$$R_A(W) = \sum_{i=1}^{r}\langle Aw_i, w_i\rangle \qquad [\textit{traccia di Rayleigh}].$$

Si mostri che la traccia di Rayleigh dipende solo dal sottospazio W e non dalla scelta di una sua base ortonormale. □

⋆Esercizio 3.11. Sia $\mathscr{H}$ uno spazio vettoriale complesso di dimensione 2, dotato di una forma hermitiana $h : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}$, definita positiva, e sia E lo spazio vettoriale reale formato dagli endomorfismi $\phi : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$

autoaggiunti relativamente ad h (ovvero $h(\phi(v), w) = h(v, \phi(w))$, per ogni coppia di vettori v, w in $\mathscr{H}$) ed aventi traccia $\mathrm{tr}\phi = 0$.

(a) Fissata una base ortonormale di $\mathscr{H}$, si rappresentino gli elementi di E come matrici e si calcoli $\dim_{\mathbb{R}} E$ e si verifichi che l'applicazione $\phi \mapsto \det \phi$ è una forma quadratica, definita negativa su E.
(b) Si mostri che ogni elemento ϕ di E è diagonalizzabile e che i suoi autovalori sono due numeri reali opposti tra loro. Se ne deduca che, in corrispondenza a $\phi \neq 0$, resta determinata una decomposizione $\mathscr{H} = \mathscr{H}_+ \oplus \mathscr{H}_-$ ove i due sottospazi sono ortogonali tra loro ed $\mathscr{H}_+$ (risp. $\mathscr{H}_-$) è costituito dagli autovettori relativi all'autovalore positivo (risp. negativo).
(c) Si mostri che ogni decomposizione $\mathscr{H} = \mathscr{H}_+ \oplus \mathscr{H}_-$ con i due sottospazi ortogonali tra loro, determina un elemento ϕ di E, a meno di moltiplicazione per un numero reale positivo (cioè determina una *semiretta* di E)[(†)]. □

Esercizio 3.12. Siano A e B due matrici simmetriche, reali, di ordine n.
(a) Si mostri che se A è definita positiva, allora esiste una matrice invertibile P tale che ${}^tPAP$ e ${}^tPBP$ siano entrambe matrici diagonali.
(b) Si mostri che esiste una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ e $P^{-1}BP$ siano entrambe matrici diagonali se, e solo se, $AB = BA$. □

Esercizio 3.13. Sia T una matrice simmetrica reale definita positiva. È vero o falso che T^{-1} è simmetrica e definita positiva? □

Esercizio 3.14. Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale complesso, V, di dimensione finita e dotato di una forma hermitiana definita positiva.
(a) Si mostri che esiste una base ortonormale $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V tale che la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ sia triangolare superiore, ovvero $\phi(v_i) \in \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$, per ogni $i = 1, \ldots, n$ [*Teorema di Schur*].

[**sugg.** Si consideri un autovalore a_0 per ϕ ed il relativo sottospazio di autovettori W_1. Si ha $V = W_1 \oplus W_1^\perp$ con $\dim W_1^\perp < \dim V$ e si consideri ora l'endomorfismo $\phi_1 : W_1^\perp \to W_1^\perp$, definito da $\phi_1(x) = \pi_{W_1^\perp}(\phi(x))$, ove $\pi_{W_1^\perp}$ è la proiezione ortogonale su $W_1^\perp$...]
(b) Si mostri che esiste una base ortonormale di autovettori generalizzati quando ϕ è nilpotente. □

Esercizio 3.15. Si interpreti l'esercizio precedente in termini di matrici e si dimostri che, data una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ esistono una matrice unitaria, U, ed una matrice triangolare superiore, T, tali che $A = UTU^*$, ove $U^* = {}^t\bar{U}$. (*Decomposizione di Schur*) □

Esercizio 3.16. Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ si dice *normale* se $AA^* = A^*A$.
(a) Si verifichi che le matrici hermitiane, le matrici antihermitiane e le matrici unitarie sono tutte matrici normali.
(b) Si verifichi che una matrice triangolare superiore e normale è necessariamente diagonale.
(c) Si usino le osservazioni precedenti e la decomposizione di Schur per dimostrare che per ogni matrice normale, A, esistono una matrice unitaria, U, ed una matrice diagonale, Δ, tali che $A = U\Delta U^*$, ove $U^* = {}^t\bar{U}$. [*Teorema Spettrale per matrici normali*]. □

Esercizio 3.17. Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo normale di uno spazio vettoriale complesso, V, di dimensione finita e dotato di una forma hermitiana definita positiva ($\phi^* \circ \phi = \phi \circ \phi^*$, ove $\phi^* : V \to V$ è l'aggiunta di ϕ).
(a) Si mostri che $v \in \ker \phi$ se, e solo se, $v \in \ker \phi^*$.
(b) Si mostri che se a è un autovalore per ϕ, allora $\bar{a}$ è un autovalore per ϕ^* e gli spazi di autovettori coincidono.
(c) Si concluda dimostrando che esiste una base ortonormale di autovettori per ϕ. [*Teorema Spettrale per operatori normali*]
(d) Si mostri che autovettori relativi ad autovalori distinti di ϕ sono ortogonali. □

Esercizio 3.18. Si adattino i ragionamenti dell'esercizio precedente al caso di un endomorfismo normale, $\phi : V \to V$, di uno spazio vettoriale reale, V, di dimensione finita e dotato di un'applicazione bilineare definita positiva, con l'ulteriore ipotesi che tutti gli autovalori di ϕ siano reali. □

[(†)] Questo esercizio ha un'interessante interpretazione "fisica". Si identifichi E con l'usuale spazio fisico ed $\mathscr{H}$ con lo spazio degli stati interni di un sistema quantistico (ad esempio, un elettrone) localizzato nell'origine. Scegliere una semiretta di E, significa porre nello spazio fisico un campo magnetico lungo questa direzione. In questo campo, il sistema avrà due stati stazionari che corrispondono precisamente ai sottospazi $\mathscr{H}_+$ ed $\mathscr{H}_-$ e sono detti "lo stato a proiezione di spin positiva" (risp. "negativa") sull'asse corrispondente alla semiretta E. Si tratta quindi di un'idealizzazione del famoso esperimento di Stern e Gerlach (1922), che valse loro il premio Nobel per la Fisica.

3.3 Un'ulteriore applicazione alla Fisica. Momento d'inerzia. Diamo un ulteriore cenno di come questi concetti e queste tecniche vengano utilizzati nella modellizzazione di fenomeni fisici, rimandando ai corsi di Fisica per una trattazione puntuale e completa. Il momento d'inerzia di un oggetto fisico attorno ad un dato asse indica la difficoltà di cambiare il moto angolare attorno al dato asse. Dato un sistema rigido di N particelle, di masse $m_1, \dots, m_N$, un modo di rappresentare questa grandezza consiste nel considerare un sistema di riferimento ortonormale, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, in $\mathbb{R}^3$ e scrivere la *matrice* (o "tensore") d'inerzia. Si tratta della matrice simmetrica

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix},$$

ove

$$I_{xx} = \sum_{k=1}^{N} m_k(y_k^2 + z_k^2), \qquad I_{yy} = \sum_{k=1}^{N} m_k(x_k^2 + z_k^2), \qquad I_{zz} = \sum_{k=1}^{N} m_k(x_k^2 + y_k^2),$$
$$I_{xy} = I_{yx} = -\sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k, \qquad I_{xz} = I_{zx} = -\sum_{k=1}^{N} m_k x_k z_k, \qquad I_{yz} = I_{zy} = -\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k,$$

e $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$, $k = 1, \dots, N$, sono le posizioni delle particelle. Dato un asse, rappresentato dal versore v, il momento d'inerzia attorno a quest'asse si misura tramite la forma quadratica di matrice $\mathbf{I}$, ovvero $I = {}^t v \mathbf{I} v$ (o, se si preferisce evidenziare il prodotto scalare, $I = v \cdot (\mathbf{I}v)$). Poiché la matrice $\mathbf{I}$ è simmetrica, il Teorema Spettrale, o meglio, il *Corollario V.3.2*, ci garantisce che esiste un sistema di coordinate ortonormali in $\mathbb{R}^3$ rispetto a cui la forma quadratica si diagonalizza, ovvero esistono una matrice ortogonale, P, ed una matrice diagonale, Δ, tale che ${}^t P \mathbf{I} P = \Delta$, ove le colonne di P sono una base ortonormale di autovettori per $\mathbf{I}$ e gli elementi sulla diagonale di Δ sono i relativi autovalori. Gli autovettori sono chiamati gli *assi principali* del sistema ed i corrispondenti autovalori sono i *momenti principali d'inerzia*.

Si costruisce una analoga matrice di inerzia anche per un corpo rigido continuo, sostituendo opportunamente le sommatorie che definiscono le entrate della matrice con degli opportuni integrali, ma rimandiamo ad un corso di fisica o di meccanica per una trattazione precisa e completa sia di quanto accennato sopra, sia della sua estensione al corpo rigido. Ci limitiamo a segnalare un'applicazione "pratica" di questi concetti: quando fa il "bilanciamento" di uno pneumatico, il meccanico aggiusta la distribuzione delle masse della ruota (aggiungendo se necessario dei piccoli pezzi di metallo) in modo che uno degli assi principali venga a coincidere con l'asse della ruota e si evitino così vibrazioni durante la corsa.

3.4 Valori singolari di una matrice rettangolare. Sia $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare di matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, rispetto alle basi canoniche, e poniamo sui due spazi il prodotto scalare. Siano $K = \ker \phi$, $X = K^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$ ed $Y = \operatorname{im} \phi \subseteq \mathbb{R}^m$. La restrizione $\phi_{|X} : X \to Y$ è un isomorfismo di spazi vettoriali e possiamo considerare su Y, oltre alla restrizione del prodotto scalare di $\mathbb{R}^m$, l'applicazione bilineare $(y, y') \mapsto (\phi_{|X}^{-1}(y)) \cdot (\phi_{|X}^{-1}(y'))$, che è un'applicazione bilineare simmetrica e definita positiva. Per il Teorema Spettrale, o meglio per il *Corollario V.3.2*, esiste una base ortonormale $w_1, \dots, w_r$ di Y, rispetto alla restrizione del prodotto scalare, tale che $(\phi_{|X}^{-1}(w_i)) \cdot (\phi_{|X}^{-1}(w_j)) = \frac{1}{s_i^2}\delta_{ij}$, ove δ_{ij} è il simbolo di Kronecker ed $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_r$ sono numeri reali positivi(*). Dunque i vettori $v_1 = s_1(\phi_{|X}^{-1}(w_1)), \dots, v_r = s_r(\phi_{|X}^{-1}(w_r))$ sono una base ortonormale di X e si ha $\phi(v_i) = s_i w_i$, per $i = 1, \dots, r$. Gli scalari $s_1, \dots, s_r$ sono detti i *valori singolari* della matrice A. Unendo ai vettori $v_1, \dots, v_r$ una base ortonormale, $v_{r+1}, \dots, v_n$, del nucleo K, si ottiene una base ortonormale $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ e quindi una matrice ortogonale $Q = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1)$. Analogamente, i vettori $w_1, \dots, w_r$ si possono completare ad una base ortonormale, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$, di $\mathbb{R}^m$ ed ottenere la matrice ortogonale $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(1)$. Per quanto visto, si ha

$$S = {}^t P A Q = P^{-1} A Q = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{W}}(1)\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi),$$

(*) Utilizzando un approccio un po' più geometrico, possiamo osservare che l'immagine della sfera unitaria in X è l'ellissoide $\mathscr{E} = \left\{ y \in Y \mid (\phi_{|X}^{-1}(y)) \cdot (\phi_{|X}^{-1}(y)) = 1 \right\}$ di $\mathbb{A}(Y)$ e che le costanti $s_1, \dots, s_r$ sono i *semiassi* di questo ellissoide [cf. Cap VII, §.4].

e quindi S è una matrice rettangolare con le entrate uguali a zero ad eccezione delle prime r entrate della diagonale principale, dove si trovano i valori singolari di A.

L'uguaglianza $A = PS{}^tQ$ è detta una *decomposizione in valori singolari* (singular value decomposition) della matrice A (o dell'omomorfismo ϕ). Questa decomposizione trova svariate applicazioni nel Calcolo Numerico (si veda, ad esempio, la voce corrispondente su Wikipedia). Osserviamo che dalla decomposizione in valori singolari, $A = PS{}^tQ$, ricordando le relazioni ${}^tQQ = \mathbf{1}_n$ e ${}^tPP = \mathbf{1}_m$, si deduce che ${}^tAA$ è simile a ${}^tSS$ e che $A{}^tA$ è simile a $S{}^tS$ e quindi i valori singolari coincidono con le radici quadrate degli autovalori non nulli di ${}^tAA$ (o di $A{}^tA$). In particolare, se A è una matrice (quadrata) simmetrica (${}^tA = A$), allora i valori singolari di A coincidono con i valori assoluti degli autovalori di A, ma, per una generica matrice quadrata, c'è differenza tra autovalori e valori singolari. Ad esempio, la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ha decomposizione in valori singolari

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi i suoi valori singolari sono 2 e 0, mentre vi è il solo autovalore 0, con molteplicità 2.

Lasciamo al lettore il compito di descrivere l'analogo risultato di decomposizione in valori singolari nel caso di un omomorfismo $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ ove sui due spazi si è posto il prodotto scalare hermitiano che ha la base canonica come base ortonormale.

Chiudiamo con il calcolo esplicito di una decomposizione in valori singolari della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice $A^tA = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & -5 \\ 10 & -5 & 25 \end{pmatrix}$ ha gli autovalori $30, 5, 0$ a cui corrispondono i sottospazi di autovettori $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Quindi i valori singolari di A sono $\sqrt{30}$ e $\sqrt{5}$, e perciò $S = \begin{pmatrix} \sqrt{30} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, mentre la matrice P ha come colonne una base ortonormale di autovettori per A^tA, ovvero $P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{30} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{6} \\ 5/\sqrt{30} & 0 & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$. Il nucleo di A è il sottospazio $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ed una base ortonormale di questo sottospazio ci dà le ultime due colonne della matrice Q. Per trovare le prime due colonne dobbiamo trovare le controimmagini, appartenenti all'ortogonale del nucleo, delle prime due colonne di P, moltiplicate per i valori singolari; ovvero le soluzioni dei due sistemi lineari

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Si ottiene così $Q = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 2/\sqrt{5} & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 4/5 & 2/5 & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 2/5 & -4/5 & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Lasciamo al lettore la facile verifica che $PS = AQ$.

Esercizio 3.19. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche dei due spazi. Si trovino due matrici ortogonali P e Q ed una matrice S tali che $A = PS{}^tQ$ sia una decomposizione a valori singolari di A. □

⋆Esercizio 3.20. Sull'insieme $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ si ponga la relazione: $A \sim B$ se, e solo se, esistono due matrici unitarie $P \in U_m$ e $Q \in U_n$ tali che $B = PAQ$.

(a) Si verifichi che si tratta di una relazione di equivalenza su $M_{m\times n}(\mathbb{C})$.
(b) Si mostri che ogni matrice A in $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ è equivalente ad una matrice, S, che ha entrate nulle ad eccezione della diagonale principale ove vi sono numeri reali positivi $s_1 \geq \cdots \geq s_r$, $(r = \operatorname{rk} A)$.
(c) Si mostri che non possono esserci due matrici distinte del tipo di S nella stessa classe di equivalenza. □

3.5 Pseudoinversa di una matrice rettangolare. Vogliamo parlare ora di un argomento legato alla decomposizione in valori singolari, descritta sopra. Come nelle ipotesi del punto precedente, sia $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare di matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, rispetto alle basi canoniche, e poniamo sui due spazi il prodotto scalare. Consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ e supponiamo per il momento che si abbia $m > n = \operatorname{rk} A$, ovvero che vi siano più equazioni che incognite e che le colonne di A siano linearmente indipendenti. Se b non appartiene all'immagine di ϕ (ovvero al sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A) sappiamo che il sistema non ha soluzione, ma possiamo cercare una n-upla x che renda minima la norma $\|Ax - b\|$. Se $b \in \operatorname{im}\phi$, le soluzioni del sistema sono esattamente le n-uple x che rendono nulla (e quindi minima) la norma di $Ax - b$, quindi i vettori cercati sono una generalizzazione delle soluzioni del sistema. Il vettore x cercato è quello per cui $\phi(x) = Ax$ è la proiezione ortogonale di b su $\operatorname{im}\phi$ (cf. ad es. *Proposizione I.5.1*), ovvero il vettore x tale che $Ax - b$ sia ortogonale a tutte le colonne di A, ovvero si abbia ${}^tA(Ax - b) = 0$. La matrice ${}^tAA$ è invertibile (è la matrice della restrizione del prodotto scalare al sottospazio generato dalle colonne di A, che sono indipendenti per ipotesi) e quindi la condizione diventa $x = ({}^tAA)^{-1}{}^tAb$ ed il vettore x è univocamente determinato da questa condizione. Scriviamo $A^+ = ({}^tAA)^{-1}{}^tA$ e consideriamo la decomposizione in valori singolari di $A = PS^tQ$. Ricordando le relazioni ${}^tQQ = \mathbf{1}_n$ e ${}^tPP = \mathbf{1}_m$, si ha $A^+ = (Q^tSS^tQ)^{-1}Q^tS^tP = Q({}^tSS)^{-1}{}^tS^tP = Q^tS_{-1}{}^tP$ ove S_{-1} è la matrice $m \times n$ che ha sulla diagonale l'inverso delle entrate non nulle di S e tutte le altre entrate uguali a zero. Se si toglie l'ipotesi che $n = \operatorname{rk} A$ la matrice ${}^tSS$ non è più invertibile, ma ha ancora senso considerare la matrice

$$A^+ = Q^tS_{-1}{}^tP \qquad [\textit{pseudoinversa di Moore-Penrose di } A],$$

ove S_{-1} è la matrice definita sopra ed $A = PS^tQ$ è la decomposizione in valori singolari di A. Da quanto visto nel punto precedente, possiamo ricavare le proprietà caratteristiche della matrice A^+. Infatti, si ha $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^+$ e

$$\begin{aligned} AA^+ &= P(S^tS_{-1})^tP \quad \text{è la matrice della proiezione ortogonale su } \operatorname{im}\phi \\ A^+A &= Q({}^tS_{-1}S)^tQ \quad \text{è la matrice della proiezione ortogonale su } (\ker\phi)^\perp \end{aligned}$$

e queste condizioni sono equivalenti alle condizioni usualmente utilizzate per definire la matrice pseudoinversa, ovvero $A^+AA^+ = A^+$, $AA^+A = A$, e che AA^+ ed A^+A sono matrici simmetriche.

Dunque, anche nel caso generale, se consideriamo il sistema lineare $Ax = b$ e prendiamo il vettore $x = A^+b$, si ha $Ax = AA^+b$, ovvero Ax è la proiezione ortogonale su $\operatorname{im}\phi$ del vettore b e quindi è minima la norma $\|Ax - b\|$. Inoltre, per ogni vettore $b \in \mathbb{R}^m$ si ha $(A^+A)A^+b = A^+b$ e quindi il vettore A^+b appartiene all'ortogonale di $\ker\phi$. Ciò significa che possiamo caratterizzare la pseudoinversa di ϕ come quell'unica applicazione lineare, $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, che si annulla su $(\operatorname{im}\phi)^\perp$ e che manda ogni vettore di $\operatorname{im}\phi$ nella sua unica controimmagine appartenente a $(\ker\phi)^\perp$ (come avevamo osservato nel punto precedente, ϕ induce un isomorfismo tra $(\ker\phi)^\perp$ ed $\operatorname{im}\phi$).

Lasciamo al lettore il compito di descrivere analogamente la pseudoinversa nel caso di un omomorfismo $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ ove sui due spazi si è posto il prodotto scalare hermitiano che ha la base canonica come base ortonormale.

3.6 Esponenziale di una matrice. Nel Corso di Analisi Matematica si è incontrata la funzione esponenziale e^x di una variabile reale e si è visto che il valore di tale funzione può essere espresso come somma di una serie di potenze; ovvero che

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Inoltre, si è visto che questa serie converge uniformemente su ogni sottoinsieme chiuso e limitato del piano complesso, dando origine ad un'estensione della funzione esponenziale ai numeri complessi, dotata ancora della proprietà che $e^{z+w} = e^z e^w$ per ogni coppia di numeri complessi z, w. La serie esponenziale permette di estendere la funzione anche ad altri ambiti (ove la serie mantenga senso) e si definisce così l'esponenziale di una matrice quadrata.

Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice, si chiama *esponenziale* della matrice A la somma della serie

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \mathbf{1}_n + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots .$$

La definizione ha senso e vale la seguente

3.7 Proposizione. *Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice. Allora*
(a) la serie $\exp(A)$ *converge;*
(b) se A, B sono due matrici quadrate tali che $AB = BA$, allora $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$*;*
(c) se $B = P^{-1}AP$, per qualche $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, allora $\exp B = P^{-1}(\exp A)P$.

dim. (a). Sia $\kappa = \max\{\, |a_{ij}| \mid 1 \le i,j \le n \,\}$ ed osserviamo che ogni entrata della matrice A^k è minore o uguale ad $(n\kappa)^k$ (induzione su k). Da ciò si deduce che le entrate di ogni somma parziale della serie $\exp(A)$ sono maggiorate (in valore assoluto) dal numero reale $e^{n\kappa}$ e quindi che tutte le entrate della matrice $\exp(A)$ sono serie assolutamente convergenti; dunque è ben definita la matrice $\exp(A) \in M_n(\mathbb{C})$.
(b). La serie prodotto $\exp(A)\exp(B)$ è una serie della forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k, \qquad \text{ove} \qquad C_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{A^j}{j!}\,\frac{B^{k-j}}{(k-j)!}.$$

Poichè $AB = BA$, le due matrici commutano e quindi, in base alla formula del binomio di Newton, si ha

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{A^j}{j!}\,\frac{B^{k-j}}{(k-j)!} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} = \frac{(A+B)^k}{k!};$$

che è quanto serve per concludere che $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
(c). È immediato osservare che, da

$$B^k = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{k \text{ volte}} = P^{-1}A^kP$$

si deduce che, per ogni somma parziale della serie esponenziale, si ha

$$\sum_{k=0}^{s} \frac{B^k}{k!} = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{s} \frac{A^k}{k!}\right)P$$

e quindi, per la continuità delle operazioni di somma e prodotto (in $\mathbb{C}$ e quindi in $M_n(\mathbb{C})$), si conclude che $\exp B = P^{-1}(\exp A)P$. **CVD** □

Il Teorema di Jordan permette di calcolare agevolmente l'esponenziale di una matrice complessa. Infatti, la forma di Jordan di una matrice è la somma di una matrice diagonale e di una matrice nilpotente che commutano tra loro e quindi il suo esponenziale è il prodotto dell'esponenziale della matrice diagonale e dell'esponenziale della matrice nilpotente. Il primo fattore è una matrice diagonale con l'esponenziale degli autovalori della matrice di partenza, il secondo è una somma finita di potenze della matrice nilpotente, dato che, da un certo indice in poi, tutti gli addendi della serie sono nulli.

Diamo un esempio esplicito di questo calcolo, considerando la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

che ha polinomio caratteristico $(x-4)^4$ e polinomio minimo $(x-4)^3$. Dunque $A = PJP^{-1}$, ove

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4\mathbf{1} + N.$$

In base alla *Proposizione V.3.7*, si ha $\exp A = P(\exp J)P^{-1}$, ove

$$\exp J = e^4\mathbf{1}(\mathbf{1} + N + \frac{1}{2}N^2) = \begin{pmatrix} e^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & e^4 & \frac{e^4}{2} \\ 0 & 0 & e^4 & e^4 \\ 0 & 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.21. Si mostri che $\exp \mathbf{0}_n = \mathbf{1}_n$ e quindi che $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$ per ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$. □

Esercizio 3.22. Sia A una matrice $n \times n$ ad elementi in $\mathbb{C}$. Si mostri che $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$. □

Esercizio 3.23. Si consideri l'applicazione esponenziale $\exp : M_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, definita ponendo $\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ per ogni matrice A.

(a) Si mostri che, data comunque una matrice B, avente due autovalori reali, positivi e distinti, esiste una matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, tale che $\exp A = B$.

(b) Sia $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\pi^2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e si calcoli $\exp A_1$.

(c) Si mostri che, dato comunque un numero reale negativo β, esiste una matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, tale che $\exp A = \left(\begin{smallmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right)$. □

Esercizio 3.24. Si consideri l'applicazione esponenziale $\exp : M_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, definita ponendo $\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ per ogni matrice A.

Si mostri che, dato comunque un numero reale positivo b, esiste una matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, tale che $\exp A = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. □

⋆Esercizio 3.25. Si considerino le cosiddette *matrici di Pauli* in $M_2(\mathbb{C})$, ovvero

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si calcolino $\exp(\frac{1}{2}it\sigma_1)$, $\exp(\frac{1}{2}it\sigma_2)$ ed $\exp(\frac{1}{2}it\sigma_3)$, al variare di t in $\mathbb{R}$ e si verifichi che queste matrici appartengono al gruppo SU_2.

(b) Si verifichi che ogni elemento $\left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) \in SU_2$, con $ab \neq 0$, si può scrivere nella forma

$$\exp(\tfrac{1}{2}i\phi\sigma_3)\, \exp(\tfrac{1}{2}i\vartheta\sigma_1)\, \exp(\tfrac{1}{2}i\psi\sigma_3)$$

per opportuni $\phi, \psi, \vartheta \in \mathbb{R}$. Le costanti ϕ, ψ, ϑ, sono dette gli *angoli di Eulero* in SU_2[(†)]. □

.

[(†)] Si osservi che, posto $I = i\sigma_3$, $J = i\sigma_2$, $K = i\sigma_1$, si hanno i classici generatori del corpo dei quaternioni, $1, I, J, K$. Cosa succede degli angoli di Eulero di SU_2 tramite la rappresentazione ortogonale $SU_2 \to SO_3$, descritta per mezzo dell'azione di SU_2 sui quaternioni puri? (cf. *Appendice. Rappresentazione ortogonale di SU_2 e Quaternioni IV.4.5*)

VI
Cenni allo Spazio Proiettivo

1. Introduzione e definizioni fondamentali

Lo spazio proiettivo, nasce come un "completamento" dello spazio affine che consenta di evitare alcuni dei problemi legati al parallelismo. Per dare un esempio di tali problemi ricordiamo che, a differenza di quanto accade per i sottospazi di uno spazio vettoriale, se $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ sono sottovarietà lineari dello spazio affine, si ha

$$\dim(\mathbb{L} \vee \mathbb{M}) \leq \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} - \dim(\mathbb{L} \cap \mathbb{M})$$

ove vale l'uguaglianza solo quando $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ sono incidenti oppure sghembe. Nello Spazio che andremo a costruire, varrà una formula delle dimensioni con il segno di uguaglianza per ogni coppia di sottovarietà lineari. Vedremo inoltre che lo Spazio proiettivo è dotato di una maggiore "simmetria" rispetto allo spazio affine (cf. `Esercizio VI.1.6`).

Mostriamo, a partire da un calcolo elementare, quali siano le idee-guida nella costruzione dello Spazio Proiettivo e partiamo proprio da due sottovarietà lineari dello spazio affine $\mathbb{A}^3(C)$ e dalla loro intersezione. Siano

$$\mathbb{L} : \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{ed} \quad \mathbb{M} : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2$$

una retta ed un piano, chiaramente paralleli tra loro, perché la matrice completa del sistema lineare che definisce la loro intersezione ha rango 3, mentre la matrice incompleta ha rango 2. Consideriamo allora il sistema che si ottiene *sostituendo alla colonna dei termini noti, il sottospazio generato da tale colonna*; ovvero, si introduca una nuova variabile x_0 e si consideri il sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = x_0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2x_0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2x_0 \end{cases} .$$

Si osservi che ora si tratta di un sistema lineare omogeneo che, quindi, ha sempre soluzione e che la dimensione dello spazio delle soluzioni è uguale ad 1. In particolare, si osservi che tale sottospazio è generato dal vettore $(0, 2, 3, 5)$, che è proprio la direzione comune al piano $\mathbb{M}$ ed alla retta $\mathbb{L}$.

Dobbiamo spiegare "geometricamente" il significato di questo calcolo e, per rendere più trasparenti le notazioni, continuiamo a parlare dello spazio tridimensionale, ma ognuna delle considerazioni che svolgeremo nel seguito resta valida in spazi di dimensione qualsiasi. Le notazioni introdotte per indicare punti e vettori dello spazio affine tridimensionale $\mathbb{A}^3(C)$ ci consentono di identificare i punti dello spazio affine tridimensionale con gli elementi di C^4 che soddisfano all'equazione $x_0 = 1$, mentre i vettori vengono identificati col sottospazio Z di C^4, di equazione $x_0 = 0$. In tale rappresentazione, un punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ appartiene al piano $\mathbb{M} \subset \mathbb{A}^3(C)$, di equazione $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2$ se, e solo se, il sottospazio generato da P in C^4 è contenuto nel sottospazio M di C^4, di equazione omogenea $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2x_0$. Inoltre, l'intersezione tra M ed il sottospazio Z dei vettori di $\mathbb{A}^3(C)$ corrisponde esattamente al sottospazio direttore del piano $\mathbb{M}$. Analoghe osservazioni valgono per la retta $\mathbb{L}$ di $\mathbb{A}^3(C)$ ed il sottospazio L di C^4, di equazioni omogenee $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = x_0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2x_0 \end{cases}$. Dunque, passando dalle equazioni affini delle sottovarietà

lineari di $\mathbb{A}^3(C)$ alle equazioni omogenee dei sottospazi di C^4, diventa artificioso far distinzione tra sottospazi vettoriali di C^4 generati da *punti* della sottovarietà lineare dello spazio affine e sottospazi di C^4 generati da *vettori* del suo spazio direttore. È per questo motivo che le soluzioni del sistema omogeneo $(*)$ corrispondono a ciò che le due sottovarietà affini (tra loro parallele) hanno in comune: i vettori del sottospazio direttore della retta $\mathbb{L}$.

Possiamo quindi riassumere quanto osservato finora dicendo che l'operazione di "omogeneizzare" le equazioni delle sottovarietà dello spazio affine 3-dimensionale corrisponde ad immergere tale spazio affine in uno spazio vettoriale di dimensione $3+1$, e considerare, in luogo dei punti, i sottospazi vettoriali di dimensione 1 entro tale spazio vettoriale. In tale ambito la condizione che un punto appartenga ad una sottovarietà lineare o la condizione che un vettore (dello spazio affine) sia ad essa parallelo, si trasformano entrambe nella condizione che il sottospazio vettoriale generato dal punto (risp. vettore) in C^{3+1} sia contenuto nel sottospazio vettoriale che si determina "omogeneizzando" l'equazione della sottovarietà affine.

Se ora, in luogo dello spazio tridimensionale, si considera lo spazio affine $\mathbb{A}^n(C)$ ed il corrispondente spazio vettoriale C^{n+1}, si generalizzano a qualsiasi dimensione le osservazioni fatte in precedenza ed, in estrema sintesi, possiamo dire che l'insieme formato dai sottospazi vettoriali di C^{n+1} "è" lo spazio proiettivo.

Le virgolette poste nell'affermazione precedente stanno ad indicare che, per poter proseguire, abbiamo bisogno di una definizione precisa che ci permetta di utilizzare senza ambiguità o incertezze quanto abbiamo intuito dall'esempio che ha aperto questo capitolo. Inoltre, la definizione, a differenza dell'esempio studiato, dovrà essere data per uno spazio generale e non solo per lo spazio con le coordinate. Dovremo quindi utilizzare il linguaggio astratto degli spazi vettoriali.

1.1 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C. Si chiama *Spazio Proiettivo* su V, in simboli $\mathbb{P}(V)$, l'insieme dei sottospazi vettoriali di V. Se W è un sottospazio vettoriale di V, indicheremo con σW il corrispondente *elemento* dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ e chiameremo *dimensione* dell'elemento σW il numero intero

$$\dim \sigma W := \dim_C W - 1.$$

In particolare, porremo $\dim \mathbb{P}(V) := \dim \sigma V = \dim_C V - 1$.

Dati due spazi proiettivi $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$, un'*applicazione proiettiva* $\phi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ è un'applicazione (insiemistica) per cui esiste un'applicazione lineare $\phi_0 : V \to V'$ (*applicazione soprastante*) tale che $\phi(\sigma W) = \sigma\phi_0(W)$ per ogni elemento σW di $\mathbb{P}(V)$.

Un'applicazione proiettiva $\phi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ che sia biiettiva è detta una *proiettività* o *isomorfismo proiettivo*. In tal caso, ogni soprastante ϕ_0 è un isomorfismo di spazi vettoriali.

L'elemento $\sigma\langle 0\rangle$ di $\mathbb{P}(V)$, di dimensione -1, si indicherà anche col simbolo $\emptyset$ e sarà detto il *vuoto proiettivo*. Dati due elementi σW e σU dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$, scriveremo $\sigma W \leq \sigma U$ per indicare che $W \subseteq U$. Talvolta, con abuso di linguaggio, quando P è un *punto* (cioè un elemento di dimensione 0) di $\mathbb{P}(V)$, ed H un elemento di $\mathbb{P}(V)$, scriveremo $P \in H$ in luogo di $P \leq H$.

L'insieme di tutti i punti dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ è detto lo *spazio proiettivo punteggiato*; con un abuso di linguaggio, indicheremo con lo stesso simbolo $\mathbb{P}(V)$ sia l'intero spazio proiettivo che lo spazio proiettivo punteggiato, riservandoci di fare una distinzione più sottile solo nel caso in cui possa sorgere ambiguità o confusione da tale identificazione. Analogamente, useremo lo stesso simbolo per indicare una *retta* (risp. un *piano*, un *iperpiano*) di $\mathbb{P}(V)$, ovvero un elemento di dimensione 1 (risp. dimensione 2, dimensione $\dim \mathbb{P}(V) - 1$) di tale spazio e l'insieme dei punti dello spazio proiettivo che sono contenuti in tale retta (risp. piano, iperpiano).

1.2 Esempio. L'esempio naturale di spazio proiettivo è dato dallo *spazio proiettivo standard* $\mathbb{P}^n(C) := \mathbb{P}(C^{n+1})$. Poichè lo spazio vettoriale C^{n+1} è dotato di una base canonica, possiamo attribuire delle coordinate ai punti dello spazio $\mathbb{P}^n(C)$. In modo preciso, ad un punto $P = \sigma\langle v\rangle$ di $\mathbb{P}^n(C)$, attribuiremo le coordinate di un qualunque

generatore del sottospazio $\langle v\rangle$, ovvero, se $v = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è un generatore di $\langle v\rangle$, le *coordinate omogenee* del punto P saranno

$$P = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_0 \\ \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \neq 0), \tag{1.3}$$

da cui si vede che *colonne di coordinate proporzionali rappresentano lo stesso punto*, mentre la colonna $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ non rappresenta alcun punto (talvolta è detta la "coordinata del vuoto proiettivo"). Si osservi che il segno di uguaglianza tra le due colonne della formula (1.3), è da intendersi come uguaglianza di coordinate omogenee di un punto nello spazio proiettivo e non certo come uguaglianza di coordinate in C^{n+1}.

Osserviamo da ultimo che l'applicazione identica $1 : \mathbb{P}^n(C) \to \mathbb{P}^n(C)$ che manda ogni elemento dello spazio proiettivo in se stesso è una proiettività, associata all'applicazione lineare di moltiplicazione per la costante 1 (o per qualsiasi costante diversa da zero).

Come la relazione di inclusione tra sottospazi vettoriali ha il suo corrispettivo nello spazio proiettivo, così le operazioni di determinare l'intersezione, oppure il sottospazio generato, da due (o più) sottospazi vettoriali, ha il suo corrispettivo nello spazio proiettivo e parleremo perciò di *intersezione* e di *elemento generato* da due elementi dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$, ponendo, per ogni coppia di elementi σU, σW di tale spazio

$$\sigma U \vee \sigma W := \sigma(U + W) \qquad \text{e} \qquad \sigma U \cap \sigma W := \sigma(U \cap W). \tag{1.4}$$

Come per i sottospazi di uno spazio vettoriale, le dimensioni degli elementi dello spazio proiettivo coinvolti in queste operazioni sono legati dalla relazione fondamentale (*formula delle dimensioni*)

$$\dim \sigma U + \dim \sigma W = \dim(\sigma U \vee \sigma W) + \dim(\sigma U \cap \sigma W). \tag{1.5}$$

Esercizio 1.1. Con riferimento alla discussione fatta all'inizio si questa sezione, si considerino i punti di $\mathbb{P}^2(C)$ e si osservi che i punti del piano proiettivo standard corrispondono o a punti del piano affine (coordinate omogenee $\begin{pmatrix} 1 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$), oppure a sottospazi direttori di rette del piano affine (coordinate omogenee $\begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$).

Si mostri che nel piano proiettivo due rette distinte si intersecano sempre in un punto. □

Esercizio 1.2. Siano H, K ed L elementi dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$. Si mostri che valgono le seguenti affermazioni

(a) $H \leq K \quad \Leftrightarrow \quad H \vee K = K \quad \Leftrightarrow \quad H \cap K = H$.
(b) $(H \vee K) \cap L \geq (H \cap L) \vee (K \cap L)$.
(c) $(H \cap K) \vee L \leq (H \vee L) \cap (K \vee L)$. □

Esercizio 1.3. Sia $\phi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ un'applicazione proiettiva. Dati comunque due elementi H e K di $\mathbb{P}(V)$, si ha

(a) $H \leq K \quad \Rightarrow \quad \phi(H) \leq \phi(K)$.
(b) $\phi(H \vee K) = \phi(H) \vee \phi(K)$.
(c) $\phi(H \cap K) \leq \phi(H) \cap \phi(K)$ e vale l'uguaglianza se ϕ_0 (e dunque ϕ) è iniettivo. □

Esercizio 1.4. Siano ϕ_0 e ϕ_1 due applicazioni lineari in $\mathrm{Hom}_C(V, V')$. Allora ϕ_0 e ϕ_1 inducono la stessa applicazione proiettiva $\phi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ se, e solo se, esiste una costante $\alpha \in C^\times$ tale che $\phi_0 = \alpha\phi_1$. □

Esercizio 1.5. Sia V uno spazio vettoriale su C e sia $W \subseteq V$ un sottospazio. Si mostri che l'inclusione di W in V induce un'applicazione proiettiva (iniettiva) $j : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V)$. Si parlerà perciò di *sottospazio proiettivo* associato all'elemento $\sigma W \in \mathbb{P}(V)$. □

Esercizio 1.6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$ sul campo C e sia V^* lo spazio duale. Si consideri l'applicazione (insiemistica) $\Delta : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$, definita ponendo $\Delta(\sigma Z) = \sigma(Z^\perp)$ per ogni sottospazio Z di V. Si mostri che valgono le seguenti affermazioni

(a) $H \leq K \quad \Leftrightarrow \quad \Delta(H) \geq \Delta(K)$.
(b) $\Delta(H \vee K) = \Delta(H) \cap \Delta(K)$.
(c) $\Delta(H \cap K) = \Delta(H) \vee \Delta(K)$.
(d) $\dim \Delta(H) = n - \dim H - 1$.
(e) Dall'isomorfismo canonico $V \cong V^{**}$, si deduca che l'analoga applicazione $\Delta^* : \mathbb{P}(V^*) \to \mathbb{P}(V^{**})$, coincide con l'applicazione inversa Δ^{-1} di $\Delta : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$. □

L'applicazione Δ descritta nell'`Esercizio VI.1.6`, permette di identificare gli elementi di $\mathbb{P}(V)$ con gli elementi di $\mathbb{P}(V^*)$ in un modo che rovescia la relazione d'ordine e scambia tra loro le operazioni di intersezione e generazione. Quindi, identificando $\mathbb{P}(V^*)$ con la sua immagine $\Delta^*(\mathbb{P}(V^*)) \subseteq \mathbb{P}(V)$, si deduce che gli iperpiani dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ devono comportarsi come i punti di uno spazio proiettivo (ma scambiando tra loro le operazioni di intersezione e generazione) e, più in generale, ogni asserto che coinvolga generici elementi di uno spazio proiettivo, la relazione d'ordine e le operazioni di intersezione e generazione, ammette un "asserto duale" che inverte la relazione d'ordine e scambia tra loro le operazioni di intersezione e generazione. E la validità di un asserto implica la validità dell'asserto duale. Ciò significa che lo Spazio Proiettivo è dotato di una "simmetria" di struttura che non era presente nello spazio affine; tale simmetria è detta la *Dualità Proiettiva*. A titolo d'esempio scriviamo qui sotto due asserti tra loro duali che, seguendo la consuetudine, scriveremo su due colonne affiancate

In uno spazio proiettivo di dimensione 3, tre punti che non generino una retta generano un piano.	In uno spazio proiettivo di dimensione 3, tre piani che non si intersechino in una retta si intersecano in un punto.

Prima di continuare ad indagare le conseguenze della dualità proiettiva, facciamo ancora qualche osservazione sullo spazio proiettivo standard e sulle coordinate.

1.6 Esempio. Consideriamo lo spazio proiettivo standard $\mathbb{P}^n(C)$ (cf. *Esempio VI.1.2*) ed osserviamo che, per dualità proiettiva (cf. `Esercizio VI.1.6`), i suoi iperpiani corrispondono ai punti dello spazio proiettivo costruito sullo spazio duale(*) di C^{n+1}. Perciò gli iperpiani di $\mathbb{P}^n(C)$ vengono anch'essi ad avere delle coordinate omogenee. Precisamente, ad un iperpiano σH di $\mathbb{P}^n(C)$ si associano le coordinate (rispetto alla base duale della base canonica di C^{n+1}) di un qualsiasi vettore dello spazio duale che generi il sottospazio $H^\perp$.

Dunque, se un iperpiano L di $\mathbb{P}^n(C)$ ha coordinate omogenee $(a_0, \dots, a_n)$, allora un punto $P = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ di $\mathbb{P}^n(C)$ appartiene all'iperpiano L se, e solo se, $\left\langle \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \langle (a_0, \dots, a_n) \rangle^\perp$, ovvero se, e solo se,

$$(a_0, \dots, a_n) \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = a_0 p_0 + \cdots + a_n p_n = 0. \tag{1.7}$$

(*) Osserviamo che, avendo stabilito la convenzione di rappresentare i vettori dello spazio C^N mettendo in colonna le loro coordinate rispetto alla base canonica, ovvero, aver identificato C^N con $M_{N\times 1}(C)$, implica che lo spazio duale $(C^N)^*$ è identificato (canonicamente) con lo spazio $M_{1\times N}(C)$ ove il pairing di dualità è il prodotto delle righe di $(C^N)^*$ per le colonne di C^N e le due basi canoniche sono tra loro duali.

La $n+1$-upla di coordinate omogenee $(a_0,\dots,a_n)$ così definita forma le *coordinate plückeriane* dell'iperpiano L e *un punto* $P=\begin{pmatrix}p_0\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}$ *appartiene allo spazio punteggiato dell'iperpiano* L *se, e solo se, le coordinate omogenee di* P *sono una soluzione dell'equazione lineare omogenea* $a_0x_0+\cdots+a_nx_n=0$.

Esercizio 1.7. Sia $f:\mathbb{P}(V)\to\mathbb{P}(V)$ una proiettività, di soprastante $\phi:V\to V$. Indicata con $\Delta:\mathbb{P}(V)\to\mathbb{P}(V^*)$ l'applicazione insiemistica definita nell'`Esercizio VI.1.6`, si mostri che l'applicazione composta $\Delta\circ f\circ\Delta^{-1}:\mathbb{P}(V^*)\to\mathbb{P}(V^*)$ è un'applicazione proiettiva una cui soprastante è $(\phi^*)^{-1}:V^*\to V^*$. □

Esercizio 1.8. Sia $\phi:\mathbb{P}^n(C)\to\mathbb{P}^n(C)$ una proiettività e sia $A\in M_{n+1}(C)$ la matrice di una sua soprastante rispetto alla base canonica di C^{n+1}. Allora, se $a=(a_0,\dots,a_n)$ sono le coordinate plückeriane dell'iperpiano H, il suo trasformato $\phi_S(H)$ ha coordinate plückeriane aA^{-1}. □

Esercizio 1.9. Sia $f:\mathbb{P}(V)\to\mathbb{P}(V)$ una proiettività, di soprastante $\phi:V\to V$. Dato un punto $P=\sigma\langle v\rangle$, si mostri che $f(P)=P$ se, e solo se, v è autovettore per ϕ (relativo ad un autovalore non nullo). □

2. Sistemi di riferimento

Cominciamo osservando che, analogamente a quanto accade per le sottovarietà lineari dello spazio affine, possiamo parlare di rappresentazione parametrica e di rappresentazione cartesiana per gli elementi dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$. Quando poi introdurremo su tale spazio un sistema di riferimento, tali rappresentazioni si tradurranno in condizioni lineari sulle coordinate.

2.1 Definizione. Sia $H=\sigma W$ un elemento dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ diverso dal vuoto. Chiameremo *rappresentazione parametrica* di H la scelta di un sistema di generatori $\{w_1,\dots,w_r\}$ del sottospazio W. In tal caso, dato un punto $P=\sigma\langle v\rangle$ si ha

$$P\le H \quad\Leftrightarrow\quad v=a_1w_1+\cdots+a_rw_r,$$

per un'opportuna scelta dei parametri omogenei[(*)] $(a_1,\dots,a_r)$.

Chiameremo *rappresentazione cartesiana* di H la scelta di un sistema di generatori $\{w_1^*,\dots,w_s^*\}$ del sottospazio $W^\perp\subset V^*$. In tal caso dato un punto $P=\sigma\langle v\rangle$ si ha

$$P\le H \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} v\circ w_1^*=0\\ \dots\\ v\circ w_s^*=0\end{cases}.$$

2.2 Esempio. Si consideri in $\mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$ l'elemento $r=\sigma\langle 2e_0+e_1+e_3,e_1-e_3\rangle$, ove $\mathcal{E}=\{e_0,\dots,e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{Q}^4$. Un punto P, di coordinate omogenee $\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, appartiene alla retta r se, e solo se,

$$\begin{cases} x_0=2\lambda\\ x_1=\lambda+\mu\\ x_2=0\\ x_3=\lambda-\mu\end{cases}\qquad\text{al variare dei parametri omogenei } (\lambda,\mu)\in\mathbb{Q}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

(*) Parliamo di *parametri omogenei* perchè, come per le coordinate omogenee, deve aversi $(a_1,\dots,a_r)\neq(0,\dots,0)$ onde individuare un punto e, inoltre, r-uple di parametri tra loro proporzionali individuano lo stesso punto di H.

Si verifica facilmente che $\langle 2e_0+e_1+e_3, e_1-e_3\rangle^\perp = \langle e_2^*, e_0^*-e_1^*-e_3^*\rangle$, ove $\mathcal{E}^* = \{e_0^*,\dots,e_3^*\}$ è la base duale della base canonica[(**)]. Quindi un punto P, di coordinate omogenee $\begin{pmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, appartiene alla retta r se, e solo se,

$$\begin{cases} e_2^*\circ(x_0e_0+x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3) = x_2 = 0\\ (e_0^*-e_1^*-e_3^*)\circ(x_0e_0+x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3) = x_0-x_1-x_3 = 0\end{cases}.$$

Abbiamo così trovato una rappresentazione parametrica ed una rappresentazione cartesiana della retta r di $\mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$.

Possiamo dare la definizione di sistema di riferimento in uno spazio proiettivo.

2.3 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$ sul campo C. Un *sistema di riferimento* in $\mathbb{P}(V)$ è il dato di $n+2$ punti $\mathcal{R} = \{P_0,\dots,P_n,U\}$, soggetti alle seguenti condizioni:
(a) i punti $P_0,\dots,P_n$ generano tutto lo spazio, ovvero $P_0\vee\cdots\vee P_n = \sigma V$;
(b) il punto U non è contenuto in nessuno degli iperpiani $p_j = P_0\vee\cdots\vee P_{j-1}\vee P_{j+1}\vee\cdots\vee P_n$, per $j=0,\dots,n$.

I punti $P_0,\dots,P_n$ formano il cosiddetto $(n+1)$-edro fondamentale associato al riferimento $\mathcal{R}$, mentre il punto U è detto il *punto unità* del riferimento.

Possiamo caratterizzare un riferimento nel modo seguente

2.4 Proposizione. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$ sul campo C e sia $\mathbb{P}(V)$ lo spazio proiettivo associato.*
(a) Dare un riferimento $\mathcal{R} = \{P_0,\dots,P_n,U\}$ su $\mathbb{P}(V)$ equivale alla scelta di una base $\mathcal{V} = \{v_0,\dots,v_n\}$ di V, a meno della moltiplicazione di tutti i vettori di base per una stessa costante $\alpha\neq 0$ (La base $\mathcal{V}$ è una base associata al riferimento $\mathcal{R}$.).
(b) Dare un riferimento $\mathcal{R} = \{P_0,\dots,P_n,U\}$ su $\mathbb{P}(V)$ equivale alla scelta di un isomorfismo proiettivo $\phi_{\mathcal{R}}:\mathbb{P}(V)\to\mathbb{P}^n(C)$.

dim. (a). È chiaro che, fissata una base $\mathcal{V} = \{v_0,\dots,v_n\}$ di V e posto $P_j = \sigma\langle v_j\rangle$, per $j=0,\dots,n$, ed $U = \sigma\langle v_0+\cdots+v_n\rangle$, l'insieme $\mathcal{R} = \{P_0,\dots,P_n,U\}$, così definito è un riferimento su $\mathbb{P}(V)$. Inoltre, moltiplicando tutti gli elementi della base $\mathcal{V}$ per una stessa costante non nulla, restano invariati i punti del riferimento $\mathcal{R}$. Viceversa, dato un sistema riferimento $\mathcal{R} = \{P_0,\dots,P_n,U\}$, si possono scegliere i vettori $v_0,\dots,v_n$, tali che $P_j = \sigma\langle v_j\rangle$, per $j=0,\dots,n$, in modo che si abbia $U = \sigma\langle v_0+\cdots+v_n\rangle$, perchè il punto unità non è contenuto in nessuno degli iperpiani $p_j = P_0\vee\cdots\vee P_{j-1}\vee P_{j+1}\vee\cdots\vee P_n$, per $j=0,\dots,n$. Inoltre, essendo $P_0\vee\cdots\vee P_n = \sigma V$, si ha che $\mathcal{V} = \{v_0,\dots,v_n\}$ è una base di V, determinata in tal modo dal riferimento $\mathcal{R}$ a meno della moltiplicazione di tutti i vettori di base per una stessa costante non nulla.

(b). Dato un sistema riferimento $\mathcal{R} = \{P_0,\dots,P_n,U\}$ e fissata una base associata $\mathcal{V} = \{v_0,\dots,v_n\}$, è chiaro che l'isomorfismo di spazi vettoriali che manda ordinatamente i vettori della base $\mathcal{V}$ sui vettori della base canonica di C^{n+1} definisce un isomorfismo proiettivo $\phi_{\mathcal{R}}:\mathbb{P}(V)\to\mathbb{P}^n(C)$. L'isomorfismo proiettivo così definito non cambia se si sceglie un'altra base associata al riferimento. Viceversa, dato un isomorfismo proiettivo $\phi:\mathbb{P}(V)\to\mathbb{P}^n(C)$ ed indicata con $\mathcal{E} = \{e_0,\dots,e_n\}$ la base canonica di C^{n+1}, si ponga

$$P_j = \phi^{-1}(\sigma\langle e_j\rangle),\quad \text{per } j=0,\dots,n,\quad \text{ed } U = \phi^{-1}(\sigma\langle e_0+\cdots+e_n\rangle).$$

È facile verificare che l'insieme $\mathcal{R} = \{P_0,\dots,P_n,U\}$, così definito è un riferimento su $\mathbb{P}(V)$ e che l'isomorfismo proiettivo $\phi_{\mathcal{R}}:\mathbb{P}(V)\to\mathbb{P}^n(C)$ associato al riferimento $\mathcal{R}$ coincide con ϕ. **CVD** □

In base a quanto visto, fissato un riferimento $\mathcal{R}$ sullo spazio proiettivo di dimensione n, $\mathbb{P}(V)$ ad ogni punto (o iperpiano) di $\mathbb{P}(V)$ possiamo associare una $(n+1)$-upla di coordinate omogenee (o plückeriane),

(**) Ovvero la base canonica $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$, dello spazio $M_{1\times4}(\mathbb{Q})$, duale di $\mathbb{Q}^4 = M_{4\times1}(\mathbb{Q})$.

assegnando a $P \in \mathbb{P}(V)$ (all'iperpiano H), le coordinate del punto $\phi_{\mathcal{R}}(P) \in \mathbb{P}^n(C)$ (dell'iperpiano $\phi_{\mathcal{R}}(H)$ di $\mathbb{P}^n(C)$). Data un'applicazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ e fissati i riferimenti $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_n, U\}$ ed $\mathcal{R}' = \{P'_0, \dots, P'_m, U'\}$ su $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$, rispettivamente. Scelta una coppia di basi $\mathcal{V} = \{v_0, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{V}' = \{v'_0, \dots, v'_m\}$, associate ai riferimenti dati, possiamo associare ad f la matrice di una soprastante ϕ, rispetto alle basi date, ovvero la matrice $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(\phi) \in_{m+1\times n+1} M(C)$. La matrice così definita, dipende dall'applicazione proiettiva f e dai riferimenti $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ a meno della moltiplicazione per una costante non nulla. Ogni matrice αA con $\alpha \neq 0$ è detta una *matrice dell'applicazione proiettiva* f, rispetto ai riferimenti $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$.

Esercizio 2.1. Si verifichi che i punti

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano un riferimento in $\mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$. □

Esercizio 2.2. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi proiettivi determinati dalle rette r ed s di equazioni

$$r : x_0 - x_1 = 0, \qquad s : x_1 - x_2 = 0.$$

(a) Si mostri che gli insiemi

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ed} \quad \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

sono riferimenti sulle rette r ed s rispettivamente.

(b) Dato il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ si consideri la proiezione di centro P, ovvero l'applicazione $\pi_P : r \to s$ che al punto $X \leq r$, associa il punto $(P \vee X) \cap s$ di s. Si mostri che tale applicazione è una proiettività e se ne scriva una matrice rispetto ai riferimenti dati. □

Esercizio 2.3. Si mostri che un'applicazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ è una proiettività se, e solo se, f trasforma un riferimento di $\mathbb{P}(V)$ in un riferimento di $\mathbb{P}(V')$. □

Esercizio 2.4. Siano r ed s due rette distinte del piano proiettivo e P un punto esterno ad entrambo le rette. Allora l'applicazione che manda un punto X di r nel punto $\pi_P(X) := (X \vee P) \cap s \leq s$, è una proiettività tra le due rette, detta la *proiezione di centro* P. □

Esercizio 2.5. Siano r ed s due rette distinte del piano proiettivo ed $f : r \to s$ una proiettività. Si dice che f è una *prospettività* se esiste un punto P tale che f coincida con la proiezione di centro P. Si mostri che f è una prospettività se, e solo se, $f(R) = R$, ove $R = r \cap s$. □

Esercizio 2.6. Sia $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ una proiettività non identica e tale che $f^2 = 1_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$.

(a) Si dimostri che f ha esattamente due punti uniti ed è completamente determinata dalla conoscenza di tali punti.

(b) Si determini una matrice di f (rispetto al riferimento standard di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) nell'ipotesi in cui i punti uniti siano $P = \binom{1}{2}$ e $Q = \binom{2}{1}$. □

Esercizio 2.7. Si considerino in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ le rette

$$r : \begin{cases} x_0 + x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_0 - x_2 = 0 \end{cases}$$

e si verifichi che si tratta di tre rette, a due a due sghembe.

(a) Si mostri che, dato un punto P che non sia contenuto in r o in s, esiste un'unica retta ℓ_P, passante per P ed incidente sia r che s.

(b) Si scriva l'equazione del luogo $\mathscr{Q}$ dei punti P di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ per cui passa una retta incidente tutte e tre le rette r, s e t. □

Esercizio 2.8. Si considerino le rette r ed s di $\mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$, di equazioni omogenee

$$r : \begin{cases} x_0 - 2x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_0 - x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s : \begin{cases} x_0 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si verifichi che le due rette sono sghembe.
(b) Si consideri l'applicazione $\pi : \mathbb{P}^3(\mathbb{Q}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$, definita ponendo $\pi(X) = (X \vee r) \cap s$, per ogni elemento X di $\mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$. Si mostri che π è una applicazione proiettiva e si scriva una sua matrice. □

Esercizio 2.9. Si scriva una matrice (rispetto alla base canonica) della proiettività di $\mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$ che lascia fissi il punto $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e tutti i punti del piano $\pi : x_1 + x_3 = 0$ e che trasforma $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 2.10. Nello spazio proiettivo tridimensionale si considerino tre rette r, s e t, di equazioni omogenee

$$r : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_0 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_0 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si verifichi che le tre rette sono a due a due sghembe.
(b) Sia P il punto di r di coordinate omogenee $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si mostri che per il punto P passa una retta u_P, secante sia s che t.
(c) Si mostri che, per qualunque punto R della retta r passa una, ed una sola, retta u_R, secante sia s che t. □

Esercizio 2.11. Si consideri lo spazio $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ ed i punti $P_0 = \sigma\langle e_0\rangle$, $P_1 = \sigma\langle e_1\rangle$, $P_2 = \sigma\langle e_2\rangle$, $U = \sigma\langle e_0 + e_1 + e_2\rangle$, ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_2\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(a) Dati i punti $Q_0 = \sigma\langle e_0\rangle$, $Q_1 = \sigma\langle e_1\rangle$, $Q_2 = \sigma\langle e_0 + e_1\rangle$, $U' = \sigma\langle e_0 + e_1\rangle$, si determinino (se esistono) tutte le applicazioni proiettive $f : \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ tali che $f(P_0) = Q_0$, $f(P_1) = Q_1$, $f(P_2) = Q_2$, $f(U) = U'$.
(b) Si risponda alla domanda del punto precedente con $Q_0 = \sigma\langle e_0\rangle$, $Q_1 = \sigma\langle e_1\rangle$, $Q_2 = \sigma\langle e_1\rangle$, $U' = \sigma\langle e_1\rangle$. □

2.5 Elementi uniti di una proiettività. Abbiamo già osservato che trovare i punti uniti di una proiettività corrisponde a trovare gli autospazi di un'applicazione lineare soprastante. Più in generale, trovare elementi uniti per una proiettività corrisponde a trovare sottospazi stabili per una soprastante; ovvero, data una soprastante $\phi : V \to V$ di una proiettività $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, si ha $f(\sigma W) = \sigma W$ se, e solo se, $\phi(w) \in W$ per ogni $w \in W$.

Non abbiamo nessuna intenzione di affrontare in modo sistematico il problema per una generica proiettività di uno spazio proiettivo di dimensione qualunque, ma solo di dare qualche indicazione utile per lo studio del problema nel caso di proiettività di spazi proiettivi di dimensione 2 o 3.

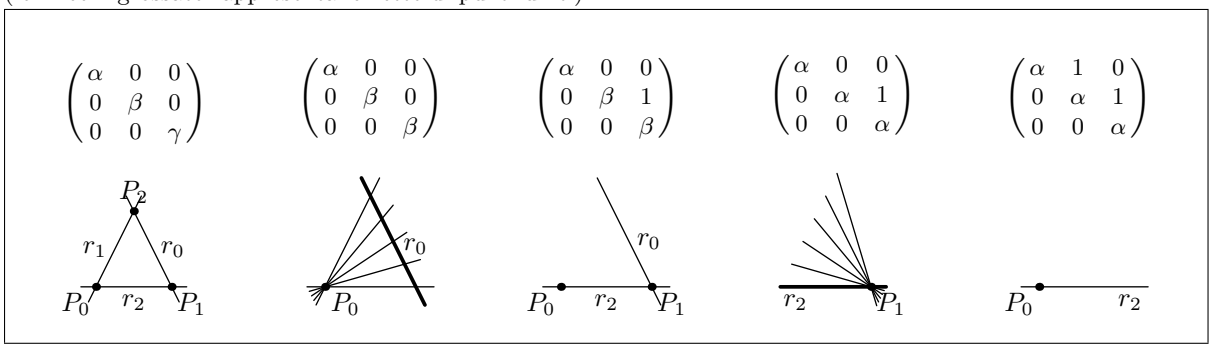
La prima osservazione utile in questo contesto viene dall'applicazione della dualità proiettiva. Una proiettività $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, di soprastante $\phi : V \to V$, induce una proiettività, $\Delta \circ f \circ \Delta^{-1} : \mathbb{P}(V^*) \to \mathbb{P}(V^*)$, nello spazio proiettivo duale, che descrive il comportamento di f sugli iperpiani di $\mathbb{P}(V)$. Infatti, dato un punto $\sigma\langle v^*\rangle$ di $\mathbb{P}(V^*)$, $\Delta^{-1}(\sigma\langle v^*\rangle) = \sigma\langle v^*\rangle^\perp$ è un iperpiano di $\mathbb{P}(V)$ ed applicare f a questo iperpiano significa trovare l'elemento $\sigma\left\{\ \phi(x) \mid x \in \langle v^*\rangle^\perp\ \right\}$ e si può vedere (cf. `Esercizio VI.1.7`) che si tratta dell'iperpiano corrispondente (tramite Δ) al sottospazio $\left\langle {\phi^*}^{-1}(v^*)\right\rangle$ di V^*, ove $\phi^* : V^* \to V^*$ è la trasposta di ϕ.

Fissiamo un riferimento su $\mathbb{P}(V)$ ed utilizziamo le coordinate. Se A è la matrice di ϕ in una base associata al riferimento ed $a = (a_0, \dots, a_n)$ sono le coordinate plückeriane di un iperpiano, π, l'osservazione precedente ci dice che l'iperpiano $f(\pi)$ ha coordinate plückeriane $aA^{-1} = (a_0, \dots, a_n)A^{-1}$. Infatti, se $P = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ è un punto di $\mathbb{P}(V)$, la sua immagine, $f(P)$, ha coordinate omogenee AP ed appartiene ad $f(\pi)$ se, e solo se, $(aA^{-1})(AP) = aP = 0$.

In particolare, un iperpiano π è stabile tramite f (ovvero $f(\pi) = \pi$) se, e solo se, le sue coordinate plückeriane, a, sono proporzionali ad aA, ovvero se, e solo se, è un autovettore della trasposta di A.

Poiché un'applicazione lineare e la sua trasposta hanno la medesima forma di Jordan, ciò significa che gli iperpiani uniti si presentano in modo identico ai punti uniti; ad esempio, se una proiettività f ha una retta di punti uniti (sottospazio di dimensione 2 di autovettori relativi ad uno stesso autovalore della soprastante), allora vi sarà anche un fascio di iperpiani uniti per f, e così via. Osserviamo in particolare che, se P è un punto unito, corrispondente ad un autovettore relativo all'autovalore α di ϕ, ed a è un iperpiano unito, corrispondente ad un autovettore relativo all'autovalore $\beta \neq \alpha$, allora il punto P appartiene all'iperpiano. Infatti, si ha $\beta aP = (aA)P = a(AP) = \alpha aP$ e ciò è possibile solo se $aP = 0$.

Poiché nel piano proiettivo, vi sono solo punti o iperpiani (=rette), le considerazioni precedenti sono sufficienti per guidarci a capire come si distribuiscano i punti uniti di una proiettività del piano. Ci limitiamo a discutere i casi in cui esista la forma di Jordan della soprastante, ovvero quando tutti gli autovalori appartengano al corpo di base, C (descrivere cosa succede altrimenti!). Riassumiamo qui sotto i casi possibili, riportando, una sopra l'altra, la forma canonica (di Jordan) di una soprastante e la configurazione di punti e rette unite corrispondenti (le linee ingrossate rappresentano rette di punti uniti).



Lasciamo al lettore il compito di discutere i dettagli relativi ai casi descritti qui sopra, precisando che, indicata con $\{v_0, v_1, v_2\}$ una base dello spazio vettoriale rispetto a cui la soprastante di f ha matrice di Jordan, si è posto $P_i = \sigma\langle v_i\rangle$, per $i = 0, 1, 2$ ed $r_0 = \sigma\langle v_1, v_2\rangle$, $r_1 = \sigma\langle v_0, v_2\rangle$, $r_2 = \sigma\langle v_0, v_1\rangle$.

Un discorso analogo potrebbe essere fatto per le proiettività dello spazio tridimensionale, ma il numero di casi (quanti sono?) sconsiglia una trattazione analitica della questione. Ci limitiamo quindi a dare un esempio, lasciando al lettore volonteroso il compito di analizzare le diverse situazioni che si possono presentare.

Si consideri la proiettività, $f : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nel riferimento canonico $\{e_0, \ldots, e_3\}$ e si determinino punti, rette e piani uniti rispetto ad f.

Il polinomio caratteristico di A è $\det(x\mathbf{1} - A) = (x+3)(x-3)^3$ e si ha

$$A - 3\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 9 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad (A - 3\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 18 & 0 & -54 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Il rango di $A - 3\mathbf{1}$ è uguale a 2 e quindi, il polinomio minimo è $(x+3)(x-3)^2$. Scelta la base $v_0 = 6e_1 - 5e_2 + 2e_3$, $v_1 = 2e_0 - 2e_2$, $v_2 = e_0$, $v_3 = -e_0 + 18e_1 + e_2 - 6e_3$, la matrice di una soprastante di f rispetto a tale base[(*)] è

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

[(*)] La conoscenza del polinomio caratteristicoe della dimensione dello spazio degli autovettori, garantiscono dell'esistenza di una tale base. La sua determinazione è necessaria se si vogliono esplicitare le coordinate o le equazioni degli elementi uniti rispetto alla base canonica.

da cui si vede che $r = \sigma\langle v_0, v_1\rangle$ è una retta di punti uniti e vi è un ulteriore punto unito, $P_3 = \sigma\langle v_3\rangle$, esterno alla retta r. I piani uniti, oltre al piano $\pi = \sigma\langle v_0, v_1, v_2\rangle$, sono tutti quelli del fascio di asse $s = \sigma\langle v_1, v_3\rangle$ (retta unita). Sono poi unite tutte le rette intersezione tra il piano π ed i piani del fascio di asse s (ovvero le rette del piano π passanti per $P_1 = \sigma\langle v_1\rangle$; tra queste c'è r) e tutte le rette che congiungono il punto P_3 con un punto della retta r (tra queste c'è s).

Invitiamo caldamente il lettore a discutere altri casi, sia partendo dalla forma di Jordan che da una matrice particolare della soprastante.

3. Spazio proiettivo e spazio affine

Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n, vogliamo mostrare che, scelto comunque un iperpiano Z di $\mathbb{P}(V)$, i punti dello spazio proiettivo non contenuti in Z formano uno spazio affine di dimensione n. Cominciamo caratterizzando alcune proiettività che dovremo utilizzare nel seguito.

3.1 Definizione. Una proiettività $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ è un'*omologia* se esiste un iperpiano $Z \in \mathbb{P}(V)$ tale che $f(P) = P$ per ogni punto $P \leq Z$. Un tale iperpiano Z è detto l'*asse dell'omologia* f.

Le omologie godono di un'altra proprietà, conseguenza della Dualità proiettiva.

3.2 Proposizione. *Sia $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n sul campo C. Una proiettività $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ è un'omologia se, e solo se, esiste un punto $P \in \mathbb{P}(V)$ con la proprietà che $f(H) = H$ per ogni iperpiano $H \geq P$. In particolare, si ha $f(P) = P$ ed il punto P è detto il centro dell'omologia f.*

dim. Sia ϕ una soprastante di f. Per studiare il comportamento di f sugli iperpiani di $\mathbb{P}(V)$, possiamo considerare la proiettività $\tilde{f} := \Delta \circ f \circ \Delta^{-1} : \mathbb{P}(V^*) \to \mathbb{P}(V^*)$ la cui soprastante è $(\phi^*)^{-1}$ (cf. `Esercizio VI.1.7`). Se f è un'omologia, allora esiste un sottospazio $W \subset V$, di dimensione $n = \dim_C V - 1$, costituito da autovettori relativi ad uno stesso autovalore $\alpha \neq 0$ (cf. `Esercizio VI.1.9`). Dunque, considerando l'applicazione lineare inversa, e la sua trasposta, vi è un sottospazio $U \subset V^*$, di dimensione n, formato da autovettori per $(\phi^*)^{-1}$, relativi all'autovalore α^{-1}. All'elemento $\sigma U \in \mathbb{P}(V^*)$ corrisponde, tramite Δ, il centro dell'omologia in $\mathbb{P}(V)$.

Dunque, per dualità proiettiva, $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ è un'omologia se, e solo se, $\tilde{f} : \mathbb{P}(V^*) \to \mathbb{P}(V^*)$ è un'omologia, e ciò conclude la dimostrazione. **CVD** □

In base alla Proposizione testè dimostrata, possiamo distnguere le omologie in due classi

3.3 Definizione. Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ un'omologia, di asse Z e centro P. Si dirà che f è un'*omologia speciale* se $P \leq Z$; si dirà che che f è *non-speciale* altrimenti. L'applicazione identica è un omologia che si considera sia speciale che non-speciale.

Esercizio 3.1. Siano $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n sul campo C ed $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ un'omologia diversa dall'applicazione identica. Si mostri che esiste un riferimento $\mathcal{R}$ su $\mathbb{P}(V)$ tale che f abbia una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{ove } \alpha \neq 1, \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Nel primo caso f è un'omologia non-speciale, nel secondo è un'omologia speciale. □

Esercizio 3.2. Si mostri che la composizione di due omologie aventi lo stesso asse, H, è ancora un'omologia di asse H. Si mostri che l'inverso di un'omologia è un'omologia avente lo stesso asse e lo stesso centro. □

Esercizio 3.3. Siano $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n sul campo C ed $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ un'omologia di centro S. Si mostri che, per ogni punto $P \in \mathbb{P}(V)$, i punti P, S ed $f(P)$ sono allineati (ovvero $f(P) \leq (P \vee S)$). Si concluda che, per ogni elemento σU di $\mathbb{P}(V)$, passante per il centro S, si ha $f(\sigma U) = \sigma U$. □

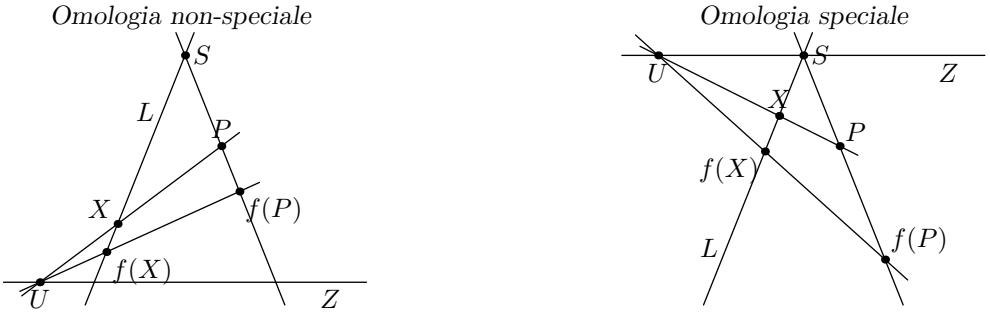
Sia $Z = \sigma T$ un iperpiano dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$; vogliamo mostrare che c'è una naturale corrispondenza tra i *vettori* di T e le *omologie speciali di asse* Z. A tale scopo, sotto opportune ipotesi, diamo una costruzione "geometrica" di punti corrispondenti in un'omologia.

3.4 Proposizione. *Siano $\mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n sul campo C ed $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ un'omologia. Allora, f è completamente determinata dalla conoscenza dell'asse Z, del centro S e dell'immagine, $f(P)$, di un punto $P \neq S$ e non contenuto nell'asse Z.*

dim. Sia X un punto di $\mathbb{P}(V)$ e mostriamo come si possa determinare l'immagine tramite f di un punto di $\mathbb{P}(V)$. Se $X \leq Z$, allora $f(X) = X$; supponiamo quindi che $X \not\leq Z$ e consideriamo dapprima il caso in cui P, X ed S non siano allineati. Preso un iperpiano L, passante per X, per il centro S, e che non contenga il punto P, si ha $f(X) \leq L$. D'altra parte, la retta $X \vee P$ interseca l'asse Z in un unico punto U e, in base all'`Esercizio VI.1.3`, il punto $f(X)$ è contenuto nella retta $f(P \vee X) = f(P \vee U) = f(P) \vee U$ e quindi l'intersezione $L \cap (f(P) \vee U)$ viene ad essere il punto $f(X)$.

Infine, nel caso in cui P, X ed S siano allineati, Si fissi dapprima un punto Y non appartenente né alla retta $P \vee S$, né all'asse Z, e si costruisca l'immagine $f(Y)$ di Y con il procedimento delineato sopra. A questo punto basta ripetere la stessa costruzione con il punto X e con Y in luogo di P. **CVD** □

3.5 Remark. Per comodità del lettore, diamo una rappresentazione grafica della costruzione descritta nella dimostrazione della Proposizione precedente, nel piano proiettivo.



Vogliamo usare il risultato della *Proposizione VI.3.4* per associare a ciascuno dei vettori del sostegno di un iperpiano un'omologia. Siano quindi fissati un iperpiano $Z = \sigma T$, un punto $P = \sigma\langle v_0\rangle \not\leq Z$, ed un vettore v_0 nel sostegno di P. Allora, in corrispondenza ad ogni vettore $t \in T$, è ben definita l'applicazione lineare $\psi_t : V \to V$, definita ponendo $\psi_t(v_0) = v_0 + t$ e $\psi_t(x) = x$ per ogni $x \in T$; tale applicazione lineare induce una proiettività $\tau_t : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, che è un'omologia speciale di asse Z e centro $S = \sigma\langle t\rangle$. Inoltre, alla somma di due vettori t ed s in T, corrisponde la composizione delle omologie speciali associate ai singoli addendi; ovvero $\tau_{t+s} = \tau_t \circ \tau_s$. Si osservi che se $t \neq t'$ sono due vettori distinti di T, le applicazioni lineari ψ_t e $\psi_{t'}$ non sono proporzionali tra loro e quindi $\tau_t \neq \tau_{t'}$. Inoltre, è la scelta del vettore v_0 e non solo del punto $P = \sigma\langle v_0\rangle$ che determina la corrispondenza tra vettori di T ed omologie speciali di asse $Z = \sigma T$[(†)]. Inoltre, alla somma di due vettori in T, corrisponde la composizione delle omologie speciali corrispondenti ai singoli addendi.

Raccogliamo in un enunciato preciso le considerazioni sin qui fatte, completandole con alcune facili osservazioni.

(†) Precisamente, se si sostituisce il vettore v_0 con βv_0 ($\beta \neq 0$) e si indica con $\psi'_t : V \to V$, l'applicazione lineare definita ponendo $\psi'_t(\beta v_0) = \beta v_0 + t$ e $\psi_t(x) = x$, per ogni $x \in T$, allora si ha $\psi'_t(v) = \psi_{\beta^{-1}t}(v)$ per ogni $v \in V$. Analogamente, se si sostituisce il punto $P = \sigma\langle v_0\rangle$ con $Q = \sigma\langle v_0 + x\rangle$, con $x \in T$, e si indica con $\phi_t : V \to V$, l'applicazione lineare definita ponendo $\phi_t(v_0 + x) = \beta v_0 + x + t$ e $\phi_t(u) = u$, per ogni $u \in T$, allora si ha $\phi_t(v) = \psi_{t+x}(v)$ per ogni $v \in V$. Possiamo quindi concludere che variando il punto P, oppure il vettore scelto nel suo sostegno, non si modifica la famiglia di omologie associata ai vettori del sostegno dell'iperpiano Z, ma varia la corrispondenza, che dipende quindi da tali scelte.

3.6 Proposizione. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$ sul campo C, e si fissino un iperpiano $Z = \sigma T$ di $\mathbb{P}(V)$, ed un vettore $v_0 \in V$ tale che $\sigma\langle v_0\rangle = P \not\leq Z$. Si indichi con $\tau : T \to \mathrm{Aut}\mathbb{P}(V)$, la corrispondenza che manda il vettore $t \in T$ nell'omologia speciale τ_t, definita dalla condizione*

$$\tau_t(\sigma\langle \alpha v_0 + x\rangle) = \sigma\langle \alpha(v_0 + t) + x\rangle, \qquad \text{per ogni } x \in T.$$

La corrispondenza τ gode delle seguenti proprietà

(i) per ogni coppia di vettori $t_1, t_2 \in T$ ed ogni punto X, si ha $\tau_{t_1+t_2}(X) = \tau_{t_1}(\tau_{t_2}(X)) = \tau_{t_2}(\tau_{t_1}(X))$;

(ii) se $X \not\leq Z$, allora $\tau_t(X) = X$ se, e solo se, $t = 0$;

(iii) dati due punti $X, Y \not\leq Z$ allora esiste un unico vettore $t \in T$ tale che $\tau_t(X) = Y$.

dim. Resta solo da verificare che valgono le proprietà della corrispondenza τ e proseguiamo nelle notazioni esposte prima dell'enunciato. Per quanto riguarda *(i)*, si ha

$$\tau_{t_1+t_2}(\sigma\langle \alpha v_0 + x\rangle) = \sigma\langle \alpha(v_0 + t_1 + t_2) + x\rangle = \tau_{t_1}(\sigma\langle \alpha(v_0 + t_2) + x\rangle) = \tau_{t_1}(\tau_{t_2}(\sigma\langle \alpha v_0 + x\rangle)),$$

qualunque siano α ed i vettori t_1, t_2 ed x in T.

(ii) Se $X \not\leq Z$ allora $X = \sigma\langle v_0 + x\rangle$, per qualche $x \in T$ e quindi si ha: $\tau_t(X) = \sigma\langle v_0 + t + x\rangle$, ed i vettori $v_0 + x$ e $v_0 + t + x$ sono proporzionali se, e solo se, $t = 0$.

(iii) Infine, dati due punti $X, Y \not\leq Z$, allora, si ha $X = \sigma\langle v_0 + x\rangle$ ed $Y = \sigma\langle v_0 + y\rangle$, per opportuni vettori $x, y \in T$. Ne consegue che, posto $t = y - x \in T$, si conclude che $\tau_t(X) = \sigma\langle v_0 + t + x\rangle = Y$. **CVD** □

Siamo quindi in grado di descrivere esplicitamente le relazioni esistenti tra spazio proiettivo e spazio affine della stessa dimensione.

3.7 Teorema. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n + 1$ sul campo C, e si fissino un iperpiano $Z = \sigma T$ di $\mathbb{P}(V)$, ed un vettore $v_0 \in V$ tale che $\sigma\langle v_0\rangle = P \not\leq Z$. Si indichi con $\tau : T \to \mathrm{Aut}\mathbb{P}(V)$, la corrispondenza descritta nella Proposizione VI.3.6. Allora, indicato con $\mathbb{A}$ l'insieme dei punti di $\mathbb{P}(V)$ non contenuti in Z ed indicata con $+ : \mathbb{A} \times T \to \mathbb{A}$, l'applicazione $(X, t) \mapsto \tau_t(X)$, la terna $(\mathbb{A}, T, +)$ è uno spazio affine di dimensione n su C.*

Una proiettività $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ induce un'affinità dello spazio $(\mathbb{A}, T, +)$ se, e solo se, $f(Z) \leq Z$. Infine, ogni affinità di $(\mathbb{A}, T, +)$ si estende ad una proiettività di $\mathbb{P}(V)$, soddisfacente alla condizione $f(Z) \leq Z$.

dim. La *Proposizione VI.3.6* contiene la dimostrazione del fatto che la terna $(\mathbb{A}, T, +)$ sia uno spazio affine di dimensione n su C. Sia quindi $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ una proiettività soddisfacente alla condizione $f(Z) \leq Z$, e sia $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare soprastante. Dalla condizione $f(Z) \leq Z$, si deduce che $\phi(T) \subseteq T$ e quindi che la restrizione di ϕ induce un automorfismo di T. Inoltre, tra le soprastanti dell'applicazione f, possiamo scegliere quella soddisfacente alla condizione $\phi(v_0) = v_0 + x$ con $x \in T$, perchè $\sigma\langle v_0\rangle \not\leq Z$ e quindi anche $f(\sigma\langle v_0\rangle) \not\leq Z$. Verifichiamo quindi che la restrizione di f ai punti di $\mathbb{A}$ è un'affinità, associata all'applicazione lineare ϕ. Infatti, dato un punto $X = \sigma\langle v_0 + y\rangle$, con $y \in T$, ed un vettore $t \in T$, si ha

$$f(X + t) = f(\sigma\langle v_0 + t + y\rangle) = \sigma\langle \phi(v_0 + t + y)\rangle = \sigma\langle \phi(v_0 + y) + \phi(t)\rangle = \\ = \tau_{\phi(t)}(\sigma\langle \phi(v_0 + y)\rangle) = f(X) + \phi(t).$$

D'altro canto, se $g : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ è un'affinità, associata all'applicazione lineare (invertibile) $\psi : T \to T$, si ha che $g(\sigma\langle v_0\rangle) = \sigma\langle v_0 + x\rangle$ ed un tale vettore $x \in T$ è univocamente determinato da questa condizione. Quindi esiste un'unica applicazione lineare $\phi : V \to V$ tale che $\phi(v_0) = v_0 + x$ e $\phi(t) = \psi(t)$, per ogni $t \in T$. È quindi immediato concludere che ϕ induce un'applicazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, soddisfacente

alla condizione $f(Z) \leq Z$. Tale applicazione è una proiettività; infatti, fissata una base $t_1, \ldots, t_n$ di T ed un'applicazione $n+1$-lineare alternante non-nulla D su V, si ha

$$D(\phi(v_0), \phi(t_1), \ldots, \phi(t_n)) = D(v_0, \psi(t_1), \ldots, \psi(t_n)) \neq 0,$$

perchè $v_0 \notin T$ e ψ è un automorfismo di T. È immediato verificare infine che g coincide con l'affinità indotta dalla proiettività testè costruita. **CVD** □

Esercizio 3.4. Nella costruzione dello spazio affine $(\mathbb{A}, T, +)$ a partire da $\mathbb{P}(V)$, si facciano variare il punto $P \not\leq Z = \sigma T$ ed il vettore v_0 nel sostegno di P. Si scrivano esplicitamente gli isomorfismi affini tra gli spazi così ottenuti. □

3.8 Un'osservazione sulla struttura di spazio affine del complementare di un iperpiano. Il lettore più attento avrà osservato che la struttura di spazio affine che abbiamo definito sul complementare di un iperpiano, $H = \sigma T$, in $\mathbb{P}(V)$ non è canonica, ma dipende dalla scelta di un vettore v_0 tale che $V = T \oplus \langle v_0 \rangle$. Come abbiamo già osservato, scelte diverse producono spazi affini isomorfi e quindi ci siamo accontentati di questa struttura non canonica. La non-canonicità dipende dal fatto di aver scelto come spazio vettoriale delle traslazioni un sostegno dell'iperpiano improprio T e quindi di aver dovuto fissare un isomorfismo tra questo spazio ed il sottogruppo, $U_H \subset \mathrm{Aut}\mathbb{P}(V)$, delle omologie speciali di asse H, che agisce in modo naturale sui punti del complementare di H.

La struttura di spazio affine poteva essere data in modo più canonico facendo vedere che il sottogruppo U_H ha una naturale struttura di spazio vettoriale sul corpo C degli scalari e che sono gli elementi di U_H i vettori dello spazio affine.

Abbiamo già visto che U_H è un gruppo abeliano (se τ_1 e τ_2 appartengono ad U_H, la somma $\tau_1 + \tau_2$ è la composizione $\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$ delle due omologie e l'elemento neutro è l'omologia identica, $1_{\mathbb{P}(V)}$), resta quindi da vedere che esiste l'operazione di prodotto per gli scalari di C, con le opportune proprietà. Per fare questo abbiamo bisogno di utilizzare le omologie non-speciali e quindi fissiamo alcune notazioni. Fissiamo un punto, $P_0 = \sigma \langle v_0 \rangle$, non appartenente ad H e, per ogni scalare $a \in C \setminus \{0\}$, consideriamo l'omologia non-speciale, λ_a, di asse H, centro P_0 e rapporto tra gli autovalori a. Ovvero la proiettività che ha come soprastante l'applicazione lineare, $\phi_a : V \to V$, definita da $\phi_a(v_0) = av_0$ e $\phi_a(t) = t$ per ogni $t \in T$. Si definisce quindi l'applicazione $C \times U_H \to U_H$, $(a, \tau) \mapsto \tau^a$, ponendo $\tau^a = \lambda_a^{-1} \tau \lambda_a$ per $a \neq 0$ e $\tau^0 = 1_{\mathbb{P}(V)}$, qualunque sia τ in U_H.

Bisogna verificare che questa applicazione è ben definita e rende il gruppo abeliano U_H uno spazio vettoriale su C (cf. *Definizione II.1.1*). Per prima cosa osserviamo che $\tau^a = \lambda_a^{-1} \tau \lambda_a$ è certamente un'omologia di asse H, in quanto composizione di omologie aventi lo stesso asse; inoltre si tratta di un'omologia speciale perché, dato un suo punto fisso, P, il punto $\lambda_a(P)$ è un punto fisso per τ e quindi appartiene ad H. Si ha $\lambda_{ab} = \lambda_a \circ \lambda_b$ e quindi $\tau^{ab} = (\tau^a)^b$; e inoltre $\lambda_a^{-1}(\tau_1 \circ \tau_2)\lambda_a = \lambda_a^{-1}\tau_1\lambda_a \circ \lambda_a^{-1}\tau_2\lambda_a$. Dunque il prodotto è compatibile col prodotto tra scalari e distribuisce rispetto alla somma di vettori. Osservando che $\lambda_1 = 1_{\mathbb{P}(V)}$, si conclude che $\tau^1 = \tau$ e quindi resta da verificare che questo prodotto distribuisce rispetto alla somma tra scalari, ovvero che $\tau^{a+b} = \tau^a \circ \tau^b$. Sia $\psi : V \to V$ la soprastante di τ tale che $\psi(t) = t$ per ogni $t \in T$, e siano ϕ_a, ϕ_b e ϕ_{a+b} le soprastanti di λ_a, λ_b e λ_{a+b} definite sopra. Se $\sigma \langle v_0 \rangle$ è il centro comune alle tre omologie non speciali, si ha

$$\phi_a(v_0) = av_0, \qquad \phi_b(v_0) = bv_0, \qquad \phi_{a+b}(v_0) = (a+b)v_0, \qquad \text{e} \qquad \psi(v_0) = v_0 + t_0,$$

per un opportuno vettore $t_0 \in T$. Si osservi che $\phi_a^{-1}(\psi(\phi_a(v_0))) = v_0 + at_0$ e quindi, con un calcolo diretto sulle soprastanti, si conclude che

$$\lambda_{a+b}^{-1} \tau \lambda_{a+b} = \lambda_a^{-1} \tau \lambda_a \circ \lambda_b^{-1} \tau \lambda_b$$

e ciò completa la verifica che U_H è uno spazio vettoriale su C.

Esercizio 3.5. Si scriva la matrice di un'omologia non–speciale, diversa dall'identità, avente come asse l'iperpiano H di equazione $x_0 = 0$, e si scrivano esplicitamente le relazioni esistenti tra la matrice di tale omologia e le coordinate del suo centro. □

Esercizio 3.6. Si consideri lo spazio affine $\mathbb{A}^3(C)$ immerso nel modo usuale nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(C)$ (piano improprio $x_0 = 0$). Sia $f : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$ un'affinità che trasforma ogni piano, π, in un piano parallelo a π. Si mostri che f è un'omologia dello spazio proiettivo e si dica qual è il suo asse. Si scriva la matrice di f sapendo

che il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (coordinate affini) è un punto unito per f e che il punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ viene mandato in $f(Q) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 3.7. Si considerino nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ il punto $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed il piano $\pi : 2x - 3y + z = 1$.

(a) Pensando $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ immerso in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ nel modo usuale, si scriva la matrice dell'applicazione proiettiva ϕ, definita proiettando i punti dal centro C sul piano π.
(b) Si determini un piano π' in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ affinché la restrizione di ϕ allo spazio affine complementare sia un'applicazione affine. □

Esercizio 3.8. Si considerino nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ le due rette

$$r : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s : \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}.$$

Pensando $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ immerso in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ nel modo usuale, si scriva la matrice dell'applicazione proiettiva $\phi : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, definita proiettando i punti dal centro r sulla retta s. La restrizione di ϕ allo spazio affine è un'applicazione affine? □

Esercizio 3.9. Si consideri il semipiano superiore $H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > 0 \right\}$ e chiamiamo *rette* di H i semicerchi con centro sull'asse orizzontale oppure le semirette verticali.

(a) Si mostri che per due punti di H passa una ed una sola *retta* di H.
(b) Ricordato che l'angolo tra due *rette* di H, incidenti in un punto P, è l'usuale angolo (euclideo) formato dalle tangenti alle due curve nel punto P, si determini l'equazione cartesiana della *retta* di H ortogonale a $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = r^2$ e passante per il punto $X = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$ $(\vartheta \in (0, \pi))$. □

Esercizio 3.10. Data una retta $r = \sigma\left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, si consideri

$$P(r) = \begin{pmatrix} p_{01}(r) \\ p_{02}(r) \\ p_{03}(r) \\ p_{12}(r) \\ p_{13}(r) \\ p_{23}(r) \end{pmatrix} \qquad \text{ove} \qquad p_{ij}(r) = \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix}.$$

(a) Si verifichi che la corrispondenza $\Phi : r \mapsto P(r)$ è un'applicazione ben definita dall'insieme delle rette di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ sui punti di $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$.
(b) Si mostri che l'immagine di ϕ è contenuta nel supporto di una quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$. [**Sugg.** Si consideri lo sviluppo di $\det \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$.] □

Esercizio 3.11. Sia $r = \sigma\left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle$ una retta di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

(a) Si mostri che r è sghemba con la retta $h_{23} = \sigma\langle e_2, e_3\rangle$ se, e solo se, $p_{01}(r) = \det \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} \neq 0$.
(b) Si verifichi che, se r è sghemba con la retta h_{23}, allora $r = \sigma\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle$, per opportune costanti a, b, c, d e tale scrittura è unica.
(c) Facendo riferimento all'esercizio precedente, si mostri che la restrizione dell'applicazione Φ induce una biiezione tra l'insieme delle rette di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ sghembe con h_{23}, ed i punti di $\mathcal{Q}$ contenuti nel complementare dell'iperpiano $p_{01} = 0$ di $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$. Si concluda che Φ è biettiva. □

3.9 Il fibrato tangente a $\mathbb{P}(V)$. In uno spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$, possiamo pensare i vettori di V, applicati in un punto P, come i "vettori tangenti" ad $\mathbb{A}$ nel punto P, identificando così V con lo "Spazio tangente

ad $\mathbb{A}$ in P" e scrivere in simboli $T_P(\mathbb{A}) = V$, per ogni punto P di $\mathbb{A}$. Il prodotto cartesiano $T(\mathbb{A}) = \mathbb{A} \times V$ si chiama il *fibrato tangente* ad $\mathbb{A}$, associando così ad ogni vettore l'indicazione del punto al quale esso è applicato, e si ha la proiezione canonica $\pi : \mathbb{A} \times V \to \mathbb{A}$. Si chiama *campo vettoriale* ogni sezione σ della proiezione canonica, ovvero ogni applicazione $\sigma : U \to T(\mathbb{A})$, definita su un sottoinsieme U di $\mathbb{A}$, tale che $\pi \circ \sigma = 1_U$, ovvero $\sigma(P) \in T_P(\mathbb{A})$ per ogni P in U[(†)]. Ad esempio, nel caso di $\mathbb{A}(\mathbb{R}^3)$, un campo vettoriale può essere visto come un'applicazione definita su un sottoinsieme U di $\mathbb{R}^3$ ed a valori in $\mathbb{R}^3$, identificando tutti gli spazi tangenti $T_P(\mathbb{A}(\mathbb{R}^3))$, al variare di P in U, con un'unica copia di $\mathbb{R}^3$.

Vogliamo vedere ora qual è la struttura del fibrato tangente sullo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$. Siano $x_0, \dots, x_n$ delle coordinate su V (ovvero una base di V^*) e sia $v_0, \dots, v_n$, la corrispondente base di V. Osserviamo che ad ogni punto $P = \sigma \langle v \rangle = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ di $\mathbb{P}(V)$ resta associato un sottospazio $X_P \subset V^*$, formato dalle forme lineari che si annullano in P, ovvero, nelle coordinate date, $X_P = \langle p_i x_j - p_j x_i \,|\, 0 \le i < j \le n \rangle$ (ovvero $X_P = \langle v \rangle^\perp$). Questo sottospazio è detto lo *spazio cotangente* a $\mathbb{P}(V)$ in P, in simboli $T^*_P(\mathbb{P}(V))$, ed il suo duale è $T_P(\mathbb{P}(V))$, lo spazio tangente a $\mathbb{P}(V)$ in P. È immediato osservare che $T_P(\mathbb{P}(V)) = V/\langle v \rangle$ (cf. `Esercizio II.2.39`), perchè tutte le forme lineari di X_P si annullano su $\langle v \rangle$, e quindi il fibrato tangente sarà la collezione di tutti questi spazi vettoriali quoziente, al variare di P tra i punti di $\mathbb{P}(V)$. Questa definizione è coerente con quanto appena visto per lo spazio affine. Sappiamo che lo spazio proiettivo (punteggiato) $\mathbb{P}(V)$ è ricoperto dai sottoinsiemi $U_i = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_i \neq 0 \right\}$, per $i = 0, \dots, n$, ciascuno dei quali è l'insieme dei punti di uno spazio affine, sotto l'azione dello spazio vettoriale $W_i = \langle v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n \rangle \subset V$, ove il vettore sotto il cappuccio deve essere cancellato dall'insieme dei generatori. Se il punto $P = \sigma \langle v \rangle = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ appartiene ad U_i, allora la coordinata p_i è diversa da zero e quindi $v \notin W_i$, da cui discende che $V = \langle v \rangle \oplus W_i$ e quindi che la proiezione canonica induce un isomorfismo tra W_i e $V/\langle v \rangle$ (cf. `Esercizio II.2.43`). Ne consegue che, per ogni punto P di U_i, si ha $T_P(\mathbb{P}(V)) \cong W_i$ e quindi che la restrizione del fibrato tangente ad U_i può essere identificata col prodotto cartesiano $U_i \times W_i$, ovvero col fibrato tangente dello spazio affine corrispondente. Se il punto P appartiene all'intersezione, $U_i \cap U_j$, tra due degli aperti dati, le due identificazioni $W_j \cong T_P(\mathbb{P}(V)) \cong W_i$ danno luogo ad un isomorfismo di spazi vettoriali $\beta^{ij}_P : W_i \to W_j$, dipendente dal punto P (scriverne la matrice nelle basi date!) e si può verificare che, nel caso in cui $P \in U_i \cap U_j \cap U_k$ le identificazioni sono compatibili, ovvero che $\beta^{ik}_P = \beta^{jk}_P \circ \beta^{ij}_P$ (farlo!). In conclusione il fibrato tangente allo spazio proiettivo è il risultato dell'incollamento dei prodotti cartesiani $U_i \times W_i$, per $i = 0, \dots, n$ tramite le identificazioni β^{ij}_P sui punti di intersezione dei vari sottoinsiemi U_i. In questo modo è ben definita la proiezione $\pi : T(\mathbb{P}(V)) \to \mathbb{P}(V)$, che si ottiene a partire dalle proiezioni $\pi_i : U_i \times W_i \to U_i$, e quindi si può parlare anche in questo contesto di campi vettoriali, come sezioni del fibrato tangente.

Diamo qualche esempio degli oggetti costruiti nel caso dello spazio proiettivo reale, di dimensione 3; ovvero consideriamo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ con la base canonica, $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, di $\mathbb{R}^4$ e sia $P = \sigma \langle e_0 + 2e_2 + e_3 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ un punto. Il punto P appartiene ad $U_0 \cap U_2 \cap U_3$ e quindi han senso tutte le mappe $\beta^{ij}_P : W_i \to W_j$, quando i e j sono entrambi diversi da 1, e possiamo scrivere le matrici di alcune di queste applicazioni nelle basi date; ad esempio, indicata con B^{02}_P la matrice di $\beta^{02}_P : \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \to \langle e_0, e_1, e_3 \rangle$, si ha

$$B^{02}_P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ed, analogamente,} \qquad B^{20}_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{23}_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(†) Usualmente su $\mathbb{A}$ e su $T(\mathbb{A})$ si pongono delle particolari topologie che le rendono delle "varietà" (algebriche, differenziali, analitiche o...) e le sezioni devono, di consueto, essere definite su *aperti* di $\mathbb{A}$ ed essere "coerenti con le strutture poste" (ovvero applicazioni algebriche, di classe $\mathscr{C}^\infty$, analitiche o...). Non possiamo, in questo ambito, sviluppare alcun dettaglio in questa direzione, rimandando il lettore a testi sulle varietà.

e si può verificare con facili calcoli, ad esempio, che $B_P^{02}B_P^{20} = \mathbf{1}_3$ o che $B_P^{23}B_P^{02} = B_P^{03}$.

Da ultimo, osserviamo che alcune proprietà elementari di un campo vettoriale, possono non essere conservate passando da un sottoinsieme del ricoprimento ad un altro. Ad esempio, consideriamo il campo $\sigma(P) = (P, e_2) \in U_0 \times W_0$, per $P \in U_0 \cap U_2$, che quindi ha un valore "costante" in questo contesto; passando ora al corrispondente valore di σ in $U_2 \times W_2$, si ha $\beta_P(e_2) = -\frac{p_0}{p_2}e_0 - \frac{p_1}{p_2}e_1 - \frac{p_3}{p_2}e_3 \in W_2$ e quindi un campo tutt'altro che costante.

4. Birapporti e gruppi armonici.

Introduciamo in questa sezione un importante invariante legato alle quaterne di punti allineati nello spazio proiettivo. Siano dati quattro punti allineati P_1, P_2, P_3, P_4 in $\mathbb{P}(V)$ ove i primi 3 sono, a due a due, distinti ($P_1 \neq P_2 \neq P_3 \neq P_1$) allora esistono due vettori linearmente indipendenti v_0 e v_1 in V tali che $P_1 = \sigma\langle v_1\rangle$, $P_2 = \sigma\langle v_0\rangle$, $P_3 = \sigma\langle v_0 + v_1\rangle$ (ovvero $\{v_0, v_1\}$ è la base associata al riferimento sulla retta dato dai punti P_1, P_2, P_3). Dunque esistono due costanti x_0 ed x_1 in C tali che $P_4 = \sigma\langle x_0v_0 + x_1v_1\rangle$ e tali costanti sono determinate a meno della moltiplicazione di entrambo per una costante non-nulla. Dunque è ben definito il rapporto $\frac{x_1}{x_0}$, ove si ponga (per definizione) $\frac{x_1}{x_0} = \infty$ se $x_0 = 0 \neq x_1$. Possiamo qundi dare la seguente

4.1 Definizione. Dati quattro punti allineati P_1, P_2, P_3, P_4 in $\mathbb{P}(V)$ di cui i primi 3 siano, a due a due, distinti si definisce il *birapporto* tra i quattro punti, nell'ordine dato, come

$$(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{x_1}{x_0} \in C \cup \{\infty\},$$

ove x_1 ed x_0 sono determinati dalle condizioni

$$P_1 = \sigma\langle v_1\rangle, \qquad P_2 = \sigma\langle v_0\rangle, \qquad P_3 = \sigma\langle v_0 + v_1\rangle, \qquad P_4 = \sigma\langle x_0v_0 + x_1v_1\rangle.$$

Osserviamo che, prendendo come punto improprio della retta il punto P_1 e fissando l'origine in P_2 ed il punto unità in P_3, allora, se $P_4 \neq P_1$ il birapporto (P_1, P_2, P_3, P_4) coincide con la coordinata affine del punto P_4 nel riferimento dato e P_1 è l'unico punto della retta ad avere birapporto infinito dopo i punti dati. In particolare, ciò significa che il punto P_4 è univocamente determinato dalla conoscenza dei tre punti P_1, P_2, P_3 e del birapporto (P_1, P_2, P_3, P_4).

Esercizio 4.1. Dati i quattro punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, di coordinate omogenee

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix};$$

si calcoli (P_1, P_2, P_3, P_4). □

Osserviamo che il birapporto di quattro punti è un "invariante proiettivo", ovvero che *le proiettività conservano i birapporti.*

4.2 Proposizione. *Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ una proiettività, allora dati comunque quattro punti allineati P_1, P_2, P_3, P_4 in $\mathbb{P}(V)$ con i primi 3 a due a due distinti, si ha*

$$(f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4)) = (P_1, P_2, P_3, P_4)$$

dim. Si considerino i vettori v_0 e v_1 di V tali che $P_1 = \sigma\langle v_1\rangle$, $P_2 = \sigma\langle v_0\rangle$, $P_3 = \sigma\langle v_0 + v_1\rangle$ e $P_4 = \sigma\langle x_0v_0 + x_1v_1\rangle$. Allora, indicata con $\phi : V \to V'$ una soprastante di f, si ha

$$f(P_1) = \sigma\langle\phi(v_1)\rangle, \quad f(P_2) = \sigma\langle\phi(v_0)\rangle, \quad f(P_3) = \sigma\langle\phi(v_0 + v_1)\rangle, \quad f(P_4) = \sigma\langle\phi(x_0v_0 + x_1v_1)\rangle,$$

e quindi, essendo ϕ un'applicazione lineare, si conclude che $\{\phi(v_0), \phi(v_1)\}$ è una base associata al riferimento $f(P_1), f(P_2), f(P_3)$ e dunque $(f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4)) = \frac{x_1}{x_0} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$. **CVD** □

Esercizio 4.2. Si mostri che vale il reciproco della proposizione precedente, ovvero se $r = \mathbb{P}(V)$ ed $s = \mathbb{P}(W)$ sono due rette proiettive ed $f : r \to s$ è un'applicazione (insiemistica) che manda il vuoto proiettivo di r nel vuoto proiettivo di s, σV su σW e tale che, dati quattro punti P, Q, R, S di r, con $P \neq Q \neq R \neq P$, si abbia $(P, Q, R, S) = (f(P), f(Q), f(R), f(S))$, allora f è una proiettività. □

Vogliamo ora dimostrare in modo esplicito come il birapporto di quattro punti dipenda dall'ordine in cui si considerano i punti.

4.3 Proposizione. *Siano dati quattro punti allineati P_1, P_2, P_3, P_4 in $\mathbb{P}(V)$, a due a due distinti. Allora, posto $(P_1, P_2, P_3, P_4) = x$ si ha:*

(a) $(P_2, P_1, P_3, P_4) = (P_1, P_2, P_4, P_3) = \frac{1}{x}$;
(b) $(P_1, P_3, P_2, P_4) = (P_4, P_2, P_3, P_1) = 1 - x$;
(c) $(P_3, P_2, P_1, P_4) = (P_1, P_4, P_3, P_2) = \frac{x}{x-1}$.

dim. Sia $\{v_1, v_0\}$ una base associata al riferimento sulla retta dato dai punti P_1, P_2, P_3 e si abbia $P_1 = \sigma\langle v_1\rangle$, $P_2 = \sigma\langle v_0\rangle$, $P_3 = \sigma\langle v_0 + v_1\rangle$, $P_4 = \sigma\langle x_0 v_0 + x_1 v_1\rangle$. In particolare, si ha $x = (P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{x_1}{x_0}$.

(a). Una base associata al riferimento P_2, P_1, P_3 è ancora $\{v_1, v_0\}$, ma questa volta il ruolo delle coordinate di $P_4 = \sigma\langle x_0 v_0 + x_1 v_1\rangle$ è scambiato, e si ha quindi $(P_2, P_1, P_3, P_4) = \frac{x_0}{x_1} = \frac{1}{x}$.

Una base associata al riferimento sulla retta dato dai punti P_1, P_2, P_4 è costituita dai vettori $w_1 = x_1 v_1$ e $w_0 = x_0 v_0$. In particolare, si ha

$$P_3 = \sigma\langle v_0 + v_1\rangle = \sigma\langle x_0^{-1} w_0 + x_1^{-1} w_1\rangle$$

da cui si deduce $(P_1, P_2, P_4, P_3) = \frac{x_1^{-1}}{x_0^{-1}} = \frac{1}{x}$.

(b). Una base associata al riferimento P_1, P_3, P_2 è $\{-v_1, v_0 + v_1\}$, e si ha

$$P_4 = \sigma\langle (x_0 - x_1)(-v_1) + x_0(v_0 + v_1)\rangle.$$

Quindi si conclude che $(P_1, P_3, P_2, P_4) = \frac{x_0 - x_1}{x_0} = 1 - x$.

Una base associata al riferimento P_4, P_2, P_3 è $\{x_0 v_0 + x_1 v_1, (x_1 - x_0) v_0\}$, e si ha

$$P_1 = \sigma\langle (x_0 - x_1)(x_0 v_0 + x_1 v_1) + x_0(x_1 - x_0) v_0\rangle.$$

Quindi si conclude che $(P_4, P_2, P_3, P_1) = \frac{x_0 - x_1}{x_0} = 1 - x$.

(c). Una base associata al riferimento P_3, P_2, P_1 è $\{v_0 + v_1, -v_0\}$, e si ha

$$P_4 = \sigma\langle x_1(v_0 + v_1) + (x_1 - x_0)(-v_0)\rangle.$$

Quindi si conclude che $(P_3, P_2, P_1, P_4) = \frac{x_1}{x_1 - x_0} = \frac{x}{x-1}$.

Infine, una base associata al riferimento P_1, P_4, P_3 è $\{(x_0 - x_1) v_1, x_0 v_0 + x_1 v_1\}$, e si ha

$$P_2 = \sigma\langle x_1(x_0 - x_1) v_1 + (x_1 - x_0)(x_0 v_0 + x_1 v_1)\rangle.$$

Quindi si conclude che $(P_1, P_4, P_3, P_2) = \frac{x_1}{x_1 - x_0} = \frac{x}{x-1}$. **CVD** □

È chiaro che, ogni permutazione dei punti P_1, P_2, P_3, P_4 si ottiene componendo opportunamente alcuni degli scambi descritti nella *Proposizione VI.4.3* di cui manteniamo le notazioni. Il lettore è quindi invitato a verificare i fatti seguenti.

Esercizio 4.3. Siano dati quattro punti allineati P_1, P_2, P_3, P_4 in $\mathbb{P}(V)$, a due a due distinti. Allora, posto $(P_1, P_2, P_3, P_4) = x$, si verifichi che si ha
(a) $(P_2, P_4, P_3, P_1) = \frac{1}{1-x}$;
(b) al variare dell'ordine dei quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 si ottengono sei possibili valori distinti del birapporto e precisamente x, $\frac{1}{x}$, $1-x$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x}{x-1}$, $\frac{x-1}{x}$. □

Esercizio 4.4. Siano dati quattro punti della retta proiettiva $\mathbb{P}^1(C)$, di coordinate omogenee

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ d \end{pmatrix}.$$

Si verifichi che si ha

$$(A, B, C, D) = \frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)}.$$

Si osservi che i quattro numeri a, b, c, d sono le coordinate affini dei punti A, B, C, D nel riferimento standard di $\mathbb{P}^1(C)$. In particolare, si definisce il *birapporto tra quattro numeri* come $(a, b, c, d) = \frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)}$. □

Le affermazioni sin qui fatte si possono estendere anche al caso in cui vi siano solo tre punti distinti tra P_1, P_2, P_3, P_4, purchè il birapporto abbia senso (ovvero i primi tre punti siano a due a due distinti). Ciò è vero purchè si operi con il simbolo ∞ secondo le seguenti convenzioni:

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0, \quad \infty + a = \infty \ \forall a \in C, \quad \infty a = \infty \ \forall a \in C \setminus \{0\},$$
$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{0}{0} = 1, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty - \infty = 0.$$

In particolare, si verifichi che $(0, 1, \frac{1}{2}, \infty) = -1$ (cf. `Esercizio VI.4.4`).

Abbiamo osservato che, dati quattro punti allineati P_1, P_2, P_3, P_4, vi sono, in generale, sei possibili valori distinti del birapporto tra questi punti, a seconda dell'ordine con cui si considerino (cf. `Esercizio VI.4.3`). Vi sono però delle quaterne particolari di punti per cui i possibili valori distinti del birapporto diminuiscono. Uno di questi casi ha una particolare importanza.

4.4 Definizione. I quattro punti P, Q, R, S, a due a due distinti, di una retta proiettiva sul corpo C (di caratteristica diversa da 2), formano, nell'ordine, un *gruppo armonico* se $(P, Q, R, S) = -1$. In tal caso diremo anche che la coppia (P, Q) *separa armonicamente* la coppia (R, S) e viceversa.

Si osservi che nella retta proiettiva su un corpo di caratteristica 2, non possono esistere gruppi armonici, perchè in tal caso, si ha $(P, Q, R, S) = -1 = 1$ e quindi $R = S$.

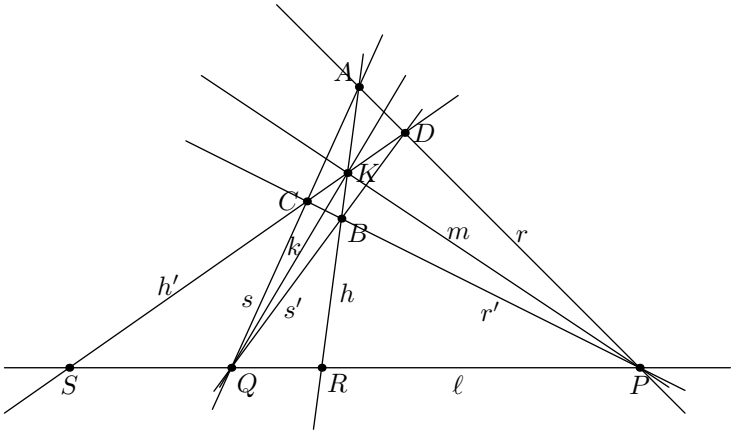
Esercizio 4.5. Si verifichi che i gruppi armonici sono esattamente quelle quaterne di punti allineati P, Q, R, S, a due a due distinti, per cui si ha $(Q, P, R, S) = (P, Q, R, S) = (P, Q, S, R)$. □

Esercizio 4.6. Siano P, Q, R, S un gruppo armonico. Si verifichi che il birapporto tra questi quattro punti assume al variare dell'ordine i valori -1, 2, $\frac{1}{2}$. □

Esercizio 4.7. Siano dati quattro punti allineati P_1, P_2, P_3, P_4 in $\mathbb{P}(V)$, a due a due distinti.
(a) Si mostri che vi sono solo due possibili valori del birapporto tra questi quattro punti se si ha $(P_1, P_2, P_3, P_4) = (P_3, P_1, P_2, P_4)$. In tal caso diremo che i quattro punti formano una *quaterna equianarmonica*.
(b) Si mostri che non vi sono quaterne equianarmoniche in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, e se ne determini una in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. □

Vogliamo mostrare che è possibile "costruire" graficamente il quarto armonico dopo tre punti dati e cominciamo col tracciare un disegno a cui ci riferiremo nella successiva discussione.

Siano dati i tre punti P, Q, R della retta ℓ, come in figura e mostriamo come si possa costruire un punto S tale che $(P, Q, R, S) = -1$. Si traccino arbitrariamente, due rette distinte r ed r', uscenti da P, ed una retta s, uscente da Q, e si considerino i punti $A = r \cap s$ e $C = r' \cap s$. Siano $h = R \vee A$, $B = h \cap r'$ e si determini il punto $D = (Q \vee B) \cap r$. Allora, la retta $D \vee C$ interseca ℓ in un punto S e questo è proprio il punto cercato.



Infatti, ricordando che le proiettività conservano i birapporti (cf. *Proposizione VI.4.2*) e considerando la proiezione di centro A dalla retta ℓ alla retta $k = C \vee D$ (cf. `Esercizio VI.2.4`), si ha $(P, Q, R, S) = (D, C, K, S)$. Analogamente, considerando la la proiezione di centro B dalla retta k alla retta ℓ, si ha $(D, C, K, S) = (Q, P, R, S)$. Quindi, posto $x = (P, Q, R, S)$, si ha $x = (P, Q, R, S) = (Q, P, R, S) = \frac{1}{x}$, da cui si deduce che $x^2 = 1$ e quindi, essendo $R \neq S$ (perchè?), si ha $x = -1$.

Esercizio 4.8. La figura qui sopra è un *quadrangolo piano completo*. I punti A, B, C, D (a tre a tre non allineati) sono i *vertici*, le rette r, r', s, s', h, h' sono i *lati*, le intersezioni dei lati opposti (ovvero, non passanti per uno stesso vertice) sono i punti P, Q, K, detti i *punti diagonali* e le rette che li congiungono, k, ℓ, m, sono le *diagonali* (o lati diagonali) del quadrangolo.

(a) Si mostri che $(A, B, K, R) = -1$ e $(P, K, m \cap s, m \cap s') = -1$; ovvero che *in un quadrangolo piano completo, due vertici (risp. due punti diagonali) separano armonicamente i due punti di intersezione del lato (risp. della diagonale) che li contiene con i lati diagonali (risp. lati).*

(b) Si prendano i vertici del quadrangolo, A, B, C, D, come riferimento nel piano proiettivo e si determinino le coordinate omogenee (o plückeriane) di tutti gli elementi del quadrangolo rispetto a questo riferimento.

(c) Si descriva la costruzione duale, ovvero il *quadrilatero piano completo*, determinato da quattro rette, a tre a tre, non concorrenti ad uno stesso punto. □

Esercizio 4.9. Si dualizzi la costruzione di inizio pagina per determinare la quarta armonica dopo tre rette concorrenti ad uno stesso punto. □

Esercizio 4.10. Si consideri il piano affine immerso nel piano proiettivo e si mostri che il punto medio tra due punti P e Q è il quarto armonico dopo i due punti dati ed il punto improprio della retta $P \vee Q$. □

Esercizio 4.11. Si deduca dagli esercizi precedenti che le diagonali di un parallelogramma del piano affine si incontrano nei rispettivi punti medi. □

Esercizio 4.12. Siano r ed r' due rette parallele del piano affine e $P \neq Q$ due punti della retta r. Si descriva un procedimento grafico per costruire con la sola riga il punto medio del segmento PQ. □

Esercizio 4.13. Si osservi che $(\infty, 0, x, -x) = -1 = (x, -x, 1, x^2)$. Dato un punto P della retta, di coordinata affine x si descriva un procedimento grafico per costruire con la sola riga, il punto di coordinata x^2. □

Vi è una relazione stretta tra i gruppi armonici ed una particolare classe di proiettività.

4.5 Definizione. Sia k un intero, maggiore o uguale a 2. Una proiettività $\phi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ ha *periodo* k se k è il minimo intero positivo tale che $\phi^k = 1_{\mathbb{P}(V)}$. In particolare, una proiettività di periodo 2 si dice un'*involuzione*.

Vogliamo mostrare alcune proprietà delle involuzioni della retta proiettiva.

4.6 Proposizione. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2 sul corpo C, di caratteristica diversa da 2 e sia $\phi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ una proiettività.*

(a) ϕ è un'involuzione se, e solo se, esistono due punti distinti $P, Q \in \mathbb{P}(V)$, tali che $P = \phi(Q)$ e $Q = \phi(P)$. Due tali punti si dicono una coppia involutoria.

(b) Se ϕ è un'involuzione, allora o è priva di punti fissi, o ve ne sono esattamente due. In particolare, se C è algebricamente chiuso allora vi sono esattamente due punti fissi.

(c) Se ϕ è un'involuzione ed X, Y sono i suoi punti fissi, allora la coppia (X, Y) separa armonicamente ogni coppia di punti corrispondenti; ovvero, per ogni punto P in $\mathbb{P}(V)$ si ha $(X, Y, P, \phi(P)) = -1$.

dim. (a). Sia X un punto di $\mathbb{P}(V)$, diverso da P e Q, e si osservi che, poichè le proiettività conservano i birapporti (cf. *Proposizione VI.4.2*), deve aversi

$$(P, Q, \phi(X), X) = (Q, P, \phi^2(X), \phi(X)) = (P, Q, \phi(X), \phi^2(X));$$

ove l'ultima uguaglianza vale per la *Proposizione VI.4.3* (a). Poichè i tre punti $P, Q, \phi(X)$ sono un riferimento in $\mathbb{P}(V)$, l'uguaglianza dei birapporti implica $\phi^2(X) = X$. Per l'arbitrarietà del punto X, si conclude che ϕ ha periodo 2.

(b). Se $\phi_0 : V \to V$ è una soprastante di ϕ, esiste una costante $a \neq 0$ in C, tale che $\phi_0^2 = a\mathbf{1}_V$. Dunque il polinomio caratteristico di ϕ_0 è uguale ad $X^2 - a$ che, essendo la caratteristica di C diversa da 2, è un polinomio irriducibile, oppure il prodotto di due fattori lineari distinti, a seconda che esista o meno una radice quadrata di a in C. Poichè i sottospazi di autovettori di ϕ_0 corrispondono ai ppunti fissi di ϕ, ciò permette di concludere.

(c). È sufficiente osservare che per ogni punto P di $\mathbb{P}(V)$, distinto da P e Q, si ha

$$(X, Y, P, \phi(P)) = (X, Y, \phi(P), P) \neq 1$$

In base alla *Proposizione VI.4.3 (a)* si conclude. **CVD** □

Esercizio 4.14. Sia $\phi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ una proiettività e $k \geq 2$ un intero. Si dice che i punti $P_1, \ldots, P_k$ formano un *k-ciclo* per ϕ se $\phi(P_i) = P_{i+1}$ per $i = 1, \ldots, k-1$ e $\phi(P_k) = P_1$. Si mostri che una proiettività delle retta ha periodo k se, e solo se, esiste un k-ciclo per ϕ. □

Esercizio 4.15. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2 sul corpo C, di caratteristica diversa da 2 e sia $\phi : \mathbb{P}(v) \to \mathbb{P}(V)$ una proiettività.

(a) Se A, B, C è un 3-ciclo per ϕ e P un punto fisso, si mostri che A, B, C, P è una quaterna equianarmonica (cf. `Esercizio VI.4.7`).

(b) Se A, B, C, D è un 4-ciclo per ϕ si verifichi che i quattro punti formano un gruppo armonico. □

Esercizio 4.16. Si considerino i punti P_1, P_2, P_3, P_4 della retta proiettiva, a due, a due distinti. Il *birapporto* $(P_1, P_2, P_3, P_4) := \dfrac{x_1}{x_0}$ è definito dalle condizioni

$$P_1 = \sigma\langle v_1\rangle, \quad P_2 = \sigma\langle v_0\rangle, \quad P_3 = \sigma\langle v_0 + v_1\rangle, \quad P_4 = \sigma\langle x_0 v_0 + x_1 v_1\rangle.$$

Dati i punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ di coordinate omogenee

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

si calcolino i birapporti (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) e (Q_1, Q_2, Q_4, Q_3). □

Esercizio 4.17. Nella retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ si considerino le due coppie di punti

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino due punti X ed Y (eventualmente in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) che separino armonicamente entrambo le coppie, ovvero tali che $(X, Y, P, P') = (X, Y, Q, Q') = -1$. □

Esercizio 4.18. Sia $\phi : \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ una proiettività. Si dice che due punti $P \neq Q$ di $\mathbb{P}^1(C)$ formano una *coppia involutoria* rispetto a ϕ se $\phi(P) = Q$ e $\phi(Q) = P$. Si mostri che una proiettività ϕ è un'involuzione se, e solo se, esiste una coppia involutoria rispetto a ϕ. □

Esercizio 4.19. Nella retta proiettiva reale $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, si considerino tre punti, a due a due distinti, $P = \sigma\langle v\rangle$, $P' = \sigma\langle v'\rangle$ e $Q = \sigma\langle w\rangle$ e sia $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma quadratica che si annulli esattamente su $\langle v\rangle$ e $\langle v'\rangle$.

(a) Diremo che un punto $Q' = \sigma\langle w'\rangle$, distinto dai precedenti, è dalla stessa parte di Q, rispetto alla coppia P, P' se $(P, P', Q, Q') > 0$.

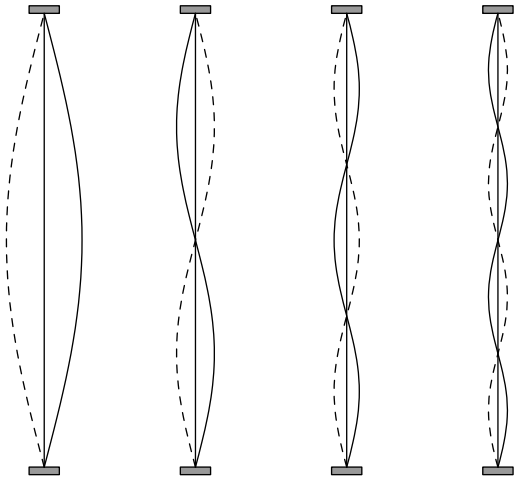
(b) Diremo che un punto $Q' = \sigma\langle w'\rangle$, distinto dai precedenti, è dalla stessa parte di Q, rispetto alla coppia P, P' se $q(w)q(w') > 0$.

Si mostri che le condizioni (a) e (b) sono equivalenti. □

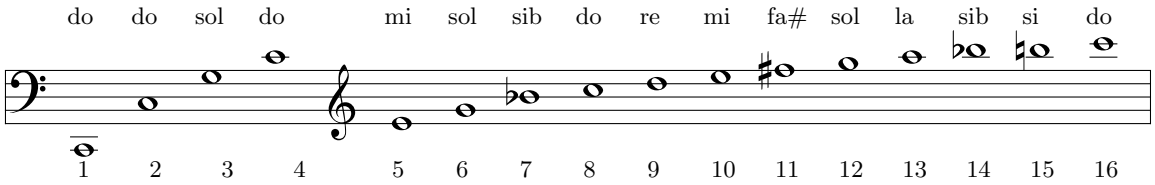
4.7 Gruppi armonici e scale musicali. Il nome di gruppo armonico (o quaterna armonica) dato a quattro punti allineati che abbiano birapporto -1, ha un'origine legata al problema della determinazione degli intervalli musicali. Qui sotto vogliamo accennare brevemente a questo argomento.

I suoni musicali sono caratterizzati dalla loro altezza, dall'intensità e dal timbro, e fin dall'antichità si è posto il problema di individuare quali siano i rapporti "armonici" tra le diverse altezze delle note musicali. I suoni musicali sono prodotti da vibrazioni e la loro altezza coincide con la frequenza della vibrazione. Nel caso delle corde vibranti, l'intensità del suono è proporzionale all'ampiezza della vibrazione, mentre la frequenza, f, è inversamente proporzionale alla lunghezza della corda stessa. Ovvero $f = k/l$, dove la costante di proporzionalità, k, dipende dal materiale, dallo spessore e dalla tensione della corda.

Un primo tentativo di determinare questi rapporti nasce dall'osservazione degli "armonici" prodotti dalle corde vibranti. Se appoggiamo delicatamente un dito nel punto medio di una corda, forziamo la corda a vibrare al doppio della frequenza rispetto alla corda libera, così come, ponendo un dito ad un terzo della lunghezza, forziamo la corda a vibrare al triplo della frequenza "fondamentale" e, così via.



In questo modo si genera una successione di suoni armonici, di frequenza sempre più elevata (e di intensità sempre più debole). Se la nota fondamentale è un *do*, la successione dei suoni armonici è la seguente:

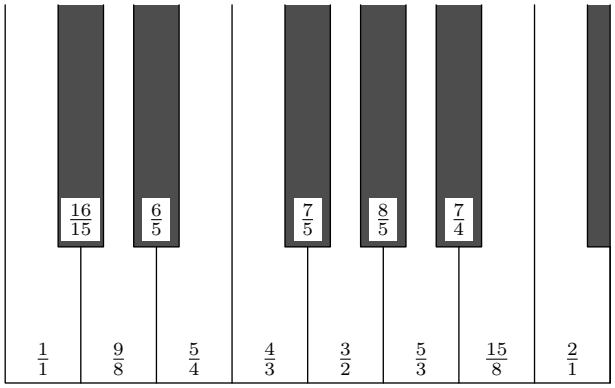


Si possono quindi definire gli intervalli fondamentali della scala guardando ai *rapporti* tra queste frequenze. Il primo intervallo fondamentale che osserviamo è l'*ottava* (do-do superiore), che si ha quando raddoppia la

frequenza delle vibrazioni, come si vede osservando le coppie di note in posizione 1-2, 2-4, 4-8, 8-16. Un altro rapporto fondamentale è l'intervallo di *quinta giusta* (do-sol) che si ha quando le frequenze sono nel rapporto di 3/2, come si vede osservando le coppie 2-3, 4-6, 8-12. Analogamente, l'intervallo di *terza maggiore* (do-mi), si ha quando le frequenze sono nel rapporto di 5/4 (vedi le coppie 4-5 ed 8-10).

Costruire una *scala musicale* significa fissare la successione dei rapporti delle varie frequenze con la frequenza fondamentale e, da Pitagora in poi, per lungo tempo, si è cercato di farlo fissando dei rapporti razionali (cioè in $\mathbb{Q}$) tra le frequenze della scala.

La "classica" scala armonica (attribuita a Tolomeo e riveduta da Zarlino) utilizzava i seguenti rapporti con la frequenza fondamentale



Ricordando che le lunghezze delle corde stanno nel rapporto inverso rispetto alle frequenze, si trova che la nota fondamentale e la quinta, separano armonicamente lo 0 e la terza maggiore, ovvero si ha

$$(0, \tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{3}, 1) = -1 \quad [do - mi - sol, \text{accordo di Do maggiore (I)}].$$

Analogamente si ha $(0, \frac{8}{15}, \frac{8}{18}, \frac{2}{3}) = -1$ [accordo di Sol maggiore (V)] e $(0, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = -1$ [accordo di Fa maggiore (IV)].

Questa relazione si può anche esprimere dicendo che la lunghezza della corda corrispondente alla terza maggiore è la *media armonica* delle lunghezze delle corde relative alla nota fondamentale ed alla quinta giusta, ove la media armonica tra due numeri a e b è l'inverso della media degli inversi dei numeri stessi, ovvero $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Questa sistemazione non è però completamente soddisfacente perché, ad esempio, passando dalla scala di DO ad un'altra scala sarebbe necessario accordare diversamente lo strumento se si volessero mantenere i rapporti stabiliti tra la nuova frequenza fondamentale e le altre note della scala. Inoltre, non è vero che le relazioni stabilite siano vere per tutti gli accordi maggiori, ad esempio si ha $(0, \frac{5}{7}, \frac{3}{5}, \frac{8}{9}) = -\frac{33}{32} \neq -1$ [re-fa#-la, accordo di Re maggiore][(*)]. Questo portava a definire dei rapporti di "vicinanza" o "lontananza" tra le varie scale.

Il problema ha trovato una sistemazione con l'introduzione della cosiddetta *scala temperata* che rinuncia a scegliere rapporti razionali tra le frequenze ad eccezione dell'ottava. Si pone infatti che il rapporto tra le frequenze di due note successive sia sempre uguale ad una stessa costante K, ovvero

$$\frac{do\#}{do} = \frac{re}{do\#} = \frac{re\#}{re} = \cdots = \frac{si}{la\#} = \frac{do\,sup}{si} = K$$

e quindi, essendo $\frac{do\,sup}{do} = 2$ (ottava), si ha $K^{12} = 2$, ovvero $K = \sqrt[12]{2} \sim 1.05946$.

(*) Si osservi che il quarto armonico dopo $\frac{3}{5}$, $\frac{8}{9}$ e 0 è $\frac{48}{67}$ e quindi la differenza tra i rapporti di frequenze è $\frac{7}{5} - \frac{67}{48} = \frac{1}{240}$. Occorre un orecchio sensibile per cogliere queste sfumature.

5. Complementi

Raccogliamo in questa sezione alcuni risultati sullo spazio proiettivo al fine di approfondirne la conoscenza.

Tutte le strutture che si pongono sugli spazi vettoriali hanno un corrispettivo "geometrico" nello spazio proiettivo. In questa sezione illustreremo la contropartita geometrica del dato di un'applicazione bilineare su uno spazio vettoriale.

Come abbiamo già osservato parlando di Dualità proiettiva, se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita sul corpo C, gli elementi dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V^*)$, possono essere messi in relazione con gli elementi di $\mathbb{P}(V)$ tramite l'applicazione Δ dell'`Esercizio VI.1.6`. In tal modo gli elementi dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V^*)$ sono gli stessi elementi dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$, ma lo spazio punteggiato di $\mathbb{P}(V^*)$ è formato dagli iperpiani di $\mathbb{P}(V)$, la relazione d'ordine tra gli elementi risulta invertita e le operazioni di intersezione e generazione vengono scambiate tra loro.

Diamo quindi la seguente definizione

5.1 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C. Si chiama *reciprocità* di $\mathbb{P}(V)$ ogni proiettività $\phi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$. Dunque, fissata una soprastante $\phi_0 : V \to V^*$, resta associata a ϕ un'applicazione bilineare non-degenere $g : V \times V \to C$, definita da $g(v, w) := v \circ \phi_0(w)$, per ogni coppia $(v, w) \in V \times V$. Una tale g è determinata da ϕ a meno della moltiplicazione per una costante (cf. `Esercizio VI.1.4`).

Una reciprocità $\phi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$ è una *polarità* (risp. *sistema nullo*) se l'applicazione bilineare associata è simmetrica (risp. alternante).

Sia $\phi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$ una polarità, componendo $\Delta^{-1} : \mathbb{P}(V^*) \to \mathbb{P}(V)$ dopo ϕ, si ottiene un'applicazione (insiemistica) di $\mathbb{P}(V)$ in sé che manda punti su iperpiani e viceversa. Si pone la seguente nomenclatura: se P è un punto di $\mathbb{P}(V)$, l'iperpiano $h = \Delta^{-1}(\phi(P))$ è detto *l'iperpiano polare* o, più brevemente, la *polare* di P, rispetto alla polarità ϕ, mentre P è il *polo* di h rispetto alla polarità ϕ. Più in generale, due elementi dello spazio proiettivo si dicono *coniugati* se uno contiene (o è contenuto ne) l'immagine dell'altro tramite la polarità.

5.2 Proposizione. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C. Una reciprocità $\phi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$ è una polarità oppure un sistema nullo se, e solo se, per ogni coppia di punti P, Q di $\mathbb{P}(V)$, si ha*

$$P \leq \Delta^{-1}(\phi(Q)) \qquad \Rightarrow \qquad Q \leq \Delta^{-1}(\phi(P)). \tag{5.3}$$

In particolare, se $1 + 1 \neq 0$ in C, una tale ϕ è polarità (risp. sistema nullo) se esiste (risp. non esiste) un punto P tale che $P \notin \Delta^{-1}(\phi(P))$.

dim. Siano $P = \sigma\langle v\rangle$ e $Q = \sigma\langle w\rangle$. Allora

$$\Delta^{-1}(\phi(Q)) = \Delta^{-1}(\sigma\,\langle\phi_0(w)\rangle) = \sigma\,\langle\phi_0(w)\rangle^{\perp};$$

quindi $P \leq \Delta^{-1}(\phi(Q))$ se, e solo se, $v \in \langle\phi_0(w)\rangle^{\perp}$, ovvero se, e solo se, $g(v, w) = 0$.

La conclusione discende quindi dal seguente

5.4 Lemma. *Un'applicazione bilineare non-degenere $g : V \times V \to C$, è simmetrica oppure alternante se, e solo se, per ogni coppia di vettori $v, w \in V$, si ha $g(v, w) = 0 \Leftrightarrow g(w, v) = 0$.*

dim. Indichiamo con $\phi_0 : V \to V^*$ l'isomorfismo di spazi vettoriali definito ponendo $v \circ \phi_0(w) = g(v, w)$ per ogni coppia di vettori $(v, w) \in V \times V$. Si indichi con $\phi_0^* : V \to V^*$ l'applicazione trasposta di ϕ_0 (cf. *Proposizione IV.5.9*) e si osservi che la condizione dell'enunciato si scrive nella forma:

$$\begin{aligned} x \in \langle\phi_0^*(v)\rangle^{\perp} \Leftrightarrow & x \circ \phi_0^*(v) = 0 \Leftrightarrow v \circ \phi_0(x) = 0 \Leftrightarrow g(v, x) = 0 \\ \Leftrightarrow & g(x, v) = 0 \Leftrightarrow x \circ \phi_0(v) = 0 \Leftrightarrow x \in \langle\phi_0(v)\rangle^{\perp}. \end{aligned}$$

Quindi, per ogni vettore $v \in V$, esiste una costante $c_v \in C \setminus \{0\}$ tale che $\phi_0^*(v) = c_v\phi_0(v)$; inoltre, per ogni coppia di vettori v e w, si ha

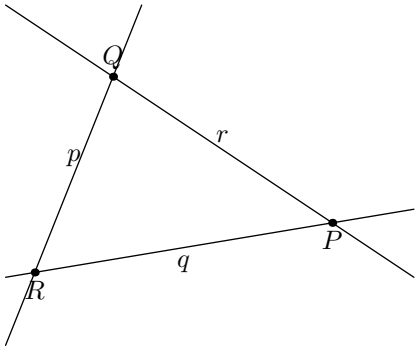
$$c_v\phi_0(v) + c_w\phi_0(w) = \phi_0^*(v) + \phi_0^*(w) = \phi_0^*(v+w) = c_{v+w}\phi_0(v+w) = c_{v+w}\phi_0(v) + c_{v+w}\phi_0(w),$$

da cui si deduce $c_v = c_w = c_{v+w}$, ovvero che esiste un'unica costante $c \neq 0$ tale che $\phi_0^* = c\phi_0$. Da ultimo basta osservare che $\phi_0 = \phi_0^{**} = (c\phi_0)^* = c^2\phi_0$. Da cui si deduce che $c = \pm 1$ e quindi g è simmetrica oppure alternante. **CVD** □

5.5 Remark. Vogliamo fare qualche considerazione sulle polarità del piano proiettivo. Cominciamo con una definizione generale.

5.6 Definizione. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 3$ sul corpo C e $\mathbb{P}(V)$ lo spazio proiettivo ad esso associato. Un *triangolo* (non-degenere) in $\mathbb{P}(V)$ è il dato di tre punti P, Q, R non allineati, detti i *vertici*, e delle tre rette $p = Q \vee R$, $q = P \vee R$, $r = P \vee Q$, dette i *lati* del triangolo.

È chiaro che i tre lati p, q, r di un triangolo (non degenere) sono tre rette che non concorrono ad uno stesso punto e che i lati determinano a loro volta i vertici tramite le relazioni $P = q \cap r$, $Q = p \cap r$, $R = p \cap q$. Possiamo quindi rappresentare graficamente un triangolo nel disegno qui a fianco.



Sia ora $\dim_C V = 3$ e $\phi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$ una reciprocità. Un triangolo (P, Q, R, p, q, r) si dice *autopolare* rispetto a ϕ se si ha $p = \phi(P)$, $q = \phi(Q)$, $r = \phi(R)$. *Si possono caratterizzare le polarità, come le reciprocità per cui esiste un triangolo autopolare.* Si tratta di esplicitare tramite lo spazio V sottostante a $\mathbb{P}(V)$ il significato di triangolo autopolare. Per prima cosa, osserviamo che i vertici di un triangolo, $P = \sigma\langle v\rangle$, $Q = \sigma\langle w\rangle$, $R = \sigma\langle z\rangle$, corrispondono a tre vettori linearmente indipendenti di V e quindi ad una base. Inoltre, se indichiamo con $g : V \times V \to C$ l'applicazione bilineare associata alla reciprocità ϕ, dire che $Q \vee R = p = \phi(P)$, equivale a dire che $g(v, w) = 0 = g(v, z)$. Analogamente da $q = \phi(Q)$ si deduce che $g(w, z) = 0$ e quindi i tre vettori v, w, z formano una base ortogonale dello spazio V rispetto a g. È chiaro che l'esistenza di una base ortogonale è condizione necessaria e sufficiente per concludere che g è un'applicazione bilineare simmetrica, quando la caratteristica del corpo C è diversa da 2.

Le osservazioni qui sopra si possono generalizzare a spazi proiettivi di dimensione maggiore. Gli esercizi che seguono possono essere utili a tal proposito.

Esercizio 5.1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$ e sia $2 \leq k \leq n$. Un $(k+1)$-*edro* di $\mathbb{P}(V)$ è il dato di $k+1$ punti distinti $P_0, \ldots, P_k$, detti i *vertici*, e di $k+1$ elementi distinti di dimensione $k-1$, $p_0, \ldots, p_k$ detti le *facce* (o i *lati*), legati dalle relazioni

$$p_j = P_0 \vee \cdots \vee \hat{P}_j \vee \cdots \vee P_k, \qquad \text{per } j = 0, \ldots, k$$

ove il cappuccio sta ad indicare che il punto sottostante deve essere omesso dalla somma.

Si mostri che, in tal caso, l'elemento $D = P_0 \vee \cdots \vee P_k$ ha dimensione k. □

Esercizio 5.2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n+1$ sul corpo C e sia $\phi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$ una reciprocità. Un $(n+1)$-edro di vertici $P_0, \ldots, P_n$ e lati $p_0, \ldots, p_n$ si dice *autopolare* rispetto a ϕ se $p_j = \phi(P_j)$, per $j = 0, \ldots, n$. Si mostri che, se C ha caratteristica diversa da 2, una reciprocità ϕ è una polarità se, e solo se, esiste un $(n+1)$-edro autopolare rispetto a ϕ. □

Passiamo ora a dimostrare un risultato fondamentale della geometria proiettiva, noto col nome di *Teorema di Desargues* del quale vedremo in seguito alcune conseguenze. Prima di enunciare il teorema, abbiamo bisogno di alcune definizioni.

5.7 Definizione. Siano dati due triangoli (P, Q, R, p, q, r) e (P', Q', R', p', q', r') (cf. *Definizione VI.5.6*) in $\mathbb{P}(V)$, ed una corrispondenza

$$P \mapsto P', \quad Q \mapsto Q', \quad R \mapsto R', \qquad p \mapsto p', \quad q \mapsto q', \quad r \mapsto r',$$

che rispetti le relazioni di inclusione tra lati e vertici.

I due triangoli si dicono *omologici* se i tre punti $p \cap p'$, $q \cap q'$, $r \cap r'$ sono allineati.

I due triangoli si dicono *prospettivi* se le tre rette $P \vee P'$, $Q \vee Q'$, $R \vee R'$ concorrono ad uno stesso punto.

Esercizio 5.3. Sia $\dim_C V = 3$ e si consideri l'applicazione $\Delta : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$ dell'`Esercizio VI.1.6`. Si verifichi che l'immagine tramite Δ di due triangoli prospettivi (risp. omologici) è costituita da due triangoli omologici (risp. prospettivi). □

L'esercizio precedente dice che nel piano proiettivo le due condizioni sono duali. Vogliamo dimostrare il seguente risultato fondamentale.

5.8 Proposizione. [Teorema di Desargues] *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 3$ sul corpo C e sia $\mathbb{P}(V)$ lo spazio proiettivo ad esso associato. Due triangoli in $\mathbb{P}(V)$ sono omologici se, e solo se, sono prospettivi.*

dim. Dimostriamo che due triangoli prospettivi sono necessariamente omologici.

Siano dunque $(P_1, P_2, P_3, p_1, p_2, p_3)$ e $(Q_1, Q_2, Q_3, q_1, q_2, q_3)$ vertici e lati di due triangoli prospettivi e sia P il punto comune alle tre rette $P_1 \vee Q_1$, $P_2 \vee Q_2$, $P_3 \vee Q_3$. Siano quindi $P_1 = \sigma\langle v_1\rangle$, $P_2 = \sigma\langle v_2\rangle$ $P_3 = \sigma\langle v_3\rangle$ e $P = \sigma\langle v\rangle$ ed osserviamo che i tre vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, che possiamo supporre il punto P non appartenente a nessuno dei lati dei due triangoli (perché?) e quindi che ogni elemento dei due triangoli si può esprimere tramite i vettori v_1, v_2, v_3, v[(†)]. Si ha:

$$\begin{array}{lll} p_1 = \sigma\langle v_2, v_3\rangle & Q_1 = \sigma\langle v_1 + \alpha_1 v\rangle & q_1 = \sigma\langle v_2 + \alpha_2 v, v_3 + \alpha_3 v\rangle \\ p_2 = \sigma\langle v_1, v_3\rangle & Q_2 = \sigma\langle v_2 + \alpha_2 v\rangle & q_2 = \sigma\langle v_1 + \alpha_1 v, v_3 + \alpha_3 v\rangle \\ p_3 = \sigma\langle v_2, v_1\rangle & Q_3 = \sigma\langle v_3 + \alpha_3 v\rangle & q_3 = \sigma\langle v_2 + \alpha_2 v, v_1 + \alpha_1 v\rangle \end{array}$$

e quindi possiamo calcolare esplicitamente i tre punti di intersezione $p_1 \cap q_1$, $p_2 \cap q_2$,$p_3 \cap q_3$. Infatti, si ha

$$p_1 \cap q_1 = \sigma[\langle v_2, v_3\rangle \cap \langle v_2 + \alpha_2 v, v_3 + \alpha_3 v\rangle] = \sigma\langle \alpha_3 v_2 - \alpha_2 v_3\rangle,$$

ed analogamente

$$p_2 \cap q_2 = \sigma\langle \alpha_3 v_1 - \alpha_1 v_3\rangle, \qquad p_3 \cap q_3 = \sigma\langle \alpha_2 v_1 - \alpha_1 v_2\rangle.$$

Dunque, i tre punti così determinati sono allineati se, e solo se, i vettori corrispondenti sono linearmente dipendenti e ciò si verifica facilmente osservando che

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0.$$

Dunque i due triangoli sono omologici.

Dimostriamo ora l'implicazione inversa.

Se i due triangoli sono omologici, possiamo trovare dei vettori, v_1, v_2, v_3, w_1, tali che

$$P_1 = p_2 \cap p_3 = \sigma\langle v_1\rangle, \quad Q_1 = q_2 \cap q_3 = \sigma\langle w_1\rangle, \quad p_3 \cap q_3 = \sigma\langle v_2\rangle, \quad p_2 \cap q_2 = \sigma\langle v_3\rangle,$$

(†) In particolare, ciò significa che non è restrittivo supporre $\dim_C V \leq 4$.

ove v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti e, ricordando che $p_2 = P_1 \vee P_3$, $p_3 = P_1 \vee P_2$, $q_2 = Q_1 \vee Q_3$, $q_3 = Q_1 \vee Q_2$, si ha

$$P_2 = \sigma\langle a_2 v_1 + v_2\rangle\,, \quad Q_2 = \sigma\langle b_2 w_1 + v_2\rangle\,, \quad P_3 = \sigma\langle a_3 v_1 + v_3\rangle\,, \quad Q_3 = \sigma\langle b_3 w_1 + v_3\rangle\,.$$

Dire che i triangoli sono omologici, significa

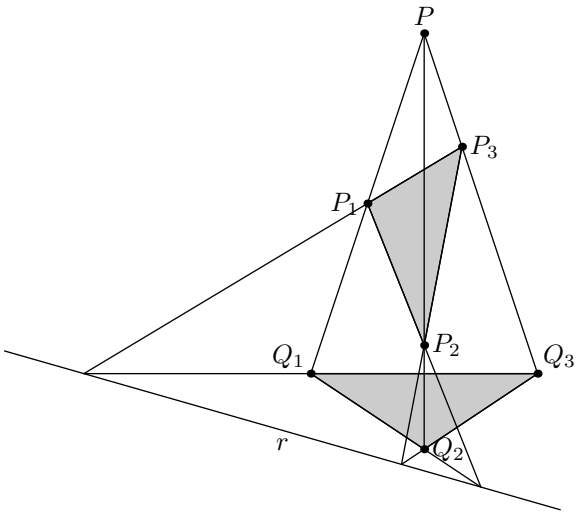
$$p_1 \cap q_1 = (P_2 \vee P_3) \cap (Q_2 \vee Q_3) \leq (p_2 \cap q_2) \vee (p_3 \cap q_3) = \sigma\langle v_2, v_3\rangle\,,$$

ovvero $\langle a_3 v_2 - a_2 v_3\rangle = \langle b_3 v_2 - b_2 v_3\rangle$ e quindi esiste una costante c, tale che $b_2 = ca_2$ e $b_3 = ca_3$. Si conclude che $P_0 = \sigma\langle v_1 - cw_1\rangle \leq (P_1 \vee Q_1) \cap (P_2 \vee Q_2) \cap (P_3 \vee Q_3)$ e quindi i triangoli sono prospettivi. **CVD** □

È chiaro che, nel caso di due triangoli nel piano proiettivo, era sufficiente dimostrare una delle due implicazioni e dedurre l'altra per dualità proiettiva (cf. `Esercizio VI.5.3`).

Vogliamo mostrare ora come si possano trasformare le argomentazioni fatte sui sottospazi dello spazio vettoriale V in considerazioni "geometriche" sugli elementi dello spazio proiettivo. Cominciamo proprio facendo un disegno della situazione descritta nella dimostrazione precedente, disegno a cui ci riferiremo nelle argomentazioni successive

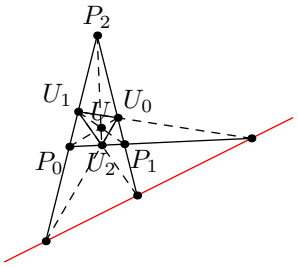
Le considerazioni iniziali ci permettono di affermare che non è restrittivo supporre che tutti gli elementi in questione siano contenuti in uno spazio proiettivo di dimensione 3 ($\dim_C V \leq 4$). I lati $p_1 = P_2 \vee P_3$ e $q_1 = Q_2 \vee Q_3$ sono incidenti perchè sono entrambi contenuti nel piano $P \vee P_2 + P_3$, e lo stesso si può dire delle altre due coppie di lati corrispondenti. Dunque, se i due triangoli sono contenuti in due piani distinti, π e π', l'intersezione tra i due piani è una retta (nello spazio proiettivo tridimensionale) e quindi questa retta $r = \pi \cap \pi'$ deve contenere i punti di intersezione dei lati corrispondenti dei due triangoli, che sono perciò omologici.



Se, invece, i due triangoli sono contenuti in uno stesso piano τ, possiamo scegliere un piano, $\pi \neq \tau$, passante per p_1, ed un punto, C, non appartenente ai due piani e proiettare il triangolo $P_1P_2P_3$ su π dal centro C.

Sia P_1' l'immagine del vertice P_1. Sia P il punto di τ a cui convergono le tre rette $P_1 \vee Q_1$, $P_2 \vee Q_2$, $P_3 \vee Q_3$. La retta $P \vee P_1'$ e la retta $C \vee Q_1$ sono entrambo contenute nel piano $P_1 \vee Q_1 \vee C$ e quindi si intersecano in un punto Q_1'. Preso il piano $\pi' = q_1 \vee Q_1'$, la proiezione da C del triangolo $Q_1Q_2Q_3$ su π' determina un triangolo prospettivo con $P_1'P_2P_3$ ed i due triangoli sono omologici perché giacciono su piani diversi. Poichè le proiezioni conservano gli allineamenti, dovevano essere omologici anche i triangoli di partenza.

⋆Esercizio 5.4. Sia P_0, P_1, P_2, U un riferimento nel piano proiettivo, $\mathbb{P}(V)$, associato alla base $\{v_0, v_1, v_2\}$, e siano $p_0 = P_1 \vee P_2$, $p_1 = P_0 \vee P_2$, $p_2 = P_1 \vee P_0$ i lati del triangolo fondamentale. Si indichi con U_i, $i = 0, 1, 2$, la proiezione del punto unità, U, dal punto P_i al lato opposto. Si osservi che i triangoli P_0, P_1, P_2 ed U_0, U_1, U_2 (nell'ordine) sono omologici e si indichi con u la retta congiungente le intersezioni dei lati corrispondenti. Si verifichi che $\Delta p_0, \Delta p_1, \Delta p_2, \Delta u$ è un riferimento nel piano duale, associato alla base duale $\{v_0^*, v_1^*, v_2^*\}$ di V^*. □

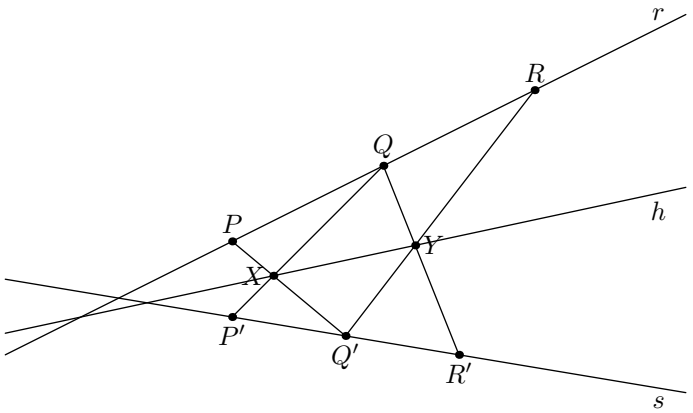


⋆Esercizio 5.5. Sia fissata una polarità del piano proiettivo.
(a) Si mostri che, se due coppie di vertici opposti di un quadrilatero piano completo sono tra loro coniugate, allora anche la terza coppia lo è [Teorema di Hesse].
(b) Si enunci l'asserto duale del punto (a).
(c) Siano P_1, P_2, P_3 i vertici di un triangolo e siano P_1', P_2', P_3' i vertici del triangolo polare (ovvero P_i' è il polo del lato $P_j \vee P_k$, con $i \neq j \neq k \neq i$, per $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$). Si mostri che i due triangoli sono prospettivi [Teorema di Chasles]. □

Ora ci interessa mostrare un facile risultato sulla "natura geometrica" delle proiettività tra rette.

5.9 Proposizione. *Siano r ed s due rette del piano proiettivo $\mathbb{P}^2(C)$. Ogni proiettività di r su s è composizione di non più di tre proiezioni tra rette del piano.*

dim. Sia $\pi : r \to s$ la proiettività e supponiamo che le due rette siano distinte. Consideriamo un riferimento $\{P, Q, R\}$ sulla retta r, ove nessuno dei tre punti coincida con $H = r \cap s$, e siano P', Q', R' i punti di s corrispondenti tramite π ai punti del riferimento. Poichè π è una proiettività, i tre punti sono a due a due distinti.



Tenendo d'occhio il disegno qui sopra, si considerino le rette $Q \vee P'$, $Q \vee R'$ e $Q' \vee P$, $Q' \vee R$ e quindi i punti $X = (P \vee Q') \cap (P' \vee Q)$ ed $Y = (Q \vee R') \cap (Q' \vee R)$. I due punti X ed Y sono distinti, e determinano quindi una retta $h = X \vee Y$. Vogliamo dimostrare che π coincide con la composizione della proiezione di r su h con centro Q' seguita dalla proiezione di h su s di centro Q. Per fare ciò, basta verificare che π e l'applicazione composta coincidono su un riferimento ed infatti, componendo le proiezioni, si ha che le immagini di P Q ed R sono

$$\{Q \vee [(Q' \vee P) \cap h]\} \cap s = (Q \vee X) \cap s = P', \qquad \{Q \vee [(Q' \vee Q) \cap h]\} \cap s = (Q' \vee Q) \cap s = Q',$$
$$\{Q \vee [(Q' \vee R) \cap h]\} \cap s = (Q \vee Y) \cap s = R'.$$

Ciò dimostra la tesi quando $r \neq s$. Nel caso in cui si consideri una proiettività $\pi' : r \to r$, basta prendere una retta $s \neq r$ e considerare la proiettività che si ottiene facendo seguire a π' la proiezione di r su s da un qualunque punto esterno alle due rette. Applicando alla proiettività composta il ragionamento precedente si arriva alla conclusione in ogni caso. **CVD** □

La retta h, della dimostrazione precedente, è detta l'*asse di collineazione* della proiettività π.

Esercizio 5.6. Sia $\pi : r \to s$ una proiettività tra due rette distinte del piano proiettivo. Mantenendo le notazioni della dimostrazione precedente, si considerino i punti $H = r \cap s$, $H' = h \cap r$ ed $H'' = h \cap s$. Si mostri che $H = \pi H'$ ed $H'' = \pi H$ e si concluda che, nel caso in cui i tre punti siano distinti la retta $h = H' \vee H''$, non dipende dalla scelta di un riferimento su r, ma solo dalla proiettività π. □

Esercizio 5.7. Sia $\pi : r \to s$ una proiettività tra due rette distinte del piano proiettivo e sia $H = r \cap s$. Si mostri che π è una proiezione se, e solo se, $H = \pi H$.

Si verifichi che, anche in questo caso, la retta h, non dipende dalla scelta di un riferimento su r, ma solo dalla proiettività π. □

Esercizio 5.8. Siano r ed s due rette distinte del piano proiettivo e si considerino tre punti, a due a due distinti, P, Q, R su r e tre punti, a due a due distinti, P', Q', R' su s. Si mostri che i tre punti $X = (P \vee Q') \cap (P' \vee Q)$, $Y = (P \vee R') \cap (P' \vee R)$ e $Z = (R \vee Q') \cap (R' \vee Q)$ sono allineati. □

Il risultato che abbiamo appena visto nella *Proposizione VI.5.9* è solo un caso particolare di un fatto generale che mostra la natura "geometrica" delle proiettività.

5.10 Teorema. [Teorema fondamentale sulle proiettività(†)] *Siano A e B due elementi di dimensione k, di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$, di dimensione $n \geq 2$, ove $k < n$. Allora ogni proiettività $f : A \to B$ si ottiene componendo al più $k + 2$ di proiezioni da punti di $\mathbb{P}(V)$.*

dim. Per prima cosa osserviamo che, componendo eventualmente con una proiezione, possiamo sempre supporre che A e B siano due iperpiani distinti in uno spazio proiettivo di dimensione $k + 1$. Sia quindi $N \leq A \cap B$ l'elemento costituito dai punti $P \leq A$ tali che $f(P) = P$. Indicata con $k - i$ la dimensione di N, ove $1 \leq i \leq k + 1$, dimostriamo, per induzione su i, che $f : A \to B$ è prodotto di i proiezioni da punti di $\mathbb{P}(V)$.

Se $i = 1$, $N = A \cap B$ e possiamo prendere un riferimento $P_0, \ldots, P_n, U$ su A in modo che $N = P_0 \vee \cdots \vee P_{n-1}$. Allora, le rette $P_n \vee f(P_n)$ ed $U \vee f(U)$ si intersecano in un (unico) punto, S, di $\mathbb{P}(V)$, perché contenute in uno stesso piano, ed S non può appartenere né ad A, né a B. Infatti, se $S \leq A$, allora $f(P_n) \leq P_n \vee S \leq A$, e quindi $f(P_n) \leq A \cap B$ contro le ipotesi. Analogamente si ragiona se $S \leq B$ e si conclude che f coincide con la proiezione di centro S su un riferimento di A.

Se $i > 1$, supponiamo vera la tesi per $i - 1$, e fissiamo un punto Q di A, che non sia contenuto, né in $A \cap B$, né in $f^{-1}(A \cap B)$. Posto $N' = Q \vee N$, osserviamo che, per quanto visto nel caso $i = 1$, la restrizione di f ad N', $f_{|N'} : N' \to N \vee f(Q)$, è una proiezione di centro un punto S che non appartiene né ad A né a B. Dunque, fissato un iperpiano B', diverso da A, che contenga N', ma non contenga S, la proiezione di centro S determina una proiettività $g : B \to B'$ e l'applicazione composta, $g \circ f : A \to B'$ è quindi una proiettività che ha come punti uniti tutti i punti di N'. Essendo $\dim N' = \dim N + 1 = n - i + 1$, possiamo applicare l'ipotesi induttiva a $g \circ f$ e concludere. **CVD** □

Esercizio 5.9. Si consideri la retta proiettiva reale $\mathbb{P}(\mathbb{C})$, ove $\mathbb{C}$ è il corpo dei numeri complessi, considerato come spazio vettoriale reale. Dato un numero complesso $\alpha \neq 0$, si indichi con ϕ_α la proiettività di $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ determinata dall'applicazione lineare

$$\begin{aligned} f_\alpha : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \alpha z \end{aligned}$$

(a) Fissato il riferimento $\{\langle 1\rangle, \langle i\rangle, \langle 1 + i\rangle\}$(*) in $\mathbb{P}(\mathbb{C})$, si scriva la matrice di ϕ_{2i-3}.
(b) È vero o falso che ogni proiettività di $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ è del tipo ϕ_α per qualche $\alpha \in \mathbb{C}$? □

Esercizio 5.10. Si consideri l'applicazione δ che ad una coppia di punti $(A, B) = \left(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ associa l'applicazione proiettiva $\lambda_{(A,B)} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, di matrice

$$\begin{pmatrix} -a_0b_1 - a_1b_0 & 2a_0b_0 \\ -2a_1b_1 & a_0b_1 + a_1b_0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si mostri che $\lambda_{(A,B)}$ è una proiettività se, e solo se, $A \neq B$.

(†) Questo Teorema dà una precisa caratterizzazione *geometrica* delle proiettività e viene talvolta indicato come *Teorema Fondamentale della Geometria Proiettiva*. Questa indicazione veniva usata in una versione precedente di queste note. Il nome di *Teorema Fondamentale* viene però utilizzato anche per il successivo *Teorema VI.6.5*, che caratterizza le applicazioni biunivoche di uno spazio proiettivo in sé che conservano (le dimensioni) e gli allineamenti. Ho preferito allinearmi a quest'ultima convenzione, che appare essere la più diffusa (ad esempio su Internet).

(*) Col simbolo $\langle z\rangle$ si indica il sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{C}$ generato dal numero complesso z.

(b) Fissata la coppia (A, B) con $A \neq B$, si mostri che $\lambda_{(A,B)} \neq 1_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})} = \lambda^2_{(A,B)}$, ove $1_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$ indica la proiettività identica. Si mostri inoltre che A e B sono gli unici punti X di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tali che $\lambda_{(A,B)}(X) = X$.

(c) Si mostri che due coppie di punti distinti (A, B) e (C, D) hanno la stessa immagine tramite δ se, e solo se, $\{A, B\} = \{C, D\}$. □

Esercizio 5.11. Dati quattro punti della retta proiettiva $\mathbb{P}^1(C)$, $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$, a due a due distinti, si scriva esplicitamente il birapporto (A, B, X, Y) in funzione delle coordinate omogenee dei quattro punti.

Fissati due punti distinti A e B della retta proiettiva $\mathbb{P}^1(C)$, si mostri che la corrispondenza che ad un punto $X \notin \{A, B\}$ associa il punto X' tale che $(A, B, X, X') = -1$ si estende ad una proiettività di $\mathbb{P}^1(C)$ e si scriva una matrice di tale proiettività in funzione delle coordinate omogenee dei punti A e B. □

Esercizio 5.12. Si consideri l'applicazione $\delta : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ definita ponendo

$$\delta\left(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a_0b_0 \\ a_0b_1 + a_1b_0 \\ 2a_1b_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Indicate con $\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ le coordinate omogenee dei punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, si scriva l'equazione omogenea della conica $\mathcal{C}$ il cui supporto contiene tutti i punti del tipo $\delta(P, P)$, al variare di $P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

(b) Fissati comunque due punti distinti A e B di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, si mostri che la retta $\delta(A, A) \vee \delta(B, B)$ è la polare rispetto a $\mathcal{C}$ del punto $\delta(A, B)$.

(c) Fissate due coppie di punti distinti (A, B) ed (X, Y) in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, si mostri che il punto $\delta(X, Y)$ appartiene alla polare di $\delta(A, B)$ se, e solo se, $(A, B, X, Y) = -1$ (ovvero la coppia (A, B) separa armonicamente la coppia (X, Y)). □

Esercizio 5.13. Sia t un numero complesso con parte immaginaria positiva e si consideri il punto P della retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ di coordinate omogenee $(t, 1)$. Si indichi con $\bar{P}$ il punto di coordinate $(\bar{t}, 1)$.

(a) Si mostri che l'insieme H dei punti $(u, 1)$ di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tali che $\mathrm{Im}(u) > 0$ è un disco di centro P nella retta affine complessa ottenuta scegliendo il punto $\bar{P}$ come iperpiano improprio.

(b) Si determini un riferimento proiettivo $\{\bar{P}, P, U\}$ affinchè il disco in questione abbia raggio 1. □

Esercizio 5.14. Sia $\mathscr{H} = \left\{ A \in M_{n+1}(\mathbb{C}) \mid {}^tA = \overline{A} \right\}$ e si consideri l'applicazione $\varphi : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \to \mathscr{H}$ che associa al punto X, di coordinate omogenee $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ con $\sum_{i=0}^{n} |x_i|^2 = 1$, la matrice $A_X = (x_i\overline{x}_j)_{0 \leq i,j \leq n}$.

Si mostri che

(a) l'applicazione φ è ben definita.

(b) l'applicazione φ è equivariante rispetto all'azione del gruppo unitario ovvero $\varphi(\sigma X) = \sigma A_X \sigma^{-1}$. □

5.11 Osservazione. Abbiamo visto come lo spazio affine (reale) si possa immergere nello spazio proiettivo della stessa dimensione scegliendo un iperpiano e come i vettori del sottospazio vettoriale corrispondente a tale iperpiano determinino le traslazioni dello spazio affine. Porre la metrica euclidea nello spazio affine (immerso) significa porre una forma quadratica definita positiva sullo spazio vettoriale delle traslazioni. Una forma quadratica (ovvero un polinomio omogeneo di secondo grado) determina, come vedremo nel capitolo VII, una quadrica i cui punti sono gli zeri della forma quadratica, ovvero i vettori isotropi rispetto all'applicazione bilineare simmetrica associata alla forma quadratica. Nel caso della metrica euclidea, la quadrica corrispondente alla forma quadratica definita positiva è detta l'*assoluto* dello spazio euclideo ed i punti di tale quadrica sono detti i *punti ciclici* che sono tutti punti a coordinate complesse non-reali. Si può verificare che le isometrie del piano euclideo (immerso) sono affinità che lasciano invariato l'assoluto, cioè trasformano punti dell'assoluto in punti dell'assoluto.

Le rette (proprie) dello spazio euclideo che contengono un punto dell'assoluto sono dette le *rette isotrope*.

Nel caso del piano affine, l'iperpiano improprio è una retta e l'assoluto consiste in due punti complessi coniugati. Invitiamo il lettore a svolgere qualche esercizio sull'argomento.

Esercizio 5.15. Si consideri il piano euclideo (reale) immerso nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con la scelta della retta impropria di equazione $x_0 = 0$ e di modo che le coordinate affini $X = \frac{x_1}{x_0}$ ed $Y = \frac{x_2}{x_0}$ siano riferite ad una base ortonormale dei vettori del piano euclideo.
(a) Determinare le coordinate omogenee dei punti ciclici.
(b) Caratterizzare le proiettività che trasformano punti ciclici in punti ciclici.
(c) Che relazioni ci sono tra le proiettività del punto precedente e le isometrie del piano euclideo. □

*Esercizio 5.16. Siano r ed s due rette del piano euclideo, passanti per uno stesso punto P, e sia $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ l'angolo tra le due rette. Indicate con j e $\overline{j}$ le due rette isotrope per P, si mostri che si ha

$$\frac{1}{2i}\log(j, \overline{j}, r, s) = \pm\vartheta \qquad [\textit{Teorema di Laguerre}]$$

ove log indica la determinazione del logaritmo complesso con parte immaginaria a valori in $[-\pi, \pi]$. □

Esercizio 5.17. *Siano r ed s due rette non parallele del piano euclideo ed indichiamo con c_1 e c_2 le rette isotrope del fascio $\mathscr{F}$, determinato da r ed s. Data una retta x del fascio $\mathscr{F}$, indicheremo con $x^\perp$ la retta ortogonale appartenente allo stesso fascio.*
(a) Se x è una retta del fascio $\mathscr{F}$, si mostri che $(c_1, c_2, r, x) = -(c_1, c_2, r, x^\perp)$.
(b) Si determinino le rette h del fascio $\mathscr{F}$ tali che $(c_1, c_2, r, h)(c_1, c_2, s, h) = 1$ e si osservi che, se h è una soluzione di tale problema, anche $h^\perp$ lo è.
(c) Dette h_1 ed h_2 le rette soddisfacenti alla condizione precedente, si verifichi che $(r, s, h_1, h_2) = -1$.

Svolgimento. I birapporti tra le rette coincidono con i birapporti tra i corrispondenti punti impropri, che indicheremo con la lettera maiuscola corrispondente al nome della retta.

(a). Scegliendo un riferimento ortonormale del piano euclideo che abbia r come asse delle ascisse, possiamo quindi supporre che i punti impropri delle rette in questione abbiano coordinate

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad X^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi

$$(c_1, c_2, r, x) = -\frac{x_1 + ix_0}{x_1 - ix_0} \qquad \text{e} \qquad (c_1, c_2, r, x^\perp) = \frac{-i(x_0 - ix_1)}{i(x_0 + ix_1)} = \frac{x_1 + ix_0}{x_1 - ix_0}$$

che è quanto dovevamo verificare.

(b). Nelle ipotesi del punto precedente possiamo supporre che i punti impropri delle rette s ed h abbiano coordinate

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ s_0 \\ s_1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ h_1 \end{pmatrix},$$

e quindi si ha

$$(c_1, c_2, r, h) = -\frac{h_1 + ih_0}{h_1 - ih_0} \qquad \text{e} \qquad (c_1, c_2, s, h) = \frac{(s_1 - is_0)(h_1 + ih_0)}{(s_1 + is_0)(h_1 - ih_0)}.$$

Dunque, la condizione $(c_1, c_2, r, h)(c_1, c_2, s, h) = 1$ è equivalente a

$$(s_1 - is_0)(h_1 + ih_0)^2 = -(s_1 + is_0)(h_1 - ih_0)^2, \qquad \text{ovvero} \qquad s_1h_1^2 + 2s_0h_1h_0 - s_1h_0^2 = 0$$

le cui soluzioni sono i due punti impropri

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ s_1 \\ -s_0 + \sqrt{s_0^2 + s_1^2} \end{pmatrix}, \qquad \text{ed} \qquad H_2 = H_1^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ s_1 \\ -s_0 - \sqrt{s_0^2 + s_1^2} \end{pmatrix}.$$

(c). Possiamo concludere con un calcolo diretto

$$(r, s, h_1, h_2) = \frac{(-s_0 + \sqrt{s_0^2 + s_1^2})(-s_0^2 - s_0\sqrt{s_0^2 + s_1^2} - s_1^2)}{(-s_0 - \sqrt{s_0^2 + s_1^2})(-s_0^2 + s_0\sqrt{s_0^2 + s_1^2} - s_1^2)} = \frac{-s_1^2\sqrt{s_0^2 + s_1^2}}{s_1^2\sqrt{s_0^2 + s_1^2}} = -1.$$

Fine del calcolo[(†)]. □

Esercizio 5.18. Nel piano proiettivo reale si considerino i punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini una retta r affinché i quattro punti siano i vertici di un parallelogramma del piano affine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\backslash r$.
(b) Si determinino due punti C e $\overline{C}$ di r affinché il quadrilatero $P_1P_2P_3P_4$ sia un quadrato per la metrica euclidea sul piano affine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus r$ che ha C e $\overline{C}$ come punti ciclici. □

Esercizio 5.19. Nello spazio euclideo tridimensionale, immerso nel modo usuale in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, si consideri il quadrilatero $P_1P_2P_3P_4$, contenuto nel piano $\pi : z = 0$, avente come vertici i punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

e come lati le rette

$$\ell_1 = \begin{cases} 4y - x + 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \ell_2 = \begin{cases} 2y + x - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \ell_3 = \begin{cases} 2y - x + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \ell_4 = \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Sia dato inoltre il piano $\sigma : x - y + 2z = 2$.

(a) Si dica se esistono dei punti P dello spazio euclideo tali che, proiettando π su σ dal centro P, il quadrilatero dato abbia come immagine un parallelogramma. In caso affermativo si determinino tutti i punti P soddisfacenti a questa condizione.
(b) Siano $P_5 = \ell_1 \cap \ell_3$, $P_6 = \ell_2 \cap \ell_4$ ed $r = P_5 \vee P_6$. Detti $D_1 = (P_1 \vee P_3) \cap r$ e $D_2 = (P_2 \vee P_4) \cap r$, si determinino (se esistono) due punti C e $\overline{C}$ della retta r, per cui si abbia $(C, \overline{C}, P_5, P_6) = -1 = (C, \overline{C}, D_1, D_2)$.
(c) Si dica infine se esiste un punto P dello spazio euclideo tale che, proiettando π su σ dal centro P, il quadrilatero dato abbia come immagine un quadrato. □

5.12 Osservazione. Ricordiamo che il piano affine reale $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ si identifica con la retta affine complessa $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$, facendo corrispondere al punto di coordinate $\binom{x}{y}$ il numero complesso $z = x + iy$ e, in questa corrispondenza, le affinità della retta complessa corrispondono a particolari Affinità del piano reale; infatti alla trasformazione $z \mapsto \alpha z + \beta$, con $\alpha = a + ib$ e $\beta = p + iq$ corrisponde l'affinità del piano

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Passando agli spazi proiettivi, non è più vero che $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sia uguale a $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

(†) Il lettore più attento avrà notato che, in base al *Teorema di Laguerre*, le rette h_1 ed h_2 sono le bisettrici degli angoli formati da r ed s ed abbiamo quindi verificato che le bisettrici sono tra loro perpendicolari (cioè separano armonicamente le rette isotrope) e che separano armonicamente le rette r ed s. Queste condizioni possono essere prese come una caratterizzazione delle bisettrici.

6. Collineazioni. Teorema Fondamentale della Geometria Proiettiva

Progredendo nello studio dello spazio proiettivo, abbiamo visto come la struttura vettoriale, che era servita da base alle definizioni, abbia lasciato il posto a considerazioni "geometriche", legate a proprietà di allineamento o di incidenza tra punti e rette. Vi sono motivi di natura storica per questo fatto, dato che gli spazi proiettivi hanno costituito motivo di interesse (per matematici e non) molto prima che venissero in evidenza le strutture e gli argomenti di algebra lineare che hanno pervaso la trattazione qui svolta. D'altra parte, ciò mostra come il ruolo dell'algebra lineare sia diventato sempre più rilevante nel comprendere la geometria dello spazio al punto da assumere un valore a se stante e diventare il nucleo su cui costruire le teorie geometriche. In questo capitolo, vorremmo caratterizzare (dal punto di vista algebrico) le trasformazioni più 'semplici' che rispettino la struttura geometrica dello spazio proiettivo. A queste trasformazioni richederemo che siano applicazioni biiettive tra i punti, che rispettino le relazioni di 'inclusione', ovvero che quando un punto appartiene ad una retta (o ad un elemento di dimensione superiore) allora l'immagine del punto sia contenuta nell'immagine della retta (o dell'elemento di dimensione superiore) ed infine che rispettino le condizioni di allineamento tra i punti dello spazio proiettivo ovvero che punti allineati vadano in punti allineati (cioè che mandino rette in rette, piani in piani ecc.). Queste condizioni le richiederemo per spazi proiettivi di dimensione maggiore di 1; sulla retta proiettiva, tutte le biiezioni tra punti soddisfano a queste condizioni e vedremo che sarà naturale porre una condizione un po' più restrittiva. Sappiamo da quanto visto finora, che le proiettività sono trasformazioni che soddisfano a tutte queste condizioni. Non sono però, in generale, le sole trasformazioni che soddisfano a queste condizioni.

Cominciamo questo capitolo con un risultato sulle trasformazioni tra rette proiettive reali, che facciamo precedere da un facile lemma.

6.1 Lemma. *Siano $r = \mathbb{P}(V)$ ed $r' = \mathbb{P}(V')$ due rette proiettive sul campo C ed $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ un'applicazione che mandi il vuoto proiettivo nel vuoto, σV su $\sigma V'$, e che conservi i birapporti, ovvero, dati quattro punti P, Q, R, S di r, si abbia $(P, Q, R, S) = (f(P), f(Q), f(R), f(S))$. Allora f è una proiettività di r su r'.*

dim. Sia fissato un riferimento P_∞, P_0, P_1 sulla retta r e sia $\{v_\infty, v_0\}$ una base di V associata al riferimento. Siano $Q_\infty = f(P_\infty)$, $Q_0 = f(P_0)$, $Q_1 = f(P_1)$ sulla retta r' che, per le ipotesi fatte, formano un riferimento su tale retta e sia $\{w_\infty, w_0\}$ una base di V' associata al riferimento. Allora, esiste un'unica applicazione lineare $\phi : V \to V'$ tale che $\phi(v_0) = w_0$ e $\phi(v_\infty) = w_\infty$ ed è un isomorfismo, dato che l'immagine di una base di V è una base di V'. Dobbiamo quindi dimostrare che ϕ è una soprastante per f. Dato un punto $P = \sigma\langle v\rangle$ di r, sia $v = x_\infty v_\infty + x_0 v_0$, e quindi $(P_\infty, P_0, P_1, P) = \frac{x_\infty}{x_0}$. Posto, $Q = \sigma\langle\phi(v)\rangle = \sigma\langle x_\infty w_\infty + x_0 w_0\rangle$, si ha quindi

$$(Q_\infty, Q_0, Q_1, Q) = \frac{x_\infty}{x_0} = (P_\infty, P_0, P_1, P) = (Q_\infty, Q_0, Q_1, f(P)).$$

Si conclude quindi che $f(P) = Q = \sigma\langle\phi(v)\rangle$ e dunque che f è una proiettività di soprastante ϕ. **CVD** □

Enunciamo dunque il risultato annunciato sulle trasformazioni tra rette proiettive reali.

6.2 Proposizione. [von Staudt] *Siano $r = \mathbb{P}(V)$ ed $r' = \mathbb{P}(V')$ due rette proiettive sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali ed $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ un'applicazione suriettiva che mandi il vuoto proiettivo nel vuoto, σV su $\sigma V'$, e che conservi i gruppi armonici, ovvero, dati quattro punti P, Q, R, S di r, con $(P, Q, R, S) = -1$, si ha $(f(P), f(Q), f(R), f(S)) = -1$. Allora f è una proiettività di r su r'.*

dim. Sia fissato un riferimento P_∞, P_0, P_1 sulla retta r e siano $Q_\infty = f(P_\infty)$, $Q_0 = f(P_0)$, $Q_1 = f(P_1)$ i punti corrispondenti sulla retta r' che, per le ipotesi fatte, formano un riferimento su tale retta. In corrispondenza ad f, possiamo definire un'applicazione $\alpha : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, tale che $\alpha(\infty) = \infty$,

$\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$. Dato $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, sia P_x quell'unico punto di r tale che $(P_\infty, P_0, P_1, P_x) = x$ e poniamo $\alpha(x) = (Q_\infty, Q_0, Q_1, f(P_x))$.

Vogliamo mostrare che α è l'identità, cosicché il Lemma precedente ci permette di concludere; per fare ciò mostreremo che α è un isomorfismo di corpi e, dato che $\mathbb{R}$ non possiede isomorfismi non banali, ciò ci permette di concludere per le rette proiettive reali.

Sia $x \neq 0$, e si osservi che $(0, 2x, x, \infty) = -1$ (cf. `Esercizio VI.4.4`); allora, si ha

$$(0, \alpha(2x), \alpha(x), \infty) = -1, \qquad \text{ovvero} \qquad \alpha(x) = \alpha(2x) - \alpha(x),$$

e quindi $\alpha(2x) = 2\alpha(x)$, qualunque sia $x \in \mathbb{R}$. Analogamente, osservando che $(2x, 2y, x + y, \infty) = -1$, si ottiene $\alpha(x + y) - \alpha(2x) = \alpha(2y) - \alpha(x + y)$ che, unito alla identità precedente, permette di concludere che $2\alpha(x + y) = 2[\alpha(x) + \alpha(y)]$ e quindi che α è un omomorfismo del gruppo additivo dei numeri reali.

Con un calcolo diretto, per $x \neq 0$, si ottiene $(x, -x, 1, x^2) = -1$, e quindi

$$\alpha(x^2) - \alpha(x^2)\alpha(x) + \alpha(x) - \alpha(x)^2 = -\alpha(x^2) - \alpha(x^2)\alpha(x) + \alpha(x) + \alpha(x)^2 \qquad \text{cioè} \qquad 2\alpha(x^2) = 2\alpha(x)^2.$$

Da ciò si deduce che

$$2\alpha(xy) = \alpha(2xy) = \alpha((x + y)^2 - x^2 - y^2) = \alpha(x + y)^2 - \alpha(x)^2 - \alpha(y)^2 = 2\alpha(x)\alpha(y).$$

Quindi α è un omomorfismo di corpi e perciò iniettivo. Inoltre, poichè f è suriettiva, lo stesso vale per α e ciò è quanto ci serve per concludere. **CVD** □

Nelle sezioni precedenti, abbiamo visto che, dati tre punti, il quarto armonico si può ottenere dai primi tre con 'costruzioni con la riga' e quindi, se una retta è immersa nel piano proiettivo (o in uno spazio proiettivo di dimensione maggiore), le condizioni date all'inizio della sezione sulle trasformazioni dello spazio proiettivo, rispettano queste costruzioni. Ciò significa che la condizione di conservare i gruppi armonici è una condizione 'naturale' per le trasformazioni tra rette proiettive (immerse) e quindi d'ora in poi supporremo che le trasformazioni dello spazio proiettivo soddisfino a questa ipotesi. Abbiamo visto che, nel campo reale, questa condizione caratterizza le proiettività. Ciò non è più vero su altri corpi di base, infatti, nella dimostrazione della Proposizione precedente, per concludere, abbiamo dovuto usare la condizione che $\mathbb{R}$ non abbia automorfismi non-banali, perchè, senza quest'ultima ipotesi, potremmo solo affermare che la trasformazione α, definita nella dimostrazione sopra, è un automorfismo del corpo di base(†).

Diamo quindi delle definizioni più generali di trasformazioni tra spazi vettoriali e tra spazi proiettivi.

6.3 Definizione. Siano V e V' due spazi vettoriali, rispettivamente sui corpi C e C', $\alpha : C \to C'$ un omomorfismo (iniettivo) di corpi e, per ogni elemento $x \in C$, indichiamo con x^α l'immagine, tramite α, di x in C'. Un'applicazione α-semilineare, $\phi : V \to V'$, è un'applicazione tale che $\phi(av + bw) = a^\alpha\phi(v) + b^\alpha\phi(w)$, per ogni coppia di vettori $v, w \in V$ e per ogni coppia di scalari $a, b \in C$.

6.4 Definizione. Siano V e V' due spazi vettoriali, rispettivamente sui corpi C e C'. Un'applicazione $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ è una *mappa proiettiva*, se esiste un omomorfismo (iniettivo) di corpi $\alpha : C \to C'$ ed un'applicazione $\phi : V \to V'$, α-semilineare, tali che $f(H) = \sigma\langle\phi(H)\rangle$, per ogni elemento H di $\mathbb{P}(V)$.

Una mappa proiettiva è una *collineazione* se f è una biiezione.

Esercizio 6.1. Siano V e V' due spazi vettoriali, rispettivamente sui corpi C e C' ed $\alpha : C \to C'$ un omomorfismo (iniettivo) di corpi.

(a) Si verifichi che V' è un C-spazio vettoriale tramite la moltiplicazione per scalari indotta da α, ovvero se $a \in C$ e $v' \in V'$, allora $a \cdot v' := a^\alpha v'$ (ove nel secondo membro si considera la moltiplicazione di vettori di V' per scalari in C'). Indicheremo con V'_α V' pensato (in questo modo) come C-spazio vettoriale.

(†) Questo, se la caratteristica del corpo di base è diversa da 2, visto che nel corso della dimostrazione abbiamo dovuto dividere ripetutamente per questo numero. D'altra parte, si noti che, in caratteristica 2, non ha senso nemmeno la nozione di gruppo armonico e quindi, *d'ora in poi escluderemo i campi di caratteristica* 2 *dalle nostre considerazioni*.

(b) Sia $L^\alpha(V,V')$ l'insieme delle applicazioni α-semilineari di V su V'. Si mostri che $L^\alpha(V,V')$ è un C-spazio vettoriale, isomorfo ad $\mathrm{Hom}_C(V,V'_\alpha)$. □

Esercizio 6.2. Siano V e V' due spazi vettoriali, rispettivamente sui corpi C e C', $\alpha : C \to C'$ un omomorfismo (iniettivo) di corpi e $\phi : V \to V'$ un'applicazione α-semilineare.
(a) Si verifichi che $\ker\phi := \{\, v \in V \mid \phi(v) = 0 \,\}$ è un sottospazio di V e che ϕ è iniettiva se, e solo se, $\ker\phi = \langle 0\rangle$.
(b) Si verifichi che $\phi(V) := \{\, \phi(v) \mid v \in V \,\}$ è un sottospazio di V'_α, ma che $\phi(V)$ è un sottospazio di V' se, e solo se, α è suriettivo. L'immagine di ϕ è il sottospazio di V' generato da $\phi(V)$, ovvero $\mathrm{im}\,\phi = \langle\phi(V)\rangle$, e si pone $\mathrm{rk}\,\phi := \dim_{C'}\mathrm{im}\,\phi$.
(c) Si definisca un'applicazione $f_\phi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$, ponendo $f(\sigma W) = \sigma\langle\phi(w) \mid w \in W\rangle$, per ogni sottospazio W di V. Si mostri che $\dim_C\phi(W) \geq \dim_{C'}\langle\phi(W)\rangle$. □

Esercizio 6.3. Siano V e V' due spazi vettoriali, rispettivamente sui corpi C e C', $\alpha : C \to C'$ un omomorfismo (iniettivo) di corpi e $\phi : V \to V'$ un'applicazione α-semilineare. Fissate una base $\mathcal{V} = \{v_1,\dots,v_n\}$ di V su C ed una base $\mathcal{W} = \{w_1,\dots,w_m\}$ di V', si può associare a ϕ una matrice $A \in M_{m\times n}(C')$, ove le entrate di A sono determinate come per le applicazioni lineari, dalle condizioni $\phi(v_j) = a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m$, per $j = 1,\dots,n$.

Sia $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ in V ed indichiamo con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la colonna delle coordinate di v. Si mostri che le coordinate del vettore $\phi(v)$ rispetto alla base $\mathcal{W} = \{w_1,\dots,w_m\}$ sono $y = Ax^\alpha$; ove l'esponente α sta ad indicare che si è applicato l'omomorfismo α alle componenti di x. □

Esercizio 6.4. Siano V e V' due spazi vettoriali, rispettivamente sui corpi C e C' ed $\alpha : C \to C'$ un omomorfismo (iniettivo) di corpi. Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ una mappa proiettiva associata all'applicazione α-semilineare $\phi : V \to V'$. Si mostri che f è un'applicazione biiettiva se, e solo se, ϕ è biiettiva. □

Esercizio 6.5. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione $n \geq 1$ (su $\mathbb{C}$) ed indichiamo con $V_\mathbb{R}$ lo stesso insieme, pensato come spazio vettoriale reale. Data un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare, $\phi : V \to V$, indicheremo con $\phi_\mathbb{R} : V_\mathbb{R} \to V_\mathbb{R}$ la stessa applicazione pensata come elemento di $\mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V_\mathbb{R},V_\mathbb{R})$.
(a) Si mostri che la naturale inclusione $\mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V,V) \subset \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V_\mathbb{R},V_\mathbb{R})$ che associa ϕ a $\phi_\mathbb{R}$ non è suriettiva.
(b) Si mostri che, per ogni $\phi \in \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V,V)$, si ha $\det(\phi_\mathbb{R}) = |\det\phi|^2$. □

Esercizio 6.6. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione $n \geq 1$ (su $\mathbb{C}$) ed indichiamo con $V_\mathbb{R}$ lo stesso insieme, pensato come spazio vettoriale reale. Diremo che un'applicazione $\phi \in \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V_\mathbb{R},V_\mathbb{R})$ è $\mathbb{C}$-lineare, se $\phi \in H = \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V,V)$, mentre diremo che ϕ è $\mathbb{C}$-semilineare o *antilineare* se $\phi(\alpha v) = \overline{\alpha}\phi(v)$, per ogni $v \in V$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.
(a) Si mostri che l'insieme H' delle applicazioni antilineari è un sottospazio vettoriale reale di $\mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V_\mathbb{R},V_\mathbb{R})$ e se ne calcoli la dimensione.
(b) Si mostri che $\mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V_\mathbb{R},V_\mathbb{R}) = H \oplus H'$. □

Le collineazioni godono di proprietà analoghe a quelle soddisfatte dalle proiettività. Lasciamo al lettore il compito di adattare le considerazioni utilizzate in quell'ambito e svolgere i seguenti esercizi, che descrivono alcune proprietà delle collineazioni.

Esercizio 6.7. Siano $r = \mathbb{P}(V)$ ed $r' = \mathbb{P}(V')$ due rette proiettive sui corpi C e C' rispettivamente, e sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ una collineazione, associata all'applicazione α-semilineare $\phi : V \to V'$. Si mostri che, dati quattro punti P,Q,R,S di r, si ha $(f(P),f(Q),f(R),f(S)) = (P,Q,R,S)^\alpha$. □

Esercizio 6.8. Siano $r = \mathbb{P}(V)$ ed $r' = \mathbb{P}(V')$ due rette proiettive sui corpi C e C' rispettivamente, e sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ un'applicazione (insiemistica) che mandi il vuoto di r nel vuoto di r' e σV su $\sigma V'$. Sia $\alpha : C \to C'$ un isomorfismo di campi e supponiamo che, dati comunque quattro punti P,Q,R,S di r , si abbia $(f(P),f(Q),f(R),f(S)) = (P,Q,R,S)^\alpha$. Si mostri che f è una collineazione di r su r'. □

Esercizio 6.9. Siano $r = \mathbb{P}(V)$ ed $r' = \mathbb{P}(V')$ due rette proiettive sui corpi C e C' rispettivamente, entrambi di caratteristica diversa da 2; e sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ un'applicazione suriettiva che mandi il vuoto proiettivo nel vuoto, σV su $\sigma V'$, e che conservi i gruppi armonici, ovvero, dati quattro punti P,Q,R,S di r, con $(P,Q,R,S) = -1$, si ha $(f(P),f(Q),f(R),f(S)) = -1$. Si mostri che f è una collineazione di r su r'. □

Vogliamo mostrare che relazioni ci sono tra collineazioni e biezioni tra i punti della retta proiettiva in qualche caso particolare.

Esercizio 6.10. Sia $\mathbb{F}_3$ il corpo con tre elementi.
(a) Si mostri che $\mathbb{F}_3$ non ammette automorfismi diversi dall'identità$^{(*)}$ e si concluda che tutte le collineazioni tra rette proiettive su $\mathbb{F}_3$ sono proiettività.
(b) Si mostri che la retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3)$ ha 4 punti distinti e quindi che vi sono 24 biiezioni tra i punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3)$.
(c) Si mostri che $\#\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3) = 48$ e quindi che vi sono esattamente 24 proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3)$ in sé e si concluda che ogni biiezione tra i punti di questa retta è una proiettività. □

Esercizio 6.11. Sia $\mathbb{F}_5$ il corpo con cinque elementi.
(a) Si mostri che $\mathbb{F}_5$ non ammette automorfismi diversi dall'identità e si concluda che tutte le collineazioni tra rette proiettive su $\mathbb{F}_5$ sono proiettività.
(b) Si mostri che la retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ ha 6 punti distinti e quindi che vi sono 720 biiezioni tra i punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$.
(c) Si mostri che $\#\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5) = 480$ e quindi che vi sono esattamente 120 proiettività(=collineazioni) di $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ in sé e si concluda che che non tutte le biiezioni tra i punti di questa retta sono collineazioni. □

⋆Esercizio 6.12. Sia $p > 2$ un primo razionale ed indichiamo con $\mathbb{F}_p$ il corpo con p elementi.
(a) Si mostri che $\mathbb{F}_p$ non ammette automorfismi diversi dall'identità e si concluda che tutte le collineazioni tra rette proiettive su $\mathbb{F}_p$ sono proiettività.
(b) Si mostri che la retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ ha $p+1$ punti distinti e quindi che vi sono $(p+1)!$ biiezioni tra i punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$.
(c) Si mostri che $\#\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) = (p^2-1)(p^2-p)$ e quindi che vi sono esattamente $p(p^2-1)$ proiettività (=collineazioni) di $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ in sé e si concluda che, per $p > 3$, non tutte le biiezioni tra i punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ sono collineazioni. □

Il seguito di questo numero è dedicato alla dimostrazione del fatto che le collineazioni sono quella classe di trasformazioni 'geometriche' dello spazio proiettivo di cui si parlava all'inizio di questa sezione, ovvero che vale il seguente Teorema.

6.5 Teorema. [Teorema Fondamentale della Geometria Proiettiva] *Siano $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ due spazi proiettivi di dimensione maggiore o uguale a 2 sui corpi C e C' rispettivamente, e sia f un'applicazione biunivoca tra i punti di $\mathbb{P}(V)$ ed i punti di $\mathbb{P}(V')$ che mandi terne di punti allineati in terne di punti allineati. Allora f si estende, in modo unico, ad una collineazione di $\mathbb{P}(V)$ su $\mathbb{P}(V')$.*

La dimostrazione di questo Teorema occuperà tutto il seguito di questa sezione e discenderà dalla dimostrazione di un'analogo risultato per spazi proiettivi di dimensione 2. Cominciamo quindi affrontando questa situazione.

6.6 Lemma. *Siano $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ due piani proiettivi sui corpi C e C' rispettivamente, e sia f un'applicazione biunivoca tra i punti di $\mathbb{P}(V)$ ed i punti di $\mathbb{P}(V')$ che mandi terne di punti allineati in terne di punti allineati. Allora f si estende, in modo unico, ad una collineazione di $\mathbb{P}(V)$ su $\mathbb{P}(V')$.*

dim. La dimostrazione richiede diversi argomenti e quindi la spezziamo in vari passi.

Passo 1. Per prima cosa, osserviamo che *vi è un unico modo di estendere f agli elementi di $\mathbb{P}(V)$*, ponendo $f(\sigma\langle 0\rangle) = \sigma\langle 0\rangle$, $f(\sigma V) = \sigma V'$ e, se $r = P \vee Q$ è una retta di $\mathbb{P}(V)$, $f(r) = f(P) \vee f(Q)$. Si osservi che $f(r)$ è una retta e che il comportamento di f sui punti di $\mathbb{P}(V)$, garantisce che la definizione di $f(r)$ è ben posta e non dipende dalla scelta dei punti P e Q. Il fatto che f sia una biiezione tra i punti dei due piani, garantisce che anche l'estensione di f a $\mathbb{P}(V)$ sia una biiezione; infatti l'estensione di f è chiaramente suriettiva e, se si avesse $f(r) = f(s)$ per due rette distinte del piano $\mathbb{P}(V)$, dato un punto P di $\mathbb{P}(V)$ ed una qualunque retta t per P, non passante per $r \cap s$, l'immagine di P sarebbe allineata con le immagini dei punti $P_r = t \cap r$ e $P_s = t \cap s$ e quindi sarebbe contenuta nella retta $f(r)$, contro l'ipotesi che f induca una biezione tra i punti dei due piani.

$^{(*)}$ Ciò vale per tutti i corpi $\mathbb{F}_p$ con p elementi, quando p è un numero primo e per il campo $\mathbb{Q}$, perchè ogni automorfismo deve mandare 1 in 1 e rispettare le somme. Per vedere che $\mathbb{R}$ non ha automorfismi non-banali si può ragionare così: ogni automorfismo di $\mathbb{R}$ manda i positivi nei positivi, perchè l'immagine di un quadrato è un quadrato ed in $\mathbb{R}$ tutti i positivi sono quadrati. Dunque ogni automorfismo di $\mathbb{R}$ induce l'identità sui razionali e rispetta l'ordine e quindi deve essere l'identità.

Indicheremo ancora con $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ questa estensione dell'applicazione tra i punti dei due piani e si osservi che, date due rette r ed s di $\mathbb{P}(V)$, si ha $f(r \cap s) = f(r) \cap f(s)$, perchè un punto X di $f(r \cap s)$ deve essere allineato con l'immagine sia di ogni punto di r che di ogni punto di s.

Passo 2. Osserviamo ora che *l'applicazione f rispetta le proiezioni tra rette*; ovvero, se $\pi : r \to s$ è la proiezione tra due rette del piano $\mathbb{P}(V)$ da un centro P esterno alle due rette, allora l'applicazione $f\pi f^{-1}$ tra le due rette $r' = f(r)$ ed $s' = f(s)$ di $\mathbb{P}(V')$ è la proiezione dal centro $P' = f(P)$. Infatti, se X' è un punto di r' ed X è il punto di r tale che $X' = f(X)$, allora

$$f\pi f^{-1}(X') = f\pi(X) = f((P \vee X) \cap s) = (f(P) \vee f(X)) \cap f(s) = (P' \vee X') \cap s'$$

e quindi $f\pi f^{-1}(X')$ è la proiezione di r' su s' dal centro P', esterno alle due rette.

Passo 3. *Costruiamo l'applicazione* $\alpha : C \to C'$. Dati tre punti allineati P_∞, P_0, P_1 del piano $\mathbb{P}(V)$, a due a due distinti, indichiamo con $P'_\infty = f(P_\infty)$, $P'_0 = f(P_0)$, $P'_1 = f(P_1)$ i tre punti corrispondenti del piano $\mathbb{P}(V')$, che sono ancora allineati ed a due a due distinti. Dato un elemento x del campo C, esiste un unico punto P_x della retta $P_\infty \vee P_0$ (diverso da P_∞), tale che $(P_\infty, P_0, P_1, P_x) = x$. Allora diciamo che il valore corrispondente $x^\alpha \in C'$ è uguale a $(P'_\infty, P'_0, P'_1, f(P_x))$.

Vogliamo vedere che la definizione non dipende dalla scelta dei tre punti P_∞, P_0, P_1. Siano quindi Q_∞, Q_0, Q_1 tre punti allineati del piano $\mathbb{P}(V)$, a due a due distinti ed indichiamo con $Q'_\infty = f(Q_\infty)$, $Q'_0 = f(Q_0)$, $Q'_1 = f(Q_1)$ i tre punti corrispondenti del piano $\mathbb{P}(V')$. Indichiamo con λ l'unica proiettività della retta $P_\infty \vee P_0$ sulla retta $Q_\infty \vee Q_0$ che manda ordinatamente P_∞, P_0, P_1 su Q_∞, Q_0, Q_1; allora, in corrispondenza all'elemento x del campo C, il punto Q_x della retta $Q_\infty \vee Q_0$ per cui $(Q_\infty, Q_0, Q_1, Q_x) = x$ è $\lambda(P_x)$, perchè le proiettività conservano i birapporti. Dobbiamo quindi verificare che $(Q'_\infty, Q'_0, Q'_1, f\lambda(P_x)) = (P'_\infty, P'_0, P'_1, f(P_x))$. Se consideriamo la proiettività λ' della retta $P'_\infty \vee P'_0$ sulla retta $Q'_\infty \vee Q'_0$ che manda ordinatamente P'_∞, P'_0, P'_1 su Q'_∞, Q'_0, Q'_1; allora $(P'_\infty, P'_0, P'_1, f(P_x)) = (Q'_\infty, Q'_0, Q'_1, \lambda' f(P_x))$ e quindi dobbiamo dimostrare che $\lambda' f = f\lambda$ su tutti i punti della retta $P_\infty \vee P_0$, ovvero che $\lambda' = f\lambda f^{-1}$. Le due funzioni coincidono sui punti Q_∞, Q_0, Q_1 e quindi è sufficiente mostrare che $f\lambda f^{-1}$ è una proiettività. A questo punto, basta osservare che, in base alla *Proposizione VI.5.9*, la proiettività λ è prodotto di (al più) tre proiezioni $\lambda = \pi_3\pi_2\pi_1$ e quindi che, per il bf Passo 2, anche $f\lambda f^{-1} = f\pi_3 f^{-1} f\pi_2 f^{-1} f\pi_1 f^{-1}$ è prodotto di (al più) tre proiezioni e quindi è una proiettività.

Dunque l'applicazione $\alpha : C \to C'$ è ben definita e non dipende dalla scelta dei punti P_∞, P_0, P_1. Per verificare che α è un isomorfismo di corpi tra C e C', possiamo osservare per prima cosa che la funzione f dalla retta $P_\infty \vee P_0$ alla retta $P'_\infty \vee P'_0$ conserva i gruppi armonici. Infatti quattro punti P, Q, R, S della retta $P_\infty \vee P_0$ formano un gruppo armonico se, e solo se, esiste una proiettività della retta stessa che manda P, Q, R, S ordinatamente su P, Q, S, R. Allora, ragionando come sopra, esiste una proiettività della retta retta $P'_\infty \vee P'_0$ che manda ordinatamente $f(P), f(Q), f(R), f(S)$ ordinatamente su $f(P), f(Q), f(S), f(R)$ e quindi anche $f(P), f(Q), f(R), f(S)$ formano un gruppo armonico. Dunque, ripetendo i ragionamenti fatti nella dimostrazione della *Proposizione VI.6.2*, si verifica che α è un isomorfismo di corpi tra C e C'.

Passo 4. Dobbiamo mostrare che esiste un'applicazione α-semilineare $\phi : V \to V'$ tale che $f(\sigma W) = \sigma \langle \phi(W) \rangle$ per ogni sottospazio W di V. Fissata una base $\{v_0, v_1, v_2\}$ di V su C, consideriamo i punti del riferimento associato $P_0 = \sigma \langle v_0 \rangle$, $P_1 = \sigma \langle v_1 \rangle$, $P_2 = \sigma \langle v_2 \rangle$, $U = \sigma \langle v_0 + v_1 + v_2 \rangle$, e siano $P'_0 = f(P_0)$, $P'_1 = f(P_1)$,$P'_2 = f(P_2)$, $U' = f(U)$, i corrispondenti punti del piano $\mathbb{P}(V')$, che formano un riferimento su questo piano e quindi sono associati ad una base $\{v'_0, v'_1, v'_2\}$ di V' su C'. Consideriamo quindi l'unica applicazione α-semilineare $\phi : V \to V'$ definita ponendo $\phi(x_0v_0 + x_1v_1 + x_2v_2) = x_0^\alpha v'_0 + x_1^\alpha v'_1 + x_2^\alpha v'_2$ ed osserviamo che è suffciente dimostrare che $f(\sigma \langle v \rangle) = \sigma \langle \phi(v) \rangle$ per ogni vettore v di V.

Consideriamo ora i punti $U_0 = \sigma \langle v_1 + v_2 \rangle$, $U_1 = \sigma \langle v_0 + v_2 \rangle$, $U_2 = \sigma \langle v_0 + v_1 \rangle$, ed osserviamo che $U_0 = (P_1 \vee P_2) \cap (P_0 \vee U)$ e quindi $f(U_0) = (P'_1 \vee P'_2) \cap (P'_0 \vee U') = U'_0 = \sigma \langle v'_1 + v'_2 \rangle = \sigma \langle \phi(v_1 + v_2) \rangle$. Analogamente, si ha $f(U_1) = U'_1 = \sigma \langle v'_0 + v'_2 \rangle$ ed $f(U_2) = U'_2 = \sigma \langle v'_0 + v'_1 \rangle$. Se ora consideriamo un punto $P = \sigma \langle x_0v_0 + x_1v_1 \rangle$, si ha $(P_0, P_1, U_2, P) = \frac{x_0}{x_1}$, e quindi $(P'_0, P'_1, U'_2, f(P)) = \frac{x_0^\alpha}{x_1^\alpha}$, in base a quanto osservato nel Passo 3. Inoltre, posto $P' = \sigma \langle \phi(x_0v_0 + x_1v_1) \rangle = \sigma \langle \phi(x_0^\alpha v'_0 + x_1^\alpha v'_1) \rangle$, si ha $(P'_0, P'_1, U'_2, P') = \frac{x_0^\alpha}{x_1^\alpha}$ e quindi $f(\sigma \langle x_0v_0 + x_1v_1 \rangle) = f(P) = P' = \sigma \langle \phi(x_0v_0 + x_1v_1) \rangle$, che ci dice che la tesi è verificata su tutti i punti della retta $P_0 \vee P_1$. Analogamente si può ragionare sui punti delle rette

$P_0 \vee P_2$ e $P_1 \vee P_2$. Infine per un punto $X = \sigma\langle x_0v_0 + x_1v_1 + x_2v_2\rangle$ con $x_0x_1x_2 \neq 0$, basta osservare che $X = \sigma\langle x_0v_0 + x_1v_1, v_2\rangle \cap \sigma\langle v_0, x_1v_1 + x_2v_2\rangle$ e quindi che

$$f(X) = \sigma\langle x_0^\alpha v_0' + x_1^\alpha v_1', v_2'\rangle \cap \sigma\langle v_0', x_1^\alpha v_1' + x_2^\alpha v_2'\rangle = \sigma\langle x_0^\alpha v_0' + x_1^\alpha v_1' + x_2^\alpha v_2'\rangle .$$

Ciò conclude la dimostrazione del Lemma. **CVD** □

Passando ora alla dimostrazione del *Teorema VI.6.5*, si tratta di adattare i passi della dimostrazione del Lemma al caso di uno spazio proiettivo di dimensione maggiore di 2.

Per quanto riguarda il **Passo 1**, l'estensione naturale di f agli elementi dello spazio proiettivo di dimensione positiva, si pone $f(P_1 \vee \cdots \vee P_n) = f(P_1) \vee \cdots \vee f(P_n)$ e si osserva che $f(P_1) \vee \cdots \vee f(P_n)$ è l'elemento di $\mathbb{P}(V')$ generato dalle immagini dei punti dell'elemento $P_1 \vee \cdots \vee P_n$. Questo può essere verificato facendo induzione sul numero di generatori di $P_1 \vee \cdots \vee P_n$; infatti, per $n = 2$, le ipotesi su f di cono esattamente che l'immagine di ogni punto della retta $P_1 \vee P_2$ è contenuto nella retta $f(P_1) \vee f(P_2)$. Per $n > 2$, dato un punto X di $P_1 \vee \cdots \vee P_n$, se X è contenuto in $P_1 \vee \cdots \vee P_{n-1}$, possiamo applicare l'ipotesi induttiva, altrimenti, se $X \neq P_n$, esiste un punto X_0 di $P_1 \vee \cdots \vee P_{n-1}$ tale che X sia contenuto nella retta $X_0 \vee P_n$. Per le ipotesi $f(X)$ è contenuto nella retta $f(X_0) \vee f(P_n)$ che è contenuta in $f(P_1) \vee \cdots \vee f(P_n)$.

Per quanto riguarda il **Passo 2**, è chiaro che resta valido per proiezioni tra coppie di rette complanari e quindi anche la successiva estensione a proiettività tra due rette complanari. Se le rette appartengono a piani distinti, ma che abbiano una retta in comune, possiamo decomporre la proiettività tra le due rette attraverso proiettività sulla retta di intersezione e ridurci quindi al caso di rette complanari. In generale, dati due piani possiamo sempre costruire una catena di piani, ognuno dei quali intersechi il successivo in una retta, che parta dal primo ed arrivi all'ultimo.

Possiamo quindi definire l'applicazione α, come fatto nel **Passo 3**, ed osservare che resta valida l'indipendenza dalla scelta dei punti. Infine, si possono scegliere delle basi $\mathcal{V} = \{v_0, \ldots, v_n\}$ di V e $\mathcal{V}' = \{v_0', \ldots, v_n'\}$ di V', in modo analogo a quanto fatto nel **Passo 4** ed è chiara la generalizzazione della definizione dell'applicazione α-semilineare ϕ. Infine, possiamo utilizzare un ragionamento induttivo sul numero degli addendi per mostrare che $f(\sigma\langle x_0v_0 + \cdots + x_nv_n\rangle) = \sigma\langle x_0^\alpha v_0' + \cdots + x_n^\alpha v_n'\rangle$. Infatti, per $n = 1$ o $n = 2$, abbiamo già dato una dimostrazione nel Lemma, per $n > 2$, se $x_0 = 0$, oppure $x_n = 0$, la tesi è vera per l'ipotesi induttiva; altrimenti si osserva che

$$\sigma\langle x_0v_0 + \cdots + x_nv_n\rangle = (\sigma\langle v_0\rangle \vee \sigma\langle x_1v_1 + \cdots + x_nv_n\rangle) \cap (\sigma\langle x_0v_0 + \cdots + x_{n-1}v_{n-1}\rangle \vee \sigma\langle v_n\rangle)$$

e quindi, per l'ipotesi induttiva ed il fatto che f rispetta l'allineamento, si ha che

$$\begin{aligned}
&f(\sigma\langle x_0v_0 + \cdots + x_nv_n\rangle) = \\
&\quad = [f(\sigma\langle v_0\rangle) \vee f(\sigma\langle x_1v_1 + \cdots + x_nv_n\rangle)] \cap [f(\sigma\langle x_0v_0 + \cdots + x_{n-1}v_{n-1}\rangle) \vee f(\sigma\langle v_n\rangle)] = \\
&\quad = [\sigma\langle v_0'\rangle \vee \sigma\langle x_1^\alpha v_1' + \cdots + x_n^\alpha v_n'\rangle] \cap [\sigma\langle x_0^\alpha v_0' + \cdots + x_{n-1}^\alpha v_{n-1}'\rangle \vee \sigma\langle v_n'\rangle] = \\
&\quad = \sigma\langle x_0^\alpha v_0' + \cdots + x_n^\alpha v_n'\rangle
\end{aligned}$$

e ciò permette di concludere la dimostrazione del *Teorema VI.6.5*.

VII
Coniche e Quadriche

Le coniche o sezioni coniche, sono le curve che si ottengono tagliando un cono (quadrico) con un piano ed il lettore dovrebbe conoscere le caratterizzazioni di queste curve come luoghi geometrici date nell'ambito della Geometria Euclidea; ad esempio, le ellissi sono il luogo dei punti per cui la somma delle distanze da due punti fissati –i fuochi– è costante. Introducendo nel piano delle coordinate cartesiane e scegliendo opportunamente gli assi coordinati, si vede che questi luoghi geometrici sono descritti da equazioni di secondo grado nelle coordinate (cf. *Richiami I.5.2*). I cambiamenti di coordinate che abbiamo studiato (isometrie, affinità o proiettività) sono trasformazioni lineari che non cambiano il grado delle equazioni e quindi possiamo genericamente affermare che le coniche sono curve piane descritte da equazioni di secondo grado nelle coordinate. Questo sarà il punto di partenza della nostra trattazione, ovvero studieremo la "geometria" delle equazioni di secondo grado. Ciò ci permetterà di caratterizzare le diverse coniche e di sviluppare facili tecniche di calcolo dei loro *invarianti*, tecniche che si possono applicare con poche variazioni anche per studiare superficie –o luoghi geometrici di dimensione più grande– descritte da un'equazione di secondo grado.

Spendiamo qualche parola in più per precisare cosa intendiamo per "proprietà geometriche" delle coniche. Da quanto abbiamo detto, le coniche sono da pensarsi come equazioni di secondo grado nelle coordinate del piano; quelle che chiameremo *proprietà geometriche*, saranno le proprietà dell'equazione che si possono esprimere attraverso quantità *invarianti* rispetto ai cambiamenti di coordinate che si considerano nel piano in questione. Vi saranno quindi proprietà proiettive, proprietà affini e proprietà metriche delle coniche, a seconda che si considerino cambiamenti di coordinate che siano proiettività, affinità, o isometrie. Una sorta di gerarchia tra queste varie proprietà si può dedurre ricordando le relazioni tra spazio proiettivo, affine e metrico descritte nei capitoli precedenti.

Abbiamo anche visto nei capitoli precedenti che la classificazione delle forme quadratiche dipende in modo rilevante dal corpo degli scalari su cui le si considera (cf. ad esempio l'*Osservazione IV.2.4* ed il seguito della sezione) e –come già detto–, abbiamo visto come la geometria dello spazio euclideo o, più in generale, quella dello spazio affine possano essere dedotte dalla geometria dello spazio proiettivo; per questi motivi, per tutto il capitolo, salvo diverso avviso, supporremo di essere nella situazione descritta nel seguente diagramma ove le freccie sono tutte inclusioni

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \end{array} ;$$

ovvero, supporremo di aver immerso lo spazio affine reale dentro lo spazio proiettivo reale (cf. *Teorema VI.3.7*) e di immergere entrambo nei rispettivi spazi complessi; ciò significa che ci sentiremo liberi di usare, quando ci serviranno, coordinate affini oppure omogenee e punti a coordinate complesse, reali e non. Molte delle affermazioni che faremo si potrebbero generalizzare ad altri corpi di scalari, ma nell'ambito di questo capitolo, una tale generalità sarebbe forse eccessiva.

1. Coniche nel piano proiettivo

L'oggetto di questa sezione sono le coniche del piano proiettivo e le loro proprietà geometriche. Cominciamo quindi con una definizione.

1.1 Definizione. Una *quadrica* in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è una forma quadratica a coefficienti reali, a meno della moltiplicazione per una costante diversa da zero (cioè un'equazione omogenea di secondo grado nelle coordinate omogenee, cf. *Osservazione IV.1.17*, a meno della moltiplicazione per una costante diversa da zero). I punti di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ su cui si annulla la forma quadratica formano il *supporto* della quadrica. Si chiamano *coniche* le quadriche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Un primo fatto fondamentale è l'osservazione che una quadrica è determinata dal proprio supporto (ed è questo il motivo per cui il supporto viene preso a coordinate complesse[(*)]).

1.2 Proposizione. *Siano q_1 e q_2 due forme quadratiche su $\mathbb{C}^n$ aventi lo stesso insieme di vettori isotropi; allora esiste una costante $c \neq 0$ tale che $q_1(x) = cq_2(x)$ per ogni vettore x di $\mathbb{C}^n$.*

dim. Se $n = 1$, tutte le forme quadratiche sono proporzionali tra loro e la tesi è ovviamente vera. Se $n = 2$, una forma quadratica $ax^2 + bxy + cy^2$ ha esattamente due sottospazi di dimensione 1 di vettori isotropi. Se $a \neq 0$ i sottospazi isotropi sono $\left\langle \begin{pmatrix} -b+\sqrt{b^2-4ac} \\ 2a \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\left\langle \begin{pmatrix} -b-\sqrt{b^2-4ac} \\ 2a \end{pmatrix} \right\rangle$, e determinano la forma quadratica a meno di un fattore di proporzionalità, infatti, si ha

$$4a(ax^2 + bxy + cy^2) = [2ax + (b + \sqrt{b^2 - 4ac})y][2ax + (b - \sqrt{b^2 - 4ac})y]$$

e quindi ogni altra forma quadratica con gli stessi vettori isotropi è proporzionale a questa. Se $a = 0$ la forma quadratica $bxy + cy^2$ è ugualmente determinata, a meno di proporzionalità, dai suoi zeri che sono $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\left\langle \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix} \right\rangle$. Dunque la tesi è vera per $n \leq 2$.

Se $n > 2$, indichiamo con g_1 e g_2 le applicazioni bilineari simmetriche associate a q_1 e q_2 e sia v un vettore non isotropo di $\mathbb{C}^n$. Dato un vettore $w \notin \langle v \rangle$, i vettori isotropi $xv + yw$ del sottospazio $\langle v, w \rangle$, sono rispettivamente gli zeri delle due forme quadratiche

$$g_1(v,v)x^2 + 2g_1(v,w)xy + g_1(w,w)y^2 \qquad \text{e} \qquad g_2(v,v)x^2 + 2g_2(v,w)xy + g_2(w,w)y^2.$$

Poichè g_1 e g_2 hanno gli stessi vettori isotropi, le due forme quadratiche devono essere proporzionali e quindi, posto $c = \frac{g_1(v,v)}{g_2(v,v)}$, si ha $g_1(w,w) = cg_2(w,w)$. Stante l'arbitrarietà della scelta di w, la tesi è verificata. **CVD** □

Esempi. (a). Le forme quadratiche $x_0^2 - 5x_0x_1 + 6x_1^2$ e $\frac{1}{6}x_0^2 - \frac{5}{6}x_0x_1 + x_1^2$ rappresentano la stessa quadrica nella retta $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. In particolare, $x_0^2 - 5x_0x_1 + 6x_1^2 = (x_0 - 2x_1)(x_0 - 3x_1)$ e quindi è il prodotto di due forme lineari, ciascuna delle quali rappresenta un punto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Quindi questa quadrica può essere identificata con la coppia di punti $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e tale identificazione, non dipende dal fattore di proporzionalità che modifichi la forma quadratica. Possiamo infine osservare come, in questo modo, ogni quadrica della retta $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ possa essere identificata con la coppia di punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ che costituisce il suo supporto, con la convenzione che le quadriche del tipo $(ax_0 - bx_1)^2$, si identifichino col punto $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ *contato due volte*.

(b). La forma quadratica $x_0^2 - 5x_0x_1 + 6x_1^2 = (x_0 - 2x_1)(x_0 - 3x_1)$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ rappresenta una conica che si decompone nel prodotto di due rette, le cui equazioni sono i due fattori lineari. A differenza della retta proiettiva,

---

(*) Infatti, se si considerasse solo l'insieme dei punti *reali* del supporto, la proposizione successiva sarebbe *falsa*. Ad esempio, le forme quadratiche $x^2 + y^2$ ed $x^2 + 4y^2$ sono entrambe definite positive e quindi prive di vettori isotropi reali, ma chiaramente non sono proporzionali.

questa non è la situazione generale. Ad esempio, la conica $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$ non si decompone nel prodotto di due rette[(†)]. Vedremo nel seguito come distinguere le coniche che si spezzano nel prodotto di rette dalle altre coniche.

(*c*). La forma quadratica $x_0^2 - 6x_1^2 + 6x_1x_2 - x_3^2$ rappresenta una quadrica in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. La sua intersezione col piano $\pi : x_0 - x_2 + x_3 = 0$ è data dai punti che soddisfano al sistema (di secondo grado)

$$\begin{cases} x_0^2 - 6x_1^2 + 6x_1x_2 - x_3^2 = 0 \\ x_0 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

ed è una conica del piano π. Infatti $\pi = \sigma\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, ed i tre vettori determinano un riferimento sul piano π e quindi coordinate omogenee $\alpha_0 \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ per i suoi punti. Un punto di π appartiene all'intersezione se, e solo se, annulla la forma quadratica $\alpha_0^2 + 6\alpha_0\alpha_1 - 6\alpha_1^2 + 6\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2$ e quindi si tratta di una conica nel piano proiettivo π. È pressocché banale osservare che la scelta di un diverso sistema di coordinate omogenee sul piano π avrebbe prodotto una diversa forma quadratica (non proporzionale) per descrivere la stessa conica. Le due forme quadratiche sono però legate da un cambiamento di coordinate proiettive sul piano π.

Una generica conica $\mathscr{C}$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ è quindi rappresentata da una forma quadratica

$$\mathscr{C} : a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

ove i coefficienti a_{ij} sono numeri reali. A questa forma quadratica resta associata l'applicazione bilineare simmetrica di matrice (notare il fattore 2 che compare in alcuni coefficienti della forma quadratica!)

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{[matrice associata a } \mathscr{C}\text{]}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (cf. *Osservazione IV.1.17*) ed un punto $P = \begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}$ appartiene al supporto della conica se, e solo se, si ha ${}^tPAP = 0$, ovvero se, e solo se, corrisponde ad un vettore isotropo (non nullo) per l'applicazione bilineare di matrice A. Questa matrice –o, meglio, l'applicazione bilineare simmetrica associata ad A– contiene tutte le informazioni sulla geometria della conica $\mathscr{C}$. Ad esempio, sappiamo che le applicazioni bilineari si distinguono in degeneri e non-degeneri, a seconda che la matrice associata sia invertibile o meno. Ciò si riflette pari pari nella geometria della conica come si può vedere dalla seguente Proposizione.

1.3 Proposizione. *Una conica si spezza nel prodotto di due rette (non necessariamente distinte) se, e solo se, il determinante della matrice associata è uguale a zero.*

dim. Diamo la dimostrazione evidenziando il "dizionario" esistente tra le proprietà della conica e quella dell'applicazione bilineare ad essa associata. Sia A la matrice della conica ed indichiamo con g l'applicazione bilineare ad essa associata (cioè l'applicazione bilineare di matrice A rispetto alla base canonica).

Supponiamo che il supporto della conica si spezzi nel prodotto di due rette distinte r ed s di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ o, più in generale, di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Allora, $r = \sigma\langle u, v\rangle$ ed $s = \sigma\langle u, w\rangle$, ove u, v, w sono tre vettori linearmente

---

(†) Questo fatto si può verificare prendendo arbitrariamente quattro punti della conica, ad esempio $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, e verificando che nessuna delle tre coppie di rette che contengono questi quattro punti soddisfa ad un-equazione di secondo grado proporzionale all'equazione della conica. Questo fatto si potrebbe esprimere, in modo un po' più generale, considerando l'applicazione bilineare simmetrica associata alla forma quadratica (come?).

indipendenti e quindi una base di $\mathbb{C}^3$. Poichè le rette r ed s sono contenute nel supporto della conica, i sottospazi corrispondenti $\langle u, v\rangle$ e $\langle u, w\rangle$ sono sottospazi isotropi per l'applicazione bilineare che risulta quindi degenere, dato che, rispetto alla base $\{u, v, w\}$, ha una matrice del tipo

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ? \\ 0 & ? & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A della conica è uguale a ${}^tPGP$, per qualche matrice invertibile P, e quindi anche il suo determinante è uguale a zero (in particolare, il sottospazio $\langle u\rangle$, cioè il punto di intersezione delle due rette, è il nucleo di g).

Supponiamo ora che (il supporto del-) la conica sia costituito da un'unica retta $r = \sigma\langle u, v\rangle$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$(†). Allora, dato comunque un vettore $w \notin \langle u, v\rangle$, cioè con $g(w, w) = \beta \neq 0$, deve aversi $g(u, w) = 0$. Infatti, se fosse $g(u, w) = \alpha \neq 0$, allora il vettore $x = \beta u - 2\alpha w$ sarebbe isotropo, dato che

$$g(x, x) = g(\beta u - 2\alpha w, \beta u - 2\alpha w) = -4\alpha\beta g(u, w) + 4\alpha^2 g(w, w) = 0.$$

Dunque il punto $\sigma\langle x\rangle$ sarebbe nel supporto della conica, ma non apparterrebbe alla retta r, il che è assurdo. Ciò significa che $g(u, w) = 0$ per ogni vettore w in $\mathbb{R}^3$, ovvero che l'applicazione bilineare g ha un nucleo ed è quindi degenere (ed il suo nucleo è costituito proprio dal sottospazio $\langle u, v\rangle$, visto che, quanto abbiamo detto per il vettore u, avremmo potuto ripeterlo per ogni vettore di quel sottospazio).

Supponiamo ora che sia la matrice A ad essere degenere. Potranno aversi due casi: o $\operatorname{rk} A = 1$ oppure $\operatorname{rk} A = 2$.

Sia $\operatorname{rk} A = 1$ e sia $\langle u, v\rangle$ il nucleo di A. Mostriamo che non possono esservi vettori isotropi al di fuori di tale sottospazio, cioè che tutti i punti della conica $\mathscr{C}$ sono i punti della retta $\sigma\langle u, v\rangle$. Infatti, se esistesse un vettore isotropo $w \notin \langle u, v\rangle$, i tre vettori u, v, w, formerebbero una base di $\mathbb{R}^3$, rispetto a cui la matrice di g sarebbe la matrice nulla $\mathbf{0}_3$. Ma la matrice nulla non può essere congruente alla matrice A, che ha rango 1. Dunque la conica è una retta doppia.

Sia $\operatorname{rk} A = 2$ e sia $\langle u\rangle$ il nucleo di A. Data una retta r, non passante per il punto $P = \sigma\langle u\rangle$, g induce sul sottospazio di dimensione 2 corrispondente ad r un'applicazione bilineare non degenere e quindi una quadrica su questa retta che si spezza in due punti distinti $Q = \sigma\langle v\rangle$ ed $R = \sigma\langle w\rangle$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Si verifica immediatamente che le rette $r = \sigma\langle u, v\rangle$ ed $s = \sigma\langle u, w\rangle$ sono il supporto della conica $\mathscr{C}$. **CVD** □

1.4 Coni Quadrici. Nel caso delle coniche, le sole coniche *degeneri* (cioè tali che l'applicazione bilineare associata sia degenere) sono le coniche spezzate. Per le quadriche di dimensione più grande vi sono altre possibilità e quindi può essere utile una definizione più generale di natura geometrica.

1.5 Definizione. Una quadrica $\mathscr{Q}$ è un *cono quadrico* se esiste almeno un punto P del supporto di $\mathscr{Q}$ con la proprietà che, preso comunque un altro punto Q del supporto, allora la retta $P+Q$ è tutta contenuta nel supporto di $\mathscr{Q}$. I punti con la proprietà descritta formano il *vertice* del cono.

(†) In questo caso si poteva anche verificare direttamente che, se l'equazione della conica è proporzionale ad $(ax_0 + bx_1 + cx_2)^2$, allora la matrice della conica è proporzionale a

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

che è una matrice degenere di rango 1. Per uniformità abbiamo preferito continuare col linguaggio delle applicazioni bilineari. Il lettore diligente è invitato a verificare con un calcolo diretto che quando l'equazione della conica è proporzionale ad un prodotto di due fattori distinti $(a_1x_0 + b_1x_1 + c_1x_2)(a_2x_0 + b_2x_1 + c_2x_2)$ allora la matrice della conica è degenere e di rango 2.

Una quadrica è *non-degenere* se non è un cono quadrico.

Esercizio 1.1. Sia $\mathscr{Q}$ una quadrica di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ di matrice associata A. Si verifichi che $\mathscr{Q}$ è un cono quadrico se, e solo se, $\det A = 0$. In tal caso, si mostri che i punti del vertice sono tutti e soli i punti x di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tali che $Ax = 0$. □

Esercizio 1.2. Sia $\mathscr{Q}$ un cono quadrico di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ di matrice associata A. Si verifichi che $\mathscr{Q}$ induce una quadrica non degenere su ogni elemento di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sghembo con il vertice e di dimensione complementare. □

Esercizio 1.3. Si consideri la conica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di equazione $3x_0x_1 - 2x_0x_2 + 3x_1^2 - 5x_1x_2 + 2x_2^2$ e si mostri che è il prodotto di due rette reali distinte, passanti per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (vertice del cono). □

Esercizio 1.4. Si consideri la conica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di equazione $4x_0^2 - 4x_0x_1 + 12x_0x_2 + x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2$ e si mostri che si tratta di una retta doppia (ogni cui punto è nel vertice del cono). □

Esercizio 1.5. Si consideri la quadrica di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $x_0^2 + 4x_0x_2 + x_1^2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2$. Si mostri che si tratta di un cono quadrico, si determinino il vertice del cono ed un piano su cui il cono taglia una conica non degenere. □

Occupiamoci ora delle coniche non-degeneri e di un'interpretazione geometrica della relazione di ortogonalità tra i sottospazi indotta dall'applicazione bilineare associata alla conica, ovvero della *polarità* associata ad una conica –o, più in generale, ad una quadrica.

1.6 Definizione. Sia $\mathscr{C}$ una conica non-degenere del piano proiettivo (risp. quadrica non-degenere di $\mathbb{P}^n$) e sia q una forma quadratica che la definisce. Dato un punto $P = \sigma\langle v\rangle$, si chiama *polare* del punto P la retta (risp. iperpiano) $\pi_{\mathscr{C}}(P) = \sigma\langle v\rangle^{\perp}$, ove l'ortogonale è preso rispetto all'applicazione bilineare simmetrica associata alla forma quadratica q.

Osserviamo quindi, che se A è la matrice di una conica non degenere, $\mathscr{C}$, e P è un punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, allora la polare del punto P è la retta

$$\pi_{\mathscr{C}}(P) = \left\{ X \mid {}^tPAX = 0 \right\}; \tag{1.7}$$

Per la simmetria della relazione di ortogonalità, si ha che, dati due punti P e Q; $P \in \pi_{\mathscr{C}}(Q) \Leftrightarrow Q \in \pi_{\mathscr{C}}(P)$. In particolare, un punto P appartiene alla propria polare se, e solo se, ${}^tPAP = 0$, ovvero se, e solo se, il punto P appartiene al supporto della conica. Vogliamo mostrare che, in quest'ultimo caso, il punto P è l'unica intersezione tra la retta polare e la conica $\mathscr{C}$ e quindi che la retta è la tangente alla conica nel punto P.

1.8 Osservazione. *Siano $P = \sigma\langle v\rangle$ un punto del supporto della conica non-degenere $\mathscr{C}$ ed $r = \pi_{\mathscr{C}}(P)$ la sua polare. Allora l'intersezione tra r e $\mathscr{C}$ è costituita dal solo punto P, con molteplicità 2; ovvero r è la tangente a $\mathscr{C}$ in P.*

dim. Che una conica intersechi una retta in (almeno) due punti, contati con le opportune molteplicità, è un'ovvia conseguenza del fatto che questa intersezione è determinata da un sistema di secondo grado ed i punti del supporto sono presi a coordinate in $\mathbb{C}$. Se poi $Q = \sigma\langle w\rangle$ fosse un punto di $\mathscr{C} \cap r$, distinto da P, allora $\langle v, w\rangle$ sarebbe un sottospazio isotropo di dimensione 2, perchè generato da due vettori isotropi, ortogonali tra loro. Quindi tutti i punti della retta r dovrebbero appartenere al supporto di $\mathscr{C}$, contro l'ipotesi che la conica sia non-degenere. **CVD** □

Remark. In generale, se $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ è l'equazione (omogenea) di una curva del piano proiettivo, la retta tangente alla curva in un suo punto P ha equazione $X_0\frac{\partial F}{\partial X_0}(P) + X_1\frac{\partial F}{\partial X_1}(P) + X_2\frac{\partial F}{\partial X_2}(P) = 0$; ed, analogamente, l'iperpiano tangente nel punto P all'ipersuperficie di equazione (omogenea) $F(X_0, \ldots, X_n) = 0$ in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ha

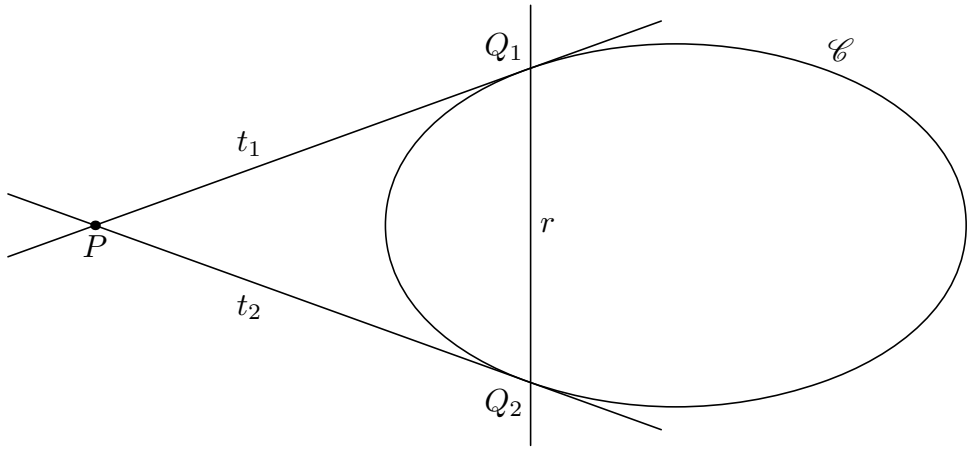
equazione $X_0 \frac{\partial F}{\partial X_0}(P) + \cdots + X_n \frac{\partial F}{\partial X_n}(P) = 0$. Si può verificare (ed il lettore è invitato a farlo) che, nel caso di una quadrica, l'iperpiano tangente in P viene a coincidere con l'iperpiano polare.

Esercizio 1.6. Si considerino in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la conica non degenere $\mathscr{C}$, di matrice A, e la retta r, di equazione omogenea $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$. Si mostri che la retta r è tangente a $\mathscr{C}$ se, e solo se, $rA^{-1}{}^t r = 0$, ove $r = (a_0, a_1, a_2)$ sono le coordinate plückeriane della retta (cf. VI.1.7). □

Esercizio 1.7. Si deduca dall'esercizio precedente che per ogni punto P di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, non appartenente al supporto di una conica non degenere $\mathscr{C}$, passano esattamente due rette distinte tangenti alla conica $\mathscr{C}$. □

Vogliamo dare una descrizione grafica della polare di un punto rispetto ad una conica e consideriamo perciò il disegno qui sotto.

(1.9)



Sia $\mathscr{C}$ una conica non degenere e sia P un punto, non appartenente al supporto di $\mathscr{C}$. Dal punto P escono due rette t_1 e t_2, tangenti a $\mathscr{C}$ rispettivamente nei punti Q_1 e Q_2. Vogliamo mostrare che la retta $r = Q_1 + Q_2$ è la polare di P. Infatti, poichè Q_1 appartiene al supporto di $\mathscr{C}$, la polare di Q_1 è la tangente t_1 e quindi P appartiene alla polare di Q_1 ed, analogamente P appartiene alla polare di Q_2. Dunque, sia Q_1 che Q_2 appartengono alla polare di P che, essendo una retta, è completamente determinata dal passaggio per questi due punti; ovvero $\pi_{\mathscr{C}}(P) = Q_1 + Q_2$.

Esercizio 1.8. Sia $\mathscr{C}$ una conica non degenere di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

(a) Si mostri che una retta s è tangente a $\mathscr{C}$ se, e solo se, è degenere la forma quadratica indotta da $\mathscr{C}$ sul sottospazio di $\mathbb{R}^3$ corrispondente alla retta r.

(b) Sia $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ la matrice di $\mathscr{C}$, e sia r la retta di equazione omogenea $x_0 = 0$. Si mostri che r è tangente a $\mathscr{C}$ se, e solo se, $\det A' = 0$, ove $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ è la matrice che si ottiene da A cancellando la prima riga e la prima colonna. □

*Esercizio 1.9. Sia r una retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, non tangente ad una conica non degenere $\mathscr{C}$.

(a) Si mostri che la corrispondenza che ad un punto P di r associa il punto $P' = \pi_{\mathscr{C}} \cap r$ è una involuzione della retta r (cf. *Definizione VI.4.5*).

(b) Siano R_1 ed R_2 i punti di intersezione della conica con la retta r, e siano P e P' come nel punto precedente. Si mostri che $(R_1, R_2, P, P') = -1$. □

Da ultimo, vogliamo occuparci di capire che relazioni vi siano tra le matrici di due coniche che si ottengano l'una dall'altra con un cambiamento di coordinate proiettive, e quale sia la forma "più semplice" che possa assumere l'equazione di una conica cambiando opportunamente le coordinate in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$; ovvero vogliamo occuparci della *classificazione proiettiva* delle coniche.

Poichè una conica è, secondo le nostre definizioni, una forma quadratica (a meno di un fattore di proporzionalità), la classificazione sarà analoga a quella fatta nel Capitolo IV e dipenderà perciò dal

corpo di base. Esponiamo rapidamente i punti fondamentali. Consideriamo lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con le coordinate omogenee associate alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, fissiamo un'altra base, $\mathcal{W}$, di $\mathbb{R}^3$ e sia $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(1)$ la matrice del cambiamento di base. Se $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ed $X' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ sono le coordinate di uno stesso punto $\sigma\langle v\rangle$, rispettivamente nel sistema di coordinate associato alla base canonica e nel sistema associato alla base $\mathcal{W}$, allora deve aversi $X = PX'$. Se A è la matrice di una conica non degenere $\mathscr{C}$, rispetto alla base canonica, allora la matrice della stessa conica rispetto alla base $\mathcal{W}$ sarà $B = {}^tPAP$, perchè un punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, di coordinate X' rispetto alla base $\mathcal{W}$ appartiene al supporto di $\mathscr{C}$ se, e solo se, ${}^t(PX')A(PX') = 0$; e, per la *Proposizione VII.1.2*, ciò significa esattamente che $B = {}^tPAP$ è una matrice della conica $\mathscr{C}$ rispetto al riferimento associato a $\mathcal{W}$. Ogni altra matrice di $\mathscr{C}$ rispetto a questo riferimento sarà proporzionale a B e quindi, possiamo dare la seguente definizione.

1.10 Definizione. Due coniche (risp. quadriche) si dicono *proiettivamente equivalenti* se esiste una proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (risp. di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$) che trasformi l'una nell'altra. Due matrici simmetriche A e B si dicono *proiettivamente equivalenti* se esistono una matrice invertibile P ed una costante non-nulla c tali che $B = c{}^tPAP$.

È chiaro che le coniche degeneri sono classificate dal loro rango e, per quelle di rango due, dal fatto di spezzarsi in due rette reali oppure in due rette complesse coniugate; ciò perchè la relazione di equivalenza proiettiva non modifica il rango delle matrici corrispondenti e perchè non si possono avere cambiamenti di coordinate *reali* che mandino punti a coordinate reali in punti con coordinate non-reali.

Ci interessa ora capire quando due coniche non degeneri siano proiettivamente equivalenti ed anche qui vi è differenza tra il corpo di base reale ed il corpo complesso. Infatti, sul corpo complesso tutte le coniche non-degeneri sono proiettivamente equivalenti, perchè per ogni applicazione bilineare simmetrica, non-degenere, esiste una base ortonormale (cf. *Osservazione IV.2.4*) e quindi esiste un riferimento rispetto a cui la conica abbia matrice $\mathbf{1}_3$; dunque *ogni matrice simmetrica non-degenere è proiettivamente equivalente su* $\mathbb{C}$ *alla matrice identica*. Sui reali, invece, le forme quadratiche sono classificate dalla loro segnatura o indice di inerzia (cf. *Teorema di Sylvester IV.2.7*), e quindi, visto che nell'equivalenza proiettiva, possiamo modificare le matrici anche con la moltiplicazione per una costante, possiamo concludere che sui reali vi sono due classi distinte di coniche non-degeneri rispetto all'equivalenza proiettiva:

- la classe delle *coniche senza punti reali*, con segnatura ± 3, e
- la classe delle *coniche con punti reali*, con segnatura ± 1. Ogni conica non-degenere appartiene ad una di queste due classi. In particolare, possiamo mettere in evidenza un rappresentante per ogni classe, scrivendo

Conica senza punti reali
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
eq. canonica: $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$

Conica con punti reali
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
eq. canonica: $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$

⋆Esercizio 1.10. Sempre usando il Teorema di Sylvester (cf. *Teorema di Sylvester IV.2.7*), si classifichino dal punto di vista dell'equivalenza proiettiva le quadriche nella retta proiettiva reale $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e nello spazio tridimensionale $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ e si dia per ciascuna classe la matrice di una rappresentante della classe stessa. □

Coniche e proiettività tra fasci di rette. Sia $\mathscr{C}$ una conica non degenere e sia C un punto del supporto di $\mathscr{C}$. Allora la corrispondenza che associa ad ogni retta, r, per C il punto di $r \cap \mathscr{C}$ diverso da C (o C stesso, se r è tangente alla conica in C), è una corrispondenza biunivoca tra il fascio di rette, C^*, di centro C ed il supporto di $\mathscr{C}$.

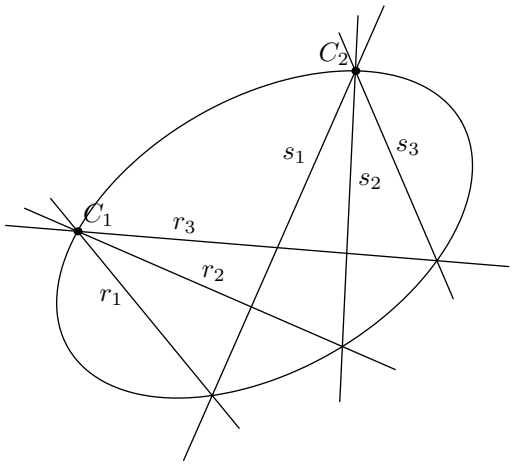
Questa corrispondenza ci permette, in particolare, di definire il birapporto tra quattro punti di una conica come il birapporto tra le corrispondenti rette del fascio. La definizione è ben posta se non dipende dalla scelta del punto C. Vale infatti il risultato seguente.

1.11 Proposizione. *Sia $\mathscr{C}$ una conica del piano proiettivo e C_1, C_2 due punti distinti del supporto di $\mathscr{C}$. La corrispondenza che ad ogni retta, r, del fascio di centro C_1 associa la retta s del fascio per C_2 passante per il punto di $r \cap \mathscr{C}$ diverso da C_1 ($s = C_1 \vee C_2$, se r è tangente alla conica) è una proiettività tra i due fasci di rette.*

Dati due punti distinti, C_1 e C_2, del piano proiettivo, ed una proiettività $\rho : C_1^* \to C_2^*$ tra i fasci di rette di centro C_1 e C_2, allora l'insieme dei punti $r \cap \rho(r)$, al variare di r in C_1^* è il supporto di una conica. In particolare, la conica è degenere se, e solo se, ρ è una prospettività.

dim. Scegliamo un riferimento sul piano proiettivo che abbia come punti base C_1, C_2 ed il polo, C_0, della retta $C_1 \vee C_2$ e scegliamo il punto unità in modo che la matrice di $\mathscr{C}$ sia $A = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix}$. Una generica retta r di C_1^* ha equazione omogenea $r : ax_0 + bx_2 = 0$ e la coppia (a, b) è un sistema di coordinate omogenee sul fascio. Analogamente, una retta di C_2^* ha equazione omogenea $s : cx_0 + dx_1 = 0$ e la coppia (c, d) è un sistema di coordinate omogenee sul fascio. La retta $r = (a, b) \in C_1^*$ interseca la conica nei due punti corrispondenti alle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} ax_0 + bx_2 = 0 \\ x_0^2 + 2x_1x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} ax_0 + bx_2 = 0 \\ (b^2x_2 + 2a^2x_1)x_2 = 0 \end{cases}.$$



La retta corrispondente è quindi la retta $C_2 \vee Q$, ove $Q = \begin{pmatrix} 2ab \\ b^2 \\ -2a^2 \end{pmatrix}$, ovvero la retta di equazione $bx_0 - 2ax_1 = 0$, che ha coordinate omogenee $(b, -2a)$ in C_2^* e quindi la corrispondenza tra i due fasci è una proiettività che ha come soprastante l'applicazione lineare $(a, b) \mapsto (a, b) \begin{pmatrix} 0&-2\\1&0 \end{pmatrix}$.

Dimostriamo ora il secondo asserto dell'enunciato e supponiamo ancora che $C_1 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}$ e $C_2 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}$ e di aver fissato le coordinate omogenee sui fasci C_1^* e C_2^* come sopra. Sia $(a, b) \mapsto (a, b) \begin{pmatrix} \alpha&\beta\\\gamma&\delta \end{pmatrix}$. una soprastante della proiettività ρ ed osserviamo che il sistema lineare

$$\begin{cases} ax_0 + bx_2 = 0 \\ (\alpha a + \gamma b)x_0 + (\beta a + \delta b)x_1 = 0 \end{cases}$$

ha soluzione per ogni scelta dei parametri omogenei (a, b). Considerando a e b come incognite, si tratta di un sistema omogeneo di due equazioni in due incognite che ha soluzioni non banali se, e solo se, il determinante della matrice dei coefficienti si annulla; ovvero se, e solo se,

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_2 \\ \alpha x_0 + \beta x_1 & \gamma x_0 + \delta x_1 \end{pmatrix} = \gamma x_0^2 + \delta x_0x_1 - \alpha x_0x_2 - \beta x_1x_2 = 0.$$

Dunque, il luogo dei punti $r \cap \rho(r)$ è il supporto della conica di matrice $\begin{pmatrix} 2\gamma&\delta&-\alpha\\\delta&0&-\beta\\-\alpha&-\beta&0 \end{pmatrix}$, che è una conica degenere se, e solo se, $\beta = 0$, ovvero se, e solo se, la retta $C_1 \vee C_2$ è unita nella proiettività ρ. **CVD** □

Vediamo ora un calcolo esplicito.

Esercizio 1.11. *Si consideri la proiettività* $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, *di matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, *ed il punto* $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Si determini l'equazione della conica formata dai punti* $r \cap f(r)$, *al variare di* r *nel fascio di centro* P.

Svolgimento. Le rette del fascio di centro P vengono trasformate da f nelle rette del fascio di centro $f(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e, data una generica retta del piano, di coordinate plückeriane (a_0, a_1, a_2), la sua immagine tramite la proiettività f è la retta di coordinate plückeriane $(a_0, a_1, a_2)B$, ove $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, è una matrice della proiettività inversa f^{-1}.

Le coordinate plückeriane di tutte le rette del fascio di centro P sono combinazione lineare di $r_1 = (1, 0, -1)$ ed $r_2 = (1, -1, 0)$. Le rette corrispondenti nel fascio di centro $f(P)$ sono $r_1B = (1, -2, 1)$ ed $r_2B = (2, -1, 2)$ e quindi i punti della conica cercata sono le soluzioni $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dei sistemi lineari

$$\begin{cases} a_1 r_1 X + a_2 r_2 X = 0 \\ a_1 r_1 BX + a_2 r_2 BX = 0 \end{cases},$$

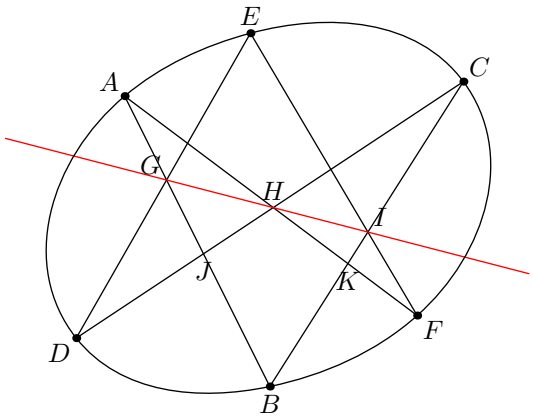
al variare dei parametri omogenei (a_1, a_2). Dunque, considerando a_1 ed a_2 come incognite, si tratta di un sistema omogeneo di due equazioni in due incognite che ha soluzioni non banali e quindi il determinante della matrice dei coefficienti si annulla; ovvero

$$\det \begin{pmatrix} r_1 X & r_2 X \\ r_1 BX & r_2 BX \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \det \begin{pmatrix} x_0 - x_2 & x_0 - x_1 \\ x_0 - 2x_1 + x_2 & 2x_0 - x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = 0$$

e quindi $(x_0 - x_2)(2x_0 - x_1 + 2x_2) - (x_0 - x_1)(x_0 - 2x_1 + x_2) = 0$ è l'equazione della conica cercata. □

Esercizio 1.12. Si dualizzi la costruzione dell'asse di collineazione (cf. *Proposizione VI.5.9*) per costruire la proiettività tra due fasci di rette. Si costriscano in tal modo i punti di una conica di cui siano dati cinque punti. □

Vediamo ora una conseguenza della costruzione fatta sopra. Nel piano proiettivo, siano dati sei punti A, B, C, D, E, F, nell'ordine, quali vertici consecutivi di un esagono e si considerino le intersezioni dei lati opposti, ovvero i punti $G = (A \vee B) \cap (D \vee E)$, $H = (A \vee F) \cap (C \vee D)$, $I = (B \vee C) \cap (E \vee F)$ (cf. la figura qui sotto).



Vogliamo mostrare il seguente

1.12 Teorema. [Pascal] *L'esagono di vertici* A, B, C, D, E, F *è inscritto in una conica se, e solo se, le intersezioni dei lati opposti,* $G = (A \vee B) \cap (D \vee E)$, $H = (A \vee F) \cap (C \vee D)$, $I = (B \vee C) \cap (E \vee F)$, *sono allineate.*

dim. Consideriamo gli ulteriori punti $J = (A \vee B) \cap (C \vee D)$ e $K = (A \vee F) \cap (B \vee C)$ (cf. la figura precedente). Supponiamo che i tre punti, G, H, I, siano allineati e dimostriamo che la conica che passa per A, C, D, E, F passa

anche per il punto B. Per quanto visto nella *Proposizione VII.1.11*, questa conica determina una proiettività del fascio di rette di centro D nel fascio di rette di centro F, che manda ordinatamente le rette $D \vee A$, $D \vee E$, $D \vee C$ sulle rette $F \vee A$, $F \vee E$, $F \vee C$. Dobbiamo quindi mostrare che questa proiettività manda la retta $D \vee B$ sulla retta $F \vee B$. Poiché le proiettività conservano i birapporti, è sufficiente dimostrare che $(D \vee A, D \vee E, D \vee C, D \vee B) = (F \vee A, F \vee E, F \vee C, F \vee B)$. Osserviamo quindi che

$$(D \vee A, D \vee E, D \vee C, D \vee B) = (A, G, J, B) = (K, I, C, B) = (F \vee A, F \vee E, F \vee C, F \vee B)$$

ove la prima uguaglianza si ottiene intersecando le rette con $A \vee B$, la seconda uguaglianza si ottiene proiettando la retta $A \vee B$ su $C \vee B$ dal punto H e l'ultima si ottiene prendendo le rette per F ed i punti di $C \vee B$.

Viceversa, supponiamo ora che i vertici dell'esagono siano su una conica e mostriamo che i tre punti G, H, I sono allineati. In base alla Proposizione citata, si ha

$$(A, G, J, B) = (D \vee A, D \vee E, D \vee C, D \vee B) = (F \vee A, F \vee E, F \vee C, F \vee B) = (K, I, C, B).$$

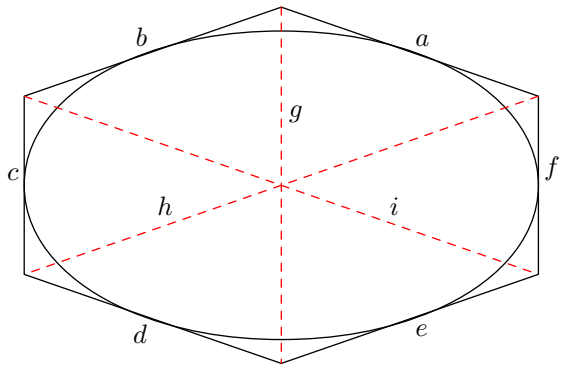
Dunque, considerando la proiezione di centro H dalla retta $A \vee B$ sulla retta $C \vee B$, si ha, per costruzione che il punto B è unito, il punto J va sul punto C ed il punto A va sul punto K, essendo allineati A, H, K ed F. Per quanto visto sui birapporti il punto G deve corrispondere al punto I e quindi i tre punti G, H, I sono allineati. **CVD** □

Osserviamo che. il fatto che l'esagono in figura non sia convesso non ha alcuna rilevanza nella dimostrazione, ed invitiamo il lettore a disegnare l'analoga figura nel caso di un esagono convesso.

Esercizio 1.13. Il teorema di Pascal può essere utilizzato per costruire un ulteriore punto di una conica di cui siano noti cinque punti. Invitiamo il lettore ad esplicitare questa costruzione. □

Dualizziamo il teorema di Pascal e, per Dualità Proiettiva, è verificato il seguente

1.13 Teorema. [Brianchon] *L'esagono di lati a, b, c, d, e, f è circoscritto ad una conica se, e solo se, le rette congiungenti vertici opposti, $g = (a \cap b) \vee (d \cap e)$, $h = (a \cap f) \vee (c \cap d)$, $i = (b \cap c) \vee (e \cap f)$, concorrono ad uno stesso punto.*



2. Coniche nel piano affine

Abbiamo visto nel capitolo precedente che lo spazio affine si immerge nello spazio proiettivo della stessa dimensione scegliendo dentro a quest'ultimo un iperpiano (il cosiddetto *iperpiano improprio*), i cui punti vengono ad essere le direzioni delle rette dello spazio affine (cf. Cap.VI, §.3). Nel caso del piano affine, l'iperpiano improprio è una retta e la posizione della conica rispetto a questa retta sarà un tratto caratteristico della conica stessa. Come detto all'inizio di questo capitolo, supporremo –salvo diverso avviso– che l'immersione di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sia fatta scegliendo come retta impropria la retta di equazione $x_0 = 0$ e prendendo come coordinate nel piano affine $x = \frac{x_1}{x_0}$ ed $y = \frac{x_2}{x_0}$; quindi si passerà da un'equazione affine di secondo grado, $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$, alla equazione omogenea corrispondente, associandole il polinomio omogeneo di secondo grado $x_0^2 f(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_0x_1 + 2ex_0x_2 + fx_0^2$. In tal modo si vede che ogni conica affine (ovvero ogni polinomio di secondo grado non omogeneo in x ed y) corrisponde ad una conica del piano proiettivo e guadagna così i suoi "punti impropri", ovvero i punti di intersezione con la retta impropria. In particolare, diremo che la conica affine è *non-degenere* se lo è la corrispondente conica omogenea.

Esercizio 2.1. Si considerino in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la retta $r : x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$ ed il piano affine che si ottiene prendendo r come retta impropria.

(a) Si mostri che $x = \frac{x_0}{x_0+x_1-2x_2}$ ed $y = \frac{x_1}{x_0+x_1-2x_2}$ sono coordinate affini per tutti i punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che non stiano in r.
(b) Si mostri che ogni punto (proprio) di questo piano affine ha una terna di coordinate omogenee del tipo $\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ x+y-1 \end{pmatrix}$ e che ogni punto improprio ha coordinate omogenee del tipo $\begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2x_1 \\ x_0+x_1 \end{pmatrix}$.
(c) Qual'è l'equazione omogenea della conica di equazione affine $x^2 + y^2 - 1$?
(d) Qual'è l'equazione affine della conica di equazione omogenea $2x_1^2 + 4x_2^2 + x_0x_1 - 2x_0x_2 - 4x_1x_2$?
(e) Si determinino i punti impropri delle coniche dei punti (c) e (d). □

Possiamo distinguere le coniche affini in due grandi classi.

2.1 Definizione. Sia $\mathscr{C}$ una conica non-degenere del piano affine. La conica $\mathscr{C}$ è una *parabola* se, e solo se, è tangente alla retta impropria. La conica $\mathscr{C}$ è una *conica a centro* se non è tangente alla retta impropria; in tal caso, si chiama *centro* il polo della retta impropria. In particolare, una conica a centro reale si dice un'*iperbole* se la sua intersezione con la retta impropria è costituita da due punti reali distinti, mentre si dice un'*ellisse* se la sua intersezione con la retta impropria è costituita da due punti complessi coniugati.

Le definizioni qui sopra si possono estendere alle quadriche non-degeneri, e si parla di *paraboloide* quando una quadrica è tangente all'iperpiano improprio, mentre si parla di *quadrica a centro* in caso contrario ed il *centro* è ancora il polo dell'iperpiano improprio. Inoltre, le quadriche a centro reali si chiamano *iperboloidi* quando l'intersezione con l'iperpiano improprio contiene punti reali, mentre si dicono *ellissoidi* quando l'intersezione con l'iperpiano improprio non contiene alcun punto reale.

Consideriamo la conica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e la sua intersezione con la retta impropria r_∞, di equazione $x_0 = 0$. Un punto appartiene all'intersezione se, e solo se, è una soluzione del sistema (di secondo grado)

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0 \end{cases}$$

che ha una radice doppia, oppure due radici distinte (eventualmente complesse) a seconda che il discriminante dell'equazione di secondo grado, $4(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})$, si annulli o meno. Il termine tra parentesi (ovvero $1/4$ del discriminante) è l'opposto del determinante della sottomatrice A' di A, che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna. In particolare, il segno del discriminante, permette di decidere se vi siano, o meno, soluzioni reali e quindi possiamo raccogliere queste osservazioni nella seguente

2.2 Proposizione. *Si consideri l'immersione di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che ha la retta $r_\infty : x_0 = 0$ come retta impropria. Sia $\mathscr{C}$ una conica non-degenere del piano affine, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

La conica $\mathscr{C}$ è una parabola se, e solo se, $\det A' = 0$*; ove*

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Se $\mathscr{C}$ è una conica a centro, allora è un'iperbole se, e solo se, $\det A' < 0$*, mentre è un'ellisse se, e solo se,* $\det A' > 0$.

Consideriamo ora una conica non-degenere $\mathscr{C}$ del piano affine reale $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, immerso in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con retta impropria $r_\infty : x_0 = 0$. Sia A la matrice di $\mathscr{C}$ e si considerino le sottomatrici $A' = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ ed $a = \left(\begin{smallmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{smallmatrix}\right)$. Allora la matrice A si può scrivere, a blocchi, nella forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & {}^t a \\ a & A' \end{pmatrix}$$

ed analogamente, si possono scrivere le coordinate omogenee di un punto del piano affine nella forma $P = \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$, ove $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è la coppia di coordinate affini del punto. In particolare, se $\mathscr{C}$ è una conica a centro, allora le coordinate del centro si determinano imponendo la condizione

$$(1, {}^t p) \begin{pmatrix} a_{00} & {}^t a \\ a & A' \end{pmatrix} = \rho(1, 0, 0) \qquad \text{ovvero} \qquad A'p = -a \tag{2.3}$$

dato che A (e quindi A') è una matrice simmetrica e ρ deve soddisfare alla sola condizione di essere una costante diversa da 0[(†)].

Possiamo occuparci ora della classificazione affine delle coniche, ovvero quando due coniche si possono trasformare l'una nell'altra tramite un'affinità del piano in cui giace. Come nel caso proiettivo, vogliamo dare una definizione precisa.

2.4 Definizione. Due coniche (risp. quadriche) si dicono *affinemente equivalenti* se esiste una affinità di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ (risp. di $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$) che trasformi l'una nell'altra. Due matrici simmetriche A e B si dicono *affinemente equivalenti* se esistono la matrice di un'affinità P ed una costante non-nulla c tali che $B = c\,{}^t P A P$.

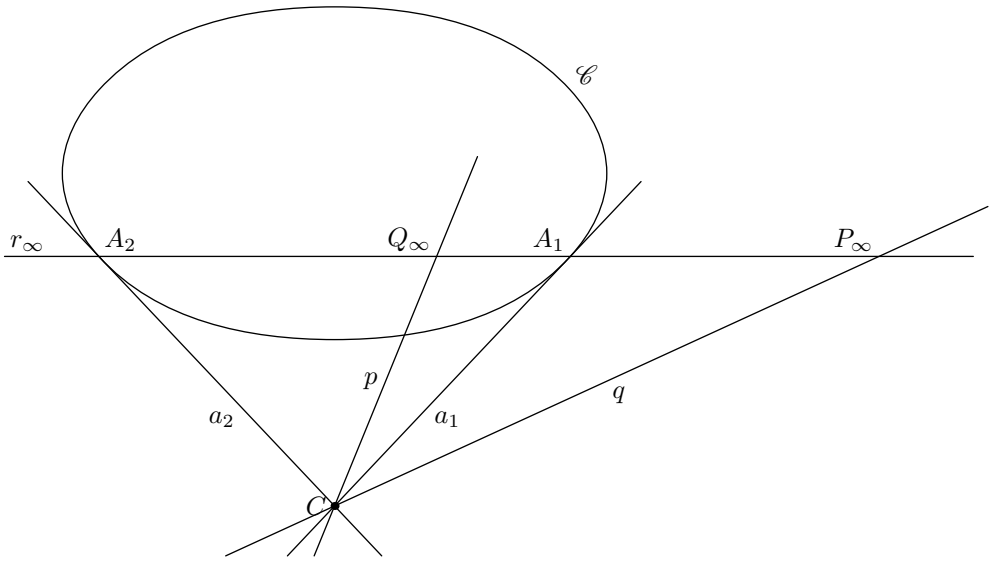
Le matrici delle affinità sono particolari matrici invertibili e quindi due coniche affinemente equivalenti sono equivalenti anche dal punto di vista proiettivo (cf. *Definizione VII.1.10*). La classificazione affine è più fine, perchè le affinità sono quelle particolari proiettività che trasformano in sé l'iperpiano improprio (e quindi inducono una biiezione tra i punti questo piano). In particolare, ciò significa che non sarà mai possibile trovare una trasformazione affine che porti una parabola su di un'iperbole, perchè dovrebbe mandare l'unico punto improprio della prima conica sui due punti distinti della seconda. Analogamente, non sarà

(†) Si osservi che, essendo A simmetrica e non degenere, se si ha $A'p + a = 0$ allora, necessariamente, $a_{00} + {}^t a p \neq 0$ (perchè?).

mai possibile trasformare una parabola in un'ellisse o quest'ultima in un'iperbole tramite trasformazioni affini reali.

Vogliamo mostrare che la distinzione in iperboli, ellissi e parabole esaurisce la classificazione affine delle coniche non-degeneri. Per fare questo, mostreremo che ogni conica appartenente ad uno di questi tipi può essere portata ad una stessa forma canonica attraverso un opportuno cambiamento di coordinate affini nel piano.

Cominciamo con un'iperbole non-degenere $\mathscr{C}$, ed indichiamo con C il suo centro. Consideriamo ora un qualsiasi punto, P_∞, della retta impropria, distinto dalle due intersezioni, A_1 ed A_2, di $\mathscr{C}$ con r_∞ (si veda il disegno qui sotto).



(2.5)

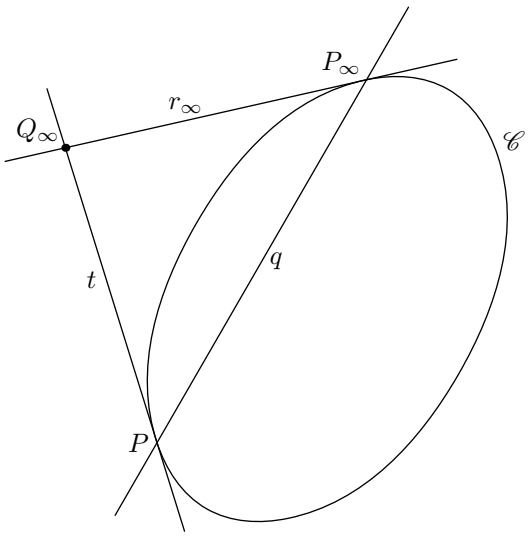
La retta impropria è la polare del punto C e quindi la polare p di P_∞ è una retta passante per il centro C ed intersecherà la retta impropria, in un punto $Q_\infty \neq P_\infty$. Poichè Q_∞ appartiene sia alla polare di P_∞ che alla polare di C, la sua polare q è la retta $C + P_\infty$. Prendendo un riferimento affine che abbia come origine il punto $C = \sigma\langle w_0\rangle$ e come assi le due rette p e q, ovvero le rette di direzioni $P_\infty = \sigma\langle w_1\rangle$ e $Q_\infty = \sigma\langle w_2\rangle$, si ha che la matrice di $\mathscr{C}$ rispetto a questo riferimento è una matrice diagonale. Inoltre, poichè la conica è un'iperbole, la sua restrizione alla retta impropria $r_\infty = \sigma\langle w_1, w_2\rangle$ è una forma quadratica non-definita (ha due vettori isotropi reali, corrispondenti ai punti A_1 ed A_2). Quindi la forma quadratica corrispondente a $\mathscr{C}$ ha indice di inerzia ± 1 e quindi possiamo moltiplicare i vettori w_0, w_1, w_2 per opportune costanti ed, eventualmente, cambiare di segno la matrice, di modo che la forma quadratica si scriva come $-x_0^2 + x_1^2 - x_2^2$.

Le rette per il centro C ed i due punti impropri A_1 ed A_2 sono anche le tangenti alla conica in tali punti (cf. VII.1.9), e quindi sono gli *asintoti* dell'iperbole.

Un discorso analogo si può fare per l'ellisse. Ovvero, prendere un riferimento che abbia come origine il centro della conica e come assi due rette per il centro, contenenti l'una il polo dell'altra. In questo caso la restrizione della conica alla retta impropria è una forma quadratica definita e quindi i possibili valori dell'indice di inerzia sono ± 3, e si tratta di un'*ellisse senza punti reali*, oppure ± 1, e si tratta di un'*ellisse con punti reali*. Nei due casi possiamo ancora normalizzare opportunamente i vettori e moltiplicare per un segno affinchè la forma quadratica diventi $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ nel caso della conica priva di punti reali e $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ nell'altro caso.

Dopo aver visto tutte le coniche a centro, possiamo considerare una parabola $\mathscr{C}$. Indichiamo con P_∞ il punto di intersezione della conica con la retta impropria, r_∞, e sia Q_∞ un qualsiasi altro punto di tale retta. La retta impropria è la tangente a $\mathscr{C}$ in P_∞, ovvero la polare di questo punto (cf. *Osservazione VII.1.8*)

e ciò significa che la polare q di Q_∞ passa per P_∞ ed interseca la parabola in un altro punto (proprio) P e la retta $t = P + Q_\infty$ è la tangente alla conica in P (cf. VII.1.9 e vedi il disegno qui sotto).



(2.6)

Prendiamo ora un riferimento che abbia P come origine e t e q rispettivamente come assi delle ascisse e delle ordinate. Il punto $P = \sigma\langle v_0\rangle$ appartiene al supporto della conica, mentre $Q_\infty = \sigma\langle v_1\rangle$, la direzione della retta t, non vi appartiene e sulla sua retta polare, ci sono sia P che $P_\infty = \sigma\langle v_2\rangle$. Quindi normalizzando opportunamente i vettori e scegliendo il fattore di proporzionalità, possiamo supporre che la forma quadratica associata alla parabola, in questo sistema di riferimento, sia $x_1^2 - 2x_0x_2$.

Riassumendo la discussione possiamo quindi scrivere le matrici delle rappresentanti delle coniche affini, non degeneri, e le corrispondenti equazioni canoniche (in coordinate affini); ovvero

ellisse senza punti reali	ellisse con punti reali
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
eq. canonica: $1 + X^2 + Y^2 = 0$	eq. canonica: $-1 + X^2 + Y^2 = 0$
parabola	**iperbole**
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
eq. canonica: $-2Y + X^2 = 0$	eq. canonica: $-1 + X^2 - Y^2 = 0$

2.7 Osservazione. Vogliamo applicare le nostre conoscenze per studiare la conica di equazione affine $\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 10xy + 4x - 4y + \frac{5}{3} = 0$. Supponiamo che il piano affine sia immerso nel piano proiettivo nel modo consueto (retta impropria $r_\infty : x_0 = 0$). Omogeneizzando l'equazione, si ottiene la forma quadratica di matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix},$$

che rappresenta un'iperbole non-degenere, essendo $\det A = -8 \neq 0$ e $\det A' = -24 < 0$ (cf. *Proposizione VII.2.2*). Il centro $C = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ (coordinate omogenee), si determina risolvendo il sistema

$$ {}^tCA = \rho(1,0,0), \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x - 5y = -2 \\ -5x + y = 2 \end{cases}; $$

e quindi il centro ha coordinate affini $C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ e quindi coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il centro poteva essere trovato anche come intersezione degli asintoti. Infatti i punti impropri dell'iperbole sono le soluzioni del sistema

$$ \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 - 10x_1x_2 + x_2^2 = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5+2\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5-2\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} $$

e gli asintoti sono le polari di questi due punti, ovvero

$$ a_1 : 2\sqrt{6}x - (24 + 10\sqrt{6})y + 8 + 4\sqrt{6} = 0 \qquad \text{ed} \qquad a_2 : -2\sqrt{6}x - (24 - 10\sqrt{6})y + 8 - 4\sqrt{6} = 0, $$

che si intersecano nel punto C. Un punto improprio (diverso da A_1 ed A_2) è $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, che ha come polare la retta per il centro e $Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se consideriamo l'affinità di matrice

$$ X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{e si ha} \qquad -3\ {}^tXAX = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, $$

che è la matrice canonica dell'iperbole. Quindi, il riferimento che ha l'origine nel centro $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ e come generatori degli assi coordinati, rispettivamente i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{6\sqrt{2}} \\ \frac{1}{6\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}$, porta l'iperbole $\mathscr{C}$ nella sua forma canonica.

Esercizio 2.2. Si mostri che la conica $\mathscr{C}$, di equazione affine $\mathscr{C} : 10x^2 - 20xy - 5y^2 - 12x + 6y - 6 = 0$, è un'iperbole non-degenere e se ne determinino centro ed asintoti. □

Esercizio 2.3. Si consideri in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ la conica di equazione affine $\mathscr{C} : 11x^2 - 6xy + 19y^2 - 60x - 20y = 0$. Si classifichi la conica dal punto di vista affine e si determini un riferimento affine rispetto a cui $\mathscr{C}$ abbia matrice canonica. □

Esercizio 2.4. Si consideri in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ la conica di equazione affine $\mathscr{C} : 4x^2 + y^2 - 4xy - 6x - 12y + 30 = 0$. Si classifichi la conica dal punto di vista affine e si determini un riferimento affine rispetto a cui $\mathscr{C}$ abbia matrice canonica. □

Esercizio 2.5. Si consideri in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ la conica di equazione affine $\mathscr{C} : 11x^2 - 4xy + 14y^2 + 22x - 4y + 5 = 0$. Si classifichi la conica dal punto di vista affine e si determini un riferimento affine rispetto a cui $\mathscr{C}$ abbia matrice canonica. □

Esercizio 2.6. Si consideri nel piano proiettivo reale la conica $\mathscr{C}$, di equazione omogenea $\mathscr{C} : x_0^2 + 3x_1^2 - 4x_0x_2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 = 0$. Si classifichi tale conica nel piano affine che si ottiene prendendo come retta impropria la retta r, di equazione omogenea $r : x_0 - x_2 = 0$. Si determinino inoltre centro ed asintoti di tale conica. □

3. Coniche nel piano euclideo

Si parla di piano euclideo (risp. spazio euclideo, in dimensione qualunque) quando sui vettori del piano (risp. dello spazio) affine reale viene posta una forma quadratica definita positiva. In questo ambito, si usano prevalentemente sistemi di riferimento ortonormali e trasformazioni affini che siano isometrie; in questo modo, le classi di coniche che erano state individuate nello spazio affine si suddivideranno in modo più fine, in accordo con opportuni parametri. Come sempre, diamo una definizione precisa.

3.1 Definizione. Due coniche (risp. quadriche) si dicono *isometriche* se esiste un'isometria del piano euclideo (risp. dello spazio euclideo) che trasformi l'una nell'altra. Due matrici simmetriche A e B rappresentano coniche *isometriche* se esistono la matrice di un'isometria P ed una costante non-nulla c tali che $B = c\,{}^tPAP$.

Consideriamo lo spazio euclideo di dimensione n immerso nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, tramite la scelta dell'iperpiano improprio di equazione $x_0 = 0$ e supponiamo che le coordinate affini, x_i/x_0, per $i = 1, \dots, n$, siano riferite ad una base ortonormale, ovvero che l'assoluto (cf. *Osservazione VI.5.11*) sia la quadrica dell'iperpiano improprio di equazione

$$\mathscr{H} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \end{cases}. \tag{3.2}$$

Le matrici delle isometrie sono particolari matrici di affinità, ovvero matrici del tipo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & {}^t0 \\ t & R \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R}),$$

ove $t \in \mathbb{R}^n$ ed R è una matrice ortogonale di ordine n, cioè ${}^tRR = \mathbf{1}_n$. Quindi la classificazione metrica raffina la classificazione affine e ci porterà ad introdurre nuovi invarianti (per isometria) tramite i quali distinguere le coniche all'interno delle classi descritte nel caso affine.

Prima di descrivere la classificazione delle coniche nel piano euclideo, vediamo un problema che può aiutare a prendere familiarità con i concetti appena introdotti.

Esercizio 3.1. *Nello spazio euclideo tridimensionale, immerso nel modo usuale in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, si consideri il quadrilatero $P_1P_2P_3P_4$, contenuto nel piano $\pi : z = 0$, avente come vertici i punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

e come lati le rette

$$\ell_1 = \begin{cases} 4y - x + 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \ell_2 = \begin{cases} 2y + x - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \ell_3 = \begin{cases} 2y - x + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \ell_4 = \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Sia dato inoltre il piano $\sigma : x - y + 2z = 2$.

(a) Si dica se esistono dei punti P dello spazio euclideo tali che, proiettando π su σ dal centro P, il quadrilatero dato abbia come immagine un parallelogramma. In caso affermativo si determinino tutti i punti P soddisfacenti a questa condizione.

(b) Siano $P_5 = \ell_1 \cap \ell_3$, $P_6 = \ell_2 \cap \ell_4$ ed $r = P_5 + P_6$. Detti $D_1 = (P_1 + P_3) \cap r$ e $D_2 = (P_2 + P_4) \cap r$, si determinino (se esistono) due punti C e $\overline{C}$ della retta r, per cui si abbia $(C, \overline{C}, P_5, P_6) = -1 = (C, \overline{C}, D_1, D_2)$.

(c) Si dica infine se esiste un punto P dello spazio euclideo tale che, proiettando π su σ dal centro P, il quadrilatero dato abbia come immagine un quadrato.

Svolgimento. (a). Consideriamo i punti di intersezione tra i lati opposti del quadrilatero, ovvero

$$P_5 = \ell_1 \cap \ell_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_6 = \ell_2 \cap \ell_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{e sia} \quad r = P_5 + P_6 : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Allora la proiezione di centro P del quadrilatero $P_1P_2P_3P_4$ su σ è un parallelogramma se, e solo se, la retta r si proietta sulla retta impropria di σ, ovvero se, e solo se, $P+r$ è un piano parallelo a σ. Quindi, per soddisfare alle condizioni poste, il punto P deve appartenere al piano $\sigma' : x-y+2z=0$, ma non alla retta r.

(b). Si ha

$$P_1+P_3 : \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad P_2+P_4 : \begin{cases} 2y-2x+3=0 \\ z=0 \end{cases}$$

e quindi D_1 è l'origine dello spazio euclideo mentre D_2 è il punto improprio della retta r, ovvero il punto di coordinate omogenee $D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Per determinare i punti C e $\overline{C}$ di r, possiamo considerare coordinate affini sulla retta r e prendere quindi il sistema di riferimento che ha

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ punto improprio,} \qquad D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ origine,} \qquad P_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ punto unità.}$$

Allora, le coordinate affini z e $\overline{z}$ di C e $\overline{C}$ in tale riferimento devono soddisfare alle condizioni

$$\begin{cases} -1 = (C, \overline{C}, P_5, P_6) = (z, \overline{z}, -1, 1) = \frac{(1-\overline{z})(-1-z)}{(1-z)(-1-\overline{z})} \\ -1 = (C, \overline{C}, D_1, D_2) = (z, \overline{z}, 0, \infty) = \frac{(\infty-\overline{z})(0-z)}{(\infty-z)(0-\overline{z})} \end{cases}$$

da cui si ottiene la soluzione $z=i$, $\overline{z}=-i$ e quindi i punti

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \overline{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c). La proiezione di centro P del quadrilatero $P_1P_2P_3P_4$ su σ è un quadrato se, e solo se, l'immagine è un parallelogramma con i lati perpendicolari tra loro (rettangolo) e le diagonali perpendicolari tra loro (rombo). Ciò accade se, e solo se, i punti C e $\overline{C}$ si proiettano sui punti ciclici I ed $\overline{I}$ del piano σ. Indicato con $\mathscr{H}$ l'assoluto dello spazio euclideo, si ha

$$\{I, \overline{I}\} = \sigma \cap \mathscr{H} : \begin{cases} -2x_0+x_1-x_2+2x_3=0 \\ x_0=0 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=0 \end{cases},$$

e quindi $I = \begin{pmatrix} 0 \\ -2+i\sqrt{6} \\ 2+i\sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix}$ ed $\overline{I} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2-i\sqrt{6} \\ 2-i\sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix}$. Dunque, vi sono due punti X ed Y, da cui il quadrilatero si proietta in un quadrato e sono precisamente $X = (C+I) \cap (\overline{C}+\overline{I})$ ed $Y = (C+\overline{I}) \cap (\overline{C}+I)$; dunque

$$X : \begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0 \\ 2ix_0+x_1+x_2+i\sqrt{6}x_3=0 \\ -2ix_0+x_1+x_2-i\sqrt{6}x_3=0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad Y : \begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0 \\ 2ix_0+x_1+x_2-i\sqrt{6}x_3=0 \\ -2ix_0+x_1+x_2+i\sqrt{6}x_3=0 \end{cases}$$

ovvero $X = \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed $Y = \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. □

Occupiamoci ora della classificazione delle coniche e lasciamo ancora una volta al lettore il compito di studiare le coniche degeneri e parliamo di quelle non-degeneri, cercando dapprima di adattare alla nuova situazione i ragionamenti fatti nel caso affine.

Cominciamo con una conica a centro non-degenere $\mathscr{C}$, ed indichiamo con C il suo centro. Nella discussione fatta nel piano affine, per trovare un sistema di riferimento affine che portasse la matrice della conica in forma canonica, era sufficiente scegliere un qualunque punto, P_∞, della retta impropria –nel caso dell'iperbole, distinto dalle due intersezioni di $\mathscr{C}$ con r_∞ (cf. il disegno VII.2.5)– e considerare la direzione *coniugata* Q_∞, ovvero la direzione della polare di P_∞. Scegliendo le due rette $C+P_\infty$ e $C+Q_\infty$ come assi coordinati e fissando opportunamente le unità di misura, si portava l'equazione della conica in forma canonica. Ora nello spazio euclideo, possiamo scegliere solo sistemi di riferimento ortonormali, ovvero con gli assi perpendicolari (nel senso euclideo) e vettori di lunghezza 1 come unità di misura sugli assi. Quindi dobbiamo vedere se esiste un punto improprio $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, tale che la sua direzione ortogonale (nel senso euclideo), $P_\infty^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_2 \\ p_1 \end{pmatrix}$, sia anche *coniugata*, ovvero sia la direzione della polare di P_∞. Indicata con A la matrice della conica $\mathscr{C}$, si ottiene la condizione

$$ {}^tP_\infty A P_\infty^\perp = 0, \qquad \text{ovvero} \qquad (p_1,p_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -p_2 \\ p_1 \end{pmatrix} = 0, \tag{3.3} $$

che è detta l'*equazione degli assi*. Si tratta di un'equazione omogenea di secondo grado che ha due soluzioni reali distinte (tra loro perpendicolari, perchè?) ad esclusione del caso in cui $a_{11}=a_{22}$ ed $a_{12}=0$, nel quale l'equazione diventa un'identità e quindi tutti i punti della retta impropria sono coniugati con la propria direzione perpendicolare.

Dunque, ponendo l'origine nel centro della conica $\mathscr{C}$ e scegliendo come direzioni degli assi due vettori di lunghezza 1 che soddisfino all'equazione degli assi, otteniamo un riferimento ortonormale del piano euclideo, rispetto a cui la conica a centro viene ad avere un'equazione del tipo $ax^2+by^2=1$ (eventualmente dopo moltiplicazione per un'opportuna costante). Possiamo anche porre qualche ulteriore restrizione sulla scelta dei parametri a e b, osservando che possiamo scegliere

- $a \le b < 0$ nel caso dell'*ellisse senza punti reali*;
- $0 < a \le b$ nel caso dell'*ellisse con punti reali*;
- $a > 0 > b$ nel caso dell'*iperbole*.

In questo modo, due coniche a centro (non-degeneri) sono isometriche se, e solo se, determinano la stessa coppia di valori per i parametri a e b.

Osserviamo che, nel caso in cui l'equazione degli assi degeneri, ovvero nel caso in cui $a_{11}=a_{22}$ ed $a_{12}=0$ è sufficiente traslare l'origine nel centro C della conica e moltiplicare per un'opportuna costante per ottenere un'equazione della conica del tipo $ax^2+ay^2=1$. Se $a>0$, si tratta del luogo dei punti del piano con distanza $\frac{1}{\sqrt{a}}$ dall'origine, ovvero del *cerchio* di centro C e raggio $\frac{1}{\sqrt{a}}$. Se $a<0$, si tratta di una conica senza punti reali, che potremmo chiamare, per analogia, cerchio di centro C e raggio immaginario $\frac{i}{\sqrt{-a}}$. L'assoluto del piano affine consiste in due punti complessi coniugati, che, guardando l'equazione (VII.3.2), hanno coordinate omogeneee $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$ e $\overline{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$. I punti dell'assoluto sono detti anche i *punti ciclici* (cf. *Osservazione VI.5.11*), e sono contenuti nel supporto di ogni cerchio, come si verifica immediatamente osservando l'equazione canonica del cerchio e ricordando che le isometrie dello spazio euclideo trasformano in sé l'assoluto e quindi non modificano i punti impropri dei cerchi.

Passiamo ora a considerare le parabole del piano euclideo. Nella discussione fatta nel piano affine, per trovare un sistema di riferimento affine che portasse la matrice della parabola $\mathscr{C}$ in forma canonica, era sufficiente scegliere un qualunque punto, Q_∞, della retta impropria, distinto dal punto $P_\infty \in \mathscr{C} \cap r_\infty$. La polare q del punto Q_∞ dava uno degli assi del riferimento, passante necessariamente per il punto improprio della conica P_∞; mentre l'altro asse era dato dalla tangente a $\mathscr{C}$ nel punto proprio $P \in \mathscr{C} \cap q$, che è la retta $P+Q_\infty$. Nello spazio euclideo, possiamo scegliere solo sistemi di riferimento ortonormali, ovvero con gli assi perpendicolari (nel senso euclideo) e vettori di lunghezza 1 come unità di misura sugli assi. Quindi dobbiamo scegliere $Q_\infty = P_\infty^\perp$, ovvero il punto improprio corripondente alla direzione ortogonale (nel senso euclideo) a P_∞. L'origine degli assi (paralleli rispettivamente a Q_∞ e P_∞) sarà

quindi il punto proprio V appartenente all'intersezione tra $\mathscr{C}$ e la polare h di $P_\infty^\perp$. La retta h è l'*asse* della parabola, mentre il punto V è detto il *vertice* della parabola.

Dunque, ponendo l'origine nel vertice della parabola $\mathscr{C}$ e scegliendo come secondo asse coordinato la retta h, si determina un riferimento ortonormale del piano euclideo, rispetto a cui la parabola viene ad avere un'equazione del tipo $2y = ax^2$ (eventualmente dopo moltiplicazione per un'opportuna costante); inoltre, scegliendo opportunamente i versori degli assi coordinati, non è restrittivo supporre $a > 0$.

In questo modo, due parabole (non-degeneri) sono isometriche se, e solo se, determinano lo stesso valore del parametro a.

Possiamo quindi scrivere le matrici delle che rappresentano le famiglie di coniche non-degeneri del piano euclideo, a meno di ismoetria, scrivendo sotto la corrispondente equazione canonica.

ellissi senza punti reali

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

eq. canonica: $aX^2 + bY^2 = 1$ $(a \leq b < 0)$

ellissi con punti reali

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

eq. canonica: $aX^2 + bY^2 = 1$ $(0 < a \leq b)$

parabole

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eq. canonica: $2Y = aX^2$ $(a > 0)$

iperboli

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

eq. canonica: $aX^2 + bY^2 = 1$ $(b < 0 < a)$

Vogliamo mostrare come, con facili calcoli, si possano dedurre gli invarianti di una conica non degenere a partire dalla sua matrice. Il procedimento descritto di seguito, può essere adattato per la classificazione di quadriche nello spazio euclideo di dimensione qualsiasi; lasciamo al lettore il compito di fare i necessari adattamenti. Consideriamo quindi il piano euclideo, immerso in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con retta impropria $r_\infty : x_0 = 0$ ed una conica non-degenere $\mathscr{C}$. Sia A la matrice di $\mathscr{C}$ e la si scriva a blocchi, nella forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & {}^t a \\ a & A' \end{pmatrix}.$$

Le matrici delle isometrie sono particolari matrici di affinità, e possono essere analogamente scritte a blocchi, nella forma

$$P = \begin{pmatrix} 1 & {}^t 0 \\ u & R \end{pmatrix},$$

ove $u \in \mathbb{R}^2$ ed R è una matrice ortogonale, ovvero ${}^t RR = \mathbf{1}_2$. In base alla definizione di coniche isometriche, devono esistere una isometria di matrice P ed una costante $c \neq 0$ tali che

$$c\,{}^t PAP = c \begin{pmatrix} {}^t UAU & ({}^t a + {}^t uA')R \\ {}^t R(a + A'u) & {}^t RA'R \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} & \text{se la conica è a centro} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{se la conica è una parabola} \end{cases},$$

ove $U = \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix}$. Per prima cosa osserviamo che, in ambedue i casi ${}^t RA'R = R^{-1}A'R$ deve essere una matrice diagonale, e quindi che gli elementi sulla sua diagonale devono essere gli autovalori di A' che indichiamo con λ_1 e λ_2 e quindi le colonne della matrice R sono una base ortonormale di autovettori per A' che sono quindi le direzioni degli assi del riferimento rispetto a cui la conica assume forma canonica(*).

(*) Si osservi che, poichè A' è una matrice simmetrica, indipendentemente dall'ordine della matrice, esiste sempre una matrice ortogonale R tale che ${}^t RA'R = R^{-1}A'R$ sia una matrice diagonale (cf. *Teorema Spettrale V.3.1*).

Se la conica è a centro, ricordando che R è una matrice invertibile, deve aversi $a + A'u = 0$ e quindi il punto U è il centro della conica (cf. VII.2.3). Inoltre, la costante c può essere determinata osservando che $\det P = \det R = \pm 1$, e quindi, dalle relazioni scritte sopra, si deduce $c^3 \det A = -ab = -c^2 \det A'$; ovvero $c = -\frac{\det A'}{\det A}$.

Se la conica è una parabola, nulla cambia per il fatto che gli elementi sulla diagonale di ${}^tRA'R$ devono essere gli autovalori di di A', che indichiamo con λ_1 e $\lambda_2 = 0$, e quindi le colonne della matrice R sono anche in questo caso una base ortonormale di autovettori per A', ed, in particolare, la seconda colonna di R (ovvero un autovettore di lunghezza 1, relativo all'autovalore nullo) determina la direzione dell'asse della parabola. La condizione ${}^tUAU = 0$ dice che il punto U appartiene alla conica, mentre la condizione $c(a + A'u) = -R\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, può essere letta come il fatto che la polare del punto U deve avere coefficienti dell'equazione omogenea proporzionali alla seconda colonna di R e quindi questa retta deve avere direzione ortogonale all'asse della parabola. Si deduce da ciò che U deve essere il vertice della parabola che è l'unico punto in cui la tangente è ortogonale all'asse.

Come nel caso precedente, la costante c può essere determinata osservando che $c^3 \det A = -a = -c\lambda_1$, ove λ_1 è l'autovalore non nullo di A'; dunque $c^2 = -\frac{\lambda_1}{\det A}$ (il lettore è invitato a verificare che la condizione ha senso, ovvero che $\frac{\lambda_1}{\det A} < 0$ quando A è la matrice di una parabola non degenere).

Esercizio 3.2. *Nel piano euclideo si classifichi la conica $\mathscr{C}$ di equazione $\mathscr{C} : 7x^2 + \frac{11}{2}y^2 + 2xy + 16x + 13y + 12 = 0$, e si determinino assi, vertici, l'eventuale centro e la forma canonica di $\mathscr{C}$.*

Svolgimento. La matrice della conica $\mathscr{C}$ è $A = \begin{pmatrix}24 & 16 & 13\\ 16 & 14 & 2\\ 13 & 2 & 11\end{pmatrix}$, e si ha $\det A = -2 \cdot 3 \cdot 5^3$, $\det A' = 150$; dunque $\mathscr{C}$ è un'ellisse (non-degenere).

Il centro C è la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} 7x + y = -8 \\ 2x + 11y = -13 \end{cases}, \quad \text{ovvero} \quad C = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico della matrice A' è $p_A(x) = \det(A' - x) = x^2 - 25x + 150$, e quindi gli autovalori di A' sono 10 e 15, i cui corrispondenti autovettori sono le direzioni degli assi, ovvero i punti della retta impropria di coordinate omogenee $H_1 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ ed $H_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$. Quindi gli assi dell'ellisse $\mathscr{C}$ sono le rette di equazioni $h_1 : x - 2y - 1 = 0$ e $h_2 : 2x + y + 3 = 0$; ove h_2, la cui direzione è un autovettore relativo all'autovalore minore, è l'*asse focale* dell'ellisse, mentre h_1 è l'*asse trasverso*. I coefficienti della forma canonica dell'equazione di $\mathscr{C}$ sono gli autovalori di A', moltiplicati per $-\frac{\det A'}{\det A}$, e quindi la forma canonica è $2X^2 + 3Y^2 = 1$.

In un'ellisse di equazione canonica $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$, con $0 < \alpha < \beta$, i vertici sull'asse focale han distanza $\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$ dal centro, mentre i vertici sull'asse trasverso han distanza $\sqrt{\frac{1}{\beta}}$ dal centro. Quindi, i vertici di $\mathscr{C}$ si trovano sugli assi h_1 ed h_2 a distanza $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dal centro C, rispettivamente. Lasciamo al lettore il compito di calcolarne le coordinate. □

Esercizio 3.3. *Nel piano euclideo si classifichi la conica $\mathscr{C}$ di equazione $\mathscr{C} : 2x^2 - y^2 + 4xy + 2y - 2 = 0$ e si determinino assi, vertici, l'eventuale centro e la forma canonica di $\mathscr{C}$.*

Svolgimento. Indichiamo come al solito con A la matrice della conica $\mathscr{C}$ e con A' la matrice che si ottiene da A cancellando la prima riga e la prima colonna. Si ha $\det A = 10$ e $\det A' = -6$, da cui si deduce che $\mathscr{C}$ è un'iperbole (non-degenere).

Le coordinate del centro C di $\mathscr{C}$ sono le soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} x + y = 0 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$, e quindi $C = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Le direzioni degli assi sono gli autovettori della matrice A', mentre gli autovalori della stessa, moltiplicati per $-\frac{\det A'}{\det A}$, sono i coefficienti della forma canonica dell'equazione di $\mathscr{C}$. Il polinomio caratteristico di A' è

$\det\begin{pmatrix} 2-x & 2 \\ 2 & -1-x \end{pmatrix} = (x-3)(x+2)$, e quindi gli autovalori sono 3 e -2 i cui relativi spazi di autovettori sono generati da $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, rispettivamente. Dunque gli assi della conica sono le rette $h_1 : x - 2y + 1 = 0$ ed $h_2 : 2x + y + \frac{1}{3} = 0$.

L'asse h_1 interseca il supporto dell'iperbole $\mathscr{C}$ e quindi è l'asse focale ed i vertici sono i due punti di intersezione tra h_1 e $\mathcal{C}$, ovvero $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

La forma canonica dell'equazione di $\mathscr{C}$ è $\frac{9}{5}X^2 - \frac{6}{5}Y^2 = 1$. □

Esercizio 3.4. *Si consideri nel piano euclideo la conica $\mathscr{C}$, di equazione affine $\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 2xy - 2y = 2$. Si mostri che $\mathscr{C}$ è una parabola (non-degenere) e si determinino asse, vertice, ed equazione canonica per tale parabola.*

Svolgimento. Si consideri il piano euclideo immerso nel modo usuale nel piano proiettivo. La conica $\mathscr{C}$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

e si verifica facilmente trattarsi di una parabola non-degenere ($\det A = -1$). L'intersezione di $\mathscr{C}$ con la retta impropria –ovvero la direzione dell'asse– è il punto $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e quindi l'asse della parabola è la polare del punto $P_\infty^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, corrispondente alla direzione ortogonale all'asse. Dunque l'asse h di $\mathscr{C}$ ha equazione (affine) $h : 2x - 2y + 1 = 0$. Il vertice di $\mathscr{C}$ è l'intersezione tra l'asse h ed il supporto di $\mathscr{C}$, ovvero il punto V, di coordinate omogenee $V = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Gli autovalori della matrice $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sono 0 e 2 e gli autovettori relativi, corrispondono ai punti impropri $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P_\infty^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si deduce da ciò che l'equazione canonica di $\mathscr{C}$ è $Y - \sqrt{2}X^2 = 0$. □

Esercizio 3.5. *Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino le rette*

$$r : \begin{cases} x - 2y + z + 4 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad ed \qquad s : \begin{cases} 2x - 2y + z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

(a) Si verifichi che le due rette sono sghembe e se ne calcoli la reciproca distanza.
(b) Si scriva l'equazione del luogo $\mathscr{Q}$ dei punti X dello spazio per cui $d(X, r)^2 + d(X, s)^2 = 8$.
(c) Si mostri che qualunque piano taglia su $\mathscr{Q}$ un'ellisse (eventualmente degenere o senza punti reali).
(d) Si verifichi che esistono due famiglie di piani paralleli che tagliano su $\mathscr{Q}$ dei circoli.

Svolgimento. (a). La retta r passa per $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, mentre la retta s passa per $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; dunque le due rette non sono parallele tra loro e si ha

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot v \times w|}{\|v \times w\|} = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

Perciò si tratta di due rette sghembe.

(b). Sia $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un generico punto dello spazio. La condizione $d(X,r)^2 + d(X,s)^2 = 8$, si scrive quindi nella forma

$$\frac{\|\overrightarrow{PX} \times v\|^2}{\|v\|^2} + \frac{\|\overrightarrow{QX} \times w\|^2}{\|w\|^2} = 8$$

da cui si ottiene l'equazione

$$\mathscr{Q} : 2x^2 - 2xy + 2xz + 3y^2 + 3z^2 - 8y - 8z = 0.$$

(c). Consideriamo lo spazio euclideo immerso nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ nel modo usuale. Una conica è un'ellisse, se interseca la retta impropria (del piano in cui giace) in due punti di coordinate non reali. Il fatto che ogni piano tagli su $\mathscr{Q}$ un'ellisse, significa che ogni retta del piano improprio interseca $\mathscr{Q}$ in due punti non reali, ovvero che la conica (proiettiva) che si ottiene intersecando $\mathscr{Q}$ con il piano improprio è una conica senza punti reali. Si ha

$$\mathscr{Q} \cap \pi_\infty : \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 3x_3^2 = 0 \end{cases}$$

e quindi nelle coordinate omogenee $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ del piano π_∞, $\mathscr{Q} \cap \pi_\infty$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

che è la matrice di un'applicazione bilineare simmetrica, definita positiva e quindi $\mathscr{Q} \cap \pi_\infty$ è una conica senza punti reali.

(d). Un'ellisse è un cerchio se interseca la retta impropria (del piano in cui giace) nei due punti corrispondenti alle direzioni isotrope di quel piano (ovvero punti impropri che soddisfano all'equazione dell'*assoluto* $\mathscr{H}$: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases}$, che determina le direzioni isotrope nello spazio euclideo tridimensionale). Dobbiamo quindi determinare i piani reali che passano per coppie di punti soddisfacenti alle condizioni

$$\mathscr{Q} \cap \mathscr{H} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 3x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1(x_1 + 2x_2 - 2x_3) = 0 \end{cases}.$$

Si tratta quindi delle due famiglie di piani paralleli di equazioni affini $\sigma_h : x = h$ e $\tau_k : x + 2y - 2z = k$ $(h, k \in \mathbb{R})$[(†)]. □

[(†)] I quattro punti di $\mathscr{Q} \cap \mathscr{H}$ sono

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-6i \\ 4+3i \\ 5 \end{pmatrix} \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2+6i \\ 4-3i \\ 5 \end{pmatrix};$$

e le due rette (improprie) di equazioni omogenee $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ ed $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$, sono le uniche ad avere equazioni reali tra le sei rette passanti per questi quattro punti.

4. Quadriche

In questa sezione vogliamo discutere, analogamente a quanto fatto per le coniche, la classificazione delle quadriche nello spazio tridimensionale sul campo reale o complesso. Le considerazioni che faremo saranno facilmente generalizzabili a dimensioni superiori, ma di questo non ci occuperemo, lasciandolo al lettore più curioso.

Quadriche nello spazio proiettivo. Cominciamo occupandoci delle quadriche nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ (cf. *Definizione VII.1.1*). Alla quadrica resta associata un'applicazione bilineare e quindi una matrice simmetrica, A, definite a meno di un fattore di proporzionalità.

4.1 Definizione. Due quadriche, di matrici A e B, si diranno *proiettivamente equivalenti* se l'una si ottiene dall'altra tramite una proiettività dello spazio, ovvero se esiste una matrice invertibile P ed una costante $\alpha \neq 0$ tali che $B = \alpha {}^tPAP$.

La classificazione proiettiva delle quadriche si potrà quindi dedurre dalla classificazione delle forme quadratiche fatta nel Capitolo IV. Cominciamo dai coni quadrici (cf. *Definizione VII.1.5*), ovvero dalle quadriche associate ad applicazioni bilineari degeneri: quelle per cui $\det A = 0$. Infatti, se $\mathscr{Q}$ è un cono quadrico, di matrice A, esiste un punto, $P = \sigma\langle v\rangle$, appartenente al vertice di $\mathscr{Q}$ e quindi deve aversi $g(v, x) = 0$ per ogni vettore x, ove g è l'applicazione bilineare di matrice A e quindi $\det A = 0$. Viceversa, se $\mathscr{Q}$ è una quadrica degenere ($\det A = 0$) e g un'applicazione bilineare simmetrica ad essa associata, esiste un vettore $v \neq 0$ tale che $g(v, x) = 0$ per ogni vettore x. In particolare, se x appartiene al supporto della quadrica, allora tutta la retta $\sigma\langle v, x\rangle$ è contenuta nel supporto della quadrica e quindi $\mathscr{Q}$ è un cono quadrico ed il punto $\sigma\langle v\rangle$ è contenuto nel vertice.

La classificazione dei coni quadrici si fa guardando al rango ed alla segnatura (cf. *Definizione IV.2.8*) della matrice A; in tal modo si distinguono i casi seguenti in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

- Se $\operatorname{rk} A = 1$, allora il nucleo di g è sottospazio vettoriale di dimensione 3, corrispondente ad un piano in $\mathbb{P}^3$ che costituisce il supporto della quadrica. Segnatura $(1, 0)$ o $(0, 1)$.
- Se $\operatorname{rk} A = 2$, allora il nucleo di g è una retta r di $\mathbb{P}^3$. Presa una retta, s, sghemba con il vertice, l'intersezione tra s ed il supporto della quadrica è una coppia di punti distinti P e Q (non necessariamente reali) e quindi i due piani $P + r$ e $Q + r$, formano il supporto della quadrica. Precisamente, si hanno due piani reali se la segnatura è $(1, 1)$, mentre si hanno due piani complessi, tra loro coniugati, se la segnatura è $(2, 0)$ o $(0, 2)$.
- Se $\operatorname{rk} A = 3$, il vertice si riduce ad un punto V e preso un piano, π, non passante per V, l'intersezione tra $\mathscr{Q}$ e π è una conica non degenere $\mathscr{C}$, e quindi il supporto di $\mathscr{Q}$ è costituito dai punti appartenenti alle rette che congiungono V con i punti (del supporto) di $\mathscr{C}$. Le possibili segnature sono: $(3, 0)$ e $(0, 3)$, nel qual caso, l'unico punto reale è il vertice; oppure $(2, 1)$ ed $(1, 2)$, nel qual caso il cono proietta una conica a punti reali.

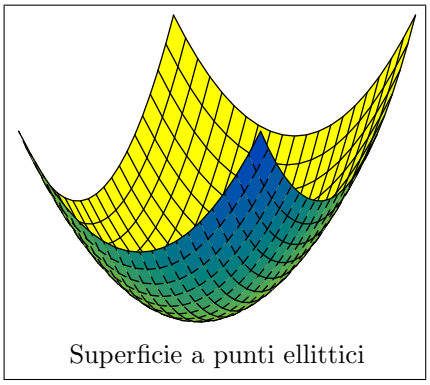
Occupiamoci delle quadriche non-degeneri e quindi della polarità associata alla quadrica, ricordando che i punti del supporto della quadrica sono tutti e soli i punti che appartengono al proprio piano polare e che per i punti del supporto, il piano polare coincide con il piano tangente alla quadrica.

Come per le coniche, possiamo distinguere le *quadriche senza punti reali*, ovvero di segnatura $(4, 0)$ e $(0, 4)$, dalle quadriche con punti reali. Inoltre, guardando all'intersezione tra la quadrica ed i suoi piani tangenti, si distinguono due classi di quadriche a punti reali, ovvero le *quadriche a punti ellittici*, di segnatura $(1, 3)$ e $(3, 1)$, per le quali l'intersezione tra la conica ed il piano tangente contiene un unico punto reale e le *quadriche a punti iperbolici*, di segnatura $(2, 2)$, per le quali l'intersezione tra la conica ed il piano tangente è costituita da due rette reali.

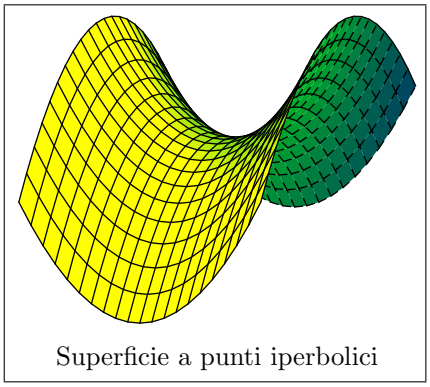
Osserviamo che l'intersezione tra una quadrica ed un piano è una conica di tale piano e, nel caso del piano tangente, si tratta di una conica con un punto doppio (il punto di tangenza) e quindi di una conica degenere, che sarà necessariamente il prodotto di due rette distinte (perché?), reali o complesse coniugate. Dire che la qudrica contiene nel suo supporto una retta reale, significa dire che l'applicazione bilineare

associata alla quadrica ammette un sottospazio isotropo di dimensione 2 e questo basta per spiegare le segnature indicate sopra.

Diamo una rappresentazione grafica della differenza tra superficie a punti ellittici e superficie a punti iperbolici, con un disegno di una porzione di tali superfici.



Superficie a punti ellittici



Superficie a punti iperbolici

Possiamo quindi concludere queste osservazioni scrivendo le equazioni canoniche delle quadriche non degeneri in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, ovvero

Quadrica senza punti reali

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eq. canonica: $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$

Quadrica a punti ellittici

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eq. canonica: $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$

Quadrica a punti iperbolici

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eq. canonica: $-x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$

Più semplice è la classificazione in campo complesso, perchè le forme quadratiche su $\mathbb{C}$ sono classificate solo dal rango della matrice associata e quindi si avranno quattro tipi di quadriche in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, ovvero un piano doppio, due piani distinti, un cono che proietta una conica non degenere e la quadrica non-degenere.

Per chiudere questa sezione, vogliamo fare un' ultima osservazione sulle quadriche (reali) a punti iperbolici, che spieghi il nome di *quadriche rigate* che viene spesso dato a questo tipo di superficie. *Una quadrica a punti iperbolici contiene due schiere di rette con la proprietà che le rette di una stessa schiera sono a due a due sghembe, mentre ogni retta di una schiera incide tutte le rette dell'altra schiera.*

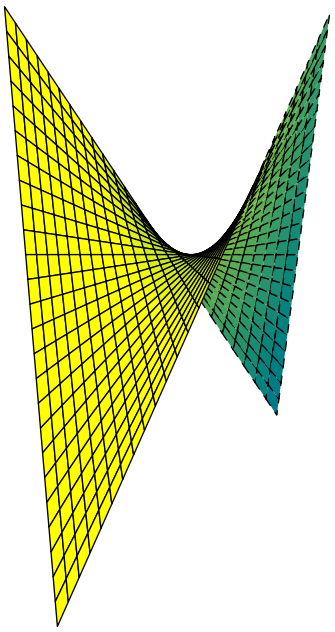
Infatti, trattandosi di una quadrica a punti iperbolici, possiamo scegliere delle coordinate $(y_0, \dots, y_3)$ tali che la quadrica abbia matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero equazione } y_0y_1 + y_2y_3 = 0.$$

Si considerino le due famiglie di rette

$$r_{(\alpha,\beta)}: \begin{cases} \alpha y_0 - \beta y_2 = 0 \\ \beta y_1 + \alpha y_3 = 0 \end{cases} \quad \text{ed} \quad s_{(\gamma,\delta)}: \begin{cases} \gamma y_0 - \delta y_3 = 0 \\ \delta y_1 + \gamma y_2 = 0 \end{cases}$$

ove (α,β) e(γ,δ) sono due coppie di parametri omogenei, e verifichiamo che sono soddisfatte le condizioni richieste. Un generico punto della retta $r_{(\alpha,\beta)}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} t_0\beta \\ -t_1\alpha \\ t_0\alpha \\ t_1\beta \end{pmatrix}$, al variare dei parametri omogenei (t_0,t_1), ed è immediato verificare che ogni tale punto appartiene al supporto della quadrica. Dunque la retta $r_{(\alpha,\beta)}$ è contenuta nel suporto della quadrica e lo stesso vale qualunque siano i valori dei parametri omogenei (α,β). Date due coppie di parametri omogenei (α_1,β_1) ed (α_2,β_2), non proporzionali tra loro, le due rette $r_{(\alpha_1,\beta_1)}$ ed $r_{(\alpha_2,\beta_2)}$ le due rette sono sghembe, come si verifica considerando il sistema omogeneo delle equazioni delle due rette ed osservando che tale sistema ha rango 4, essendo



$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & -\beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 \neq 0.$$

Analoghe verifiche si possono fare per le rette dell'altra schiera. Infine, osserviamo che ogni retta della prima schiera interseca ogni retta della seconda schiera, come si vede facilmente considerando il sistema delle equazioni delle due rette ed osservando che

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \alpha \\ \gamma & 0 & 0 & -\delta \\ 0 & \delta_2 & \gamma & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Ciò conclude la verifica. Il disegno qui sopra mostra alcune rette delle due schiere su una porzione della superficie di una quadrica a punti iperbolici.

Quadriche nello spazio affine. Lo spazio affine si ottiene dal proiettivo considerando il complementare di un piano, i cui punti diverranno le direzioni delle rette nello spazio affine (cf. *Teorema VI.3.7*). La scelta usuale è di prendere come piano improprio il piano di equazione $x_0 = 0$, e le coordinate affini $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$, e $z = \frac{x_3}{x_0}$. Fatta tale scelta, le affinità vengono ad avere matrici del tipo $P = \begin{pmatrix} 1 & {}^t0 \\ t & R \end{pmatrix}$, ove $R \in M_3(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile e $t \in \mathbb{R}^3$. Noi supporremo di aver fatto tale scelta, ma ribadiamo che le definizioni che daremo sono indipendenti dalla scelta delle coordinate.

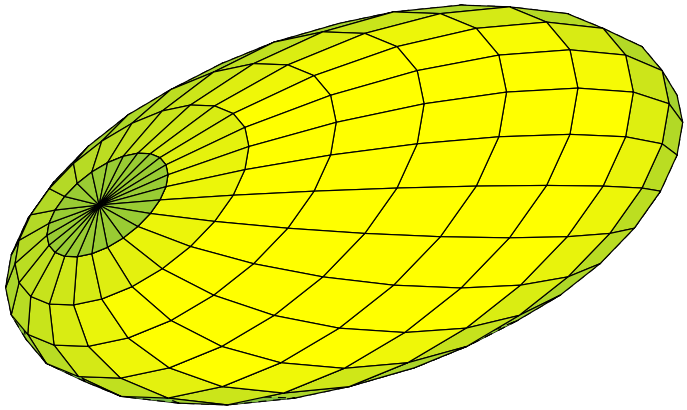
4.2 Definizione. Due quadriche, di matrici A e B, si diranno *affinemente equivalenti* se l'una si ottiene dall'altra tramite una affinità dello spazio, ovvero se esiste la matrice di un'affinità P ed una costante $\alpha \neq 0$ tali che $B = \alpha {}^tPAP$.

La classificazione delle quadriche si arricchisce, rispetto al caso proiettivo, perchè deve tener conto delle relazioni tra la quadrica ed il piano improprio, visto che le affinità non possono scambiare punti impropri con punti propri. Lasciamo al lettore il compito di studiare in dettaglio i coni quadrici e ci dedichiamo alla classificazione delle quadriche non degeneri.

Come per le coniche, chiameremo *paraboloidi* le quadriche tangenti al piano improprio, mentre chiameremo *quadriche a centro* le rimanenti quadriche non degeneri, ove il *centro* è ancora il polo del piano improprio. Le quadriche a centro, a loro volta, si suddividono in *ellissoidi*, ovvero quadriche che tagliano sul piano improprio una conica senza punti reali ed *iperboloidi*, che tagliano sul piano improprio una conica con punti reali.

Per prima cosa osserviamo che, nel caso di un ellissoide, la restrizione della applicazione bilineare associata alla quadrica al sottospazio corrispondente al piano improprio è un'applicazione bilineare definita (positiva o negativa) e quindi o la quadrica è priva di punti reali [segnatura $(4,0)$ o $(0,4)$] oppure è una quadrica a punti ellittici [segnatura $(3,1)$ o $(1,3)$]. Nel caso di iperboloidi o paraboloidi, si tratta sempre di quadriche a punti reali ed in entrambo i casi sarà possibile avere quadriche a punti ellittici oppure a punti iperbolici. Analizziamo in dettaglio i vari casi, indicando con A una matrice della quadrica e con g un'applicazione bilineare associata.

Ellissoidi. Possiamo scegliere come origine il centro della quadrica, ovvero il punto proprio P per cui ${}^tPA = \varrho(1,0,0,0)$ (ove $\varrho \neq 0$). Inoltre, utilizzando il fattore di proporzionalità, possiamo supporre che la restrizione di g al sostegno del piano improprio sia un'applicazione bilineare simmetrica, definita positiva, e quindi esiste una base ortonormale, rispetto a g, di tale sottospazio. Si conclude che rispetto al riferimento così costruito la matrice dell'ellissoide assume la forma canonica e diventa:

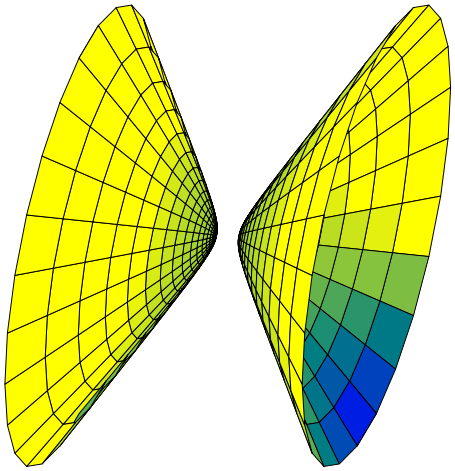


Ellissoide senza punti reali	Ellissoide con punti reali
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
eq. canonica: $x^2+y^2+z^2+1=0$	eq. canonica: $x^2+y^2+z^2-1=0$

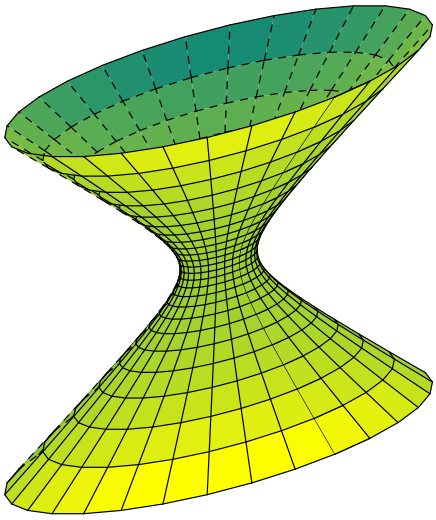
Si veda qui sopra il disegno di un'ellissoide a punti reali.

Iperboloidi. Anche in questo caso, possiamo scegliere come origine il centro della quadrica, ovvero il punto proprio P per cui ${}^tPA = \varrho(1,0,0,0)$ (ove $\varrho \neq 0$). La restrizione di g al sostegno del piano improprio è un'applicazione bilineare simmetrica, non degenere e non definita, e quindi esiste una base ortogonale, $\{v_1, v_2, v_3\}$, di tale sottospazio, tale che $g(v_i, v_i) = \pm 1$, per $i = 1, 2, 3$. Si conclude che rispetto al riferimento così costruito le matrici dei due iperboloidi assumono la forma canonica, ovvero

Iperboloide ellittico	Iperboloide iperbolico
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
eq. canonica: $x^2-y^2-z^2-1=0$	eq. canonica: $x^2+y^2-z^2-1=0$



Iperboloide ellittico



Iperboloide iperbolico

Si vedano qui sopra i disegni di porzioni dei due tipi di iperboloidi.

Paraboloidi. Sia W il sostegno del piano improprio. La restrizione di g a W è un'applicazione bilineare simmetrica, degenere, con un nucleo $\langle v_3 \rangle$, di dimensione 1, corrispondente al punto di tangenza. Preso un sottospazio H di W, complementare al nucleo, ed una sua base ortogonale $\{v_1, v_2\}$, con $g(v_i, v_i) = \pm 1$ per $i = 1, 2$, si osserva che l'ortogonale di H (rispetto a g), contiene il vettore isotropo v_3, e quindi è un piano iperbolico, ovvero contiene un vettore isotropo v_0, tale che $g(v_0, v_3) = -1$. Il punto $\sigma \langle v_0 \rangle$ è un punto proprio da prendersi come origine del riferimento. Si conclude che rispetto al riferimento così costruito le matrici dei due paraboloidi assumono la forma canonica.

Paraboloide ellittico

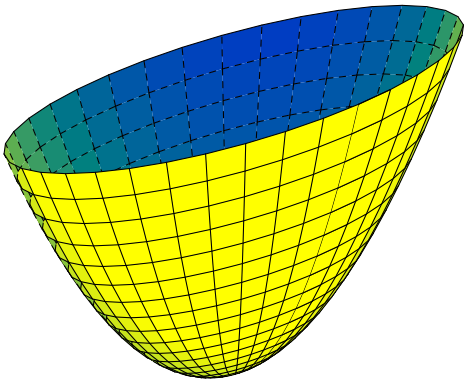
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eq. canonica: $x^2 + y^2 - 2z = 0$

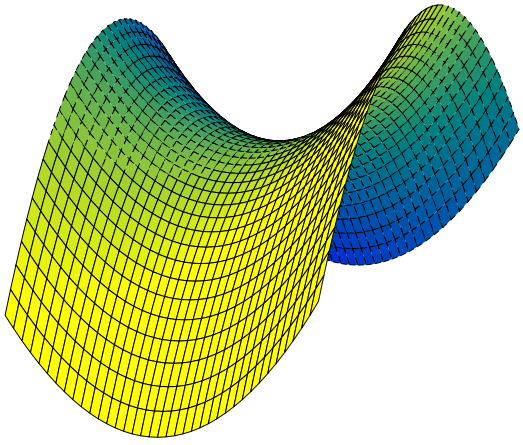
Paraboloide iperbolico

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eq. canonica: $x^2 - y^2 - 2z = 0$



Paraboloide ellittico



Paraboloide iperbolico

Si vedano qui sopra i disegni di porzioni dei due tipi di paraboloidi.

Sul campo complesso, le classi di quadriche affinemente equivalenti si riducono. Innanzitutto non ha senso distinguere tra ellissoidi ed iperboloidi. Inoltre tutte la quadriche hanno punti (su $\mathbb{C}$) e non vi è distinzione tra punti ellittici o iperbolici. Dunque, nello spazio affine tridimensionale su $\mathbb{C}$, vi sono due tipi di quadriche non degeneri: il paraboloide (tangente al piano improprio) e la quadrica a centro. Lasciamo al lettore la classificazione delle quadriche degeneri.

Quadriche nello spazio euclideo. Lo spazio affine diventa euclideo ponendo un'applicazione bilineare simmetrica, definita positiva, sui vettori dello spazio e si considerano su di esso riferimenti ortonormali. Indicheremo con h questa applicazione, per non confonderla con un'applicazione bilineare associata alla quadrica, che continueremo ad indicare con g.

La relazione usuale tra le coordinate omogenee e quelle dello spazio euclideo è la stessa desctitta nello spazio affine. Fatta tale scelta, le isometrie vengono ad avere matrici del tipo $P = \begin{pmatrix} 1 & {}^t0 \\ t & R \end{pmatrix}$, ove $R \in M_3(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale (ovvero ${}^tRR = \mathbf{1}_3$). Se si vorrà tener conto anche dell'orientamento dello spazio, ci si restringerà a considerare solo matrici ortogonali di determinante 1 ($R \in SO_3$). Noi supporremo di aver scelto coordinate affini ortonormali, ma ricordiamo che le definizioni seguenti sono indipendenti dalla scelta di coordinate.

4.3 Definizione. Due quadriche, di matrici A e B, si diranno *isometriche* se l'una si ottiene dall'altra tramite un'isometria dello spazio, ovvero se esiste la matrice di un'isometria P ed una costante $\alpha \neq 0$ tali che $B = \alpha {}^tPAP$.

La classificazione delle quadriche nello spazio euclideo si arricchisce rispetto al caso affine, perchè all'interno delle classi di quadriche equivalenti dal punto di vista affine, vi sono infinità di quadriche non isometriche tra loro. Lasciamo sempre al lettore il compito di studiare in dettaglio i coni quadrici e ci dedichiamo alla classificazione delle quadriche non degeneri.

In modo analogo alle matrici di isometrie, possiamo scrivere "a blocchi" anche le matrici delle quadriche, ovvero $A = \begin{pmatrix} a_{00} & {}^ta \\ a & A' \end{pmatrix}$, ove A' è la matrice della conica che si ottiene intersecando la quadrica col piano improprio. Applicando un'isometria $P = \begin{pmatrix} 1 & {}^t0 \\ t & R \end{pmatrix}$, questa sottomatrice si trasforma in ${}^tRA'R = R^{-1}AR$. Grazie al *Teorema Spettrale V.3.1*, sappiamo che, essendo A' una matrice simmetrica, esiste una matrice ortogonale R tale che ${}^tRA'R = R^{-1}AR$ sia una matrice diagonale, i cui elementi diagonali sono gli autovalori di A'.

Ellissoidi. Di nuovo scegliamo come origine il centro della quadrica. Per il Teorema Spettrale esiste una base ortonormale di autovettori e, trattandosi di un ellissoide, gli autovalori assumono tutti lo stesso segno. In questo riferimento la quadrica ha matrice diagonale e possiamo utilizzare il fattore di proporzionalità per fare in modo che l'entrata di posto $(1,1)$ nella matrice diagonale sia uguale a -1. Le rette per il centro, parallele agli autovettori sono gli *assi* dell'ellissoide. In questo modo gli ellissoidi vengono determinati da 3 parametri e si hanno le equazioni canoniche

Ellissoidi senza punti reali	Ellissoidi con punti reali
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$
eq. can.: $ax^2 + by^2 + bz^2 = 1$ $(c \leq b \leq a < 0)$	eq. can.: $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ $(0 < a \leq b \leq c)$

Da ultimo consideriamo quei particolari ellissoidi a punti reali che sono le *sfere* ovvero, nella descrizione precedente, quelli per cui $a = b = c > 0$. Come per i circoli del piano, l'intersezione tra le sfere ed il piano improprio è uguale all'assoluto (cf. *Osservazione VI.5.11*) dello spazio euclideo, ovvero (nelle coordinate date) la conica del piano improprio di equazioni

$$\mathscr{H} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases}.$$

Iperboloidi. Anche in questo caso, scegliamo come origine il centro della quadrica. Per il Teorema Spettrale esiste una base ortonormale di autovettori e, trattandosi di un iperboloide, gli autovalori non hanno tutti lo stesso segno. In questo riferimento la quadrica ha matrice diagonale e possiamo utilizzare il fattore di proporzionalità per fare in modo che l'entrata di posto $(1,1)$ nella matrice diagonale sia uguale a -1. Le rette per il centro, parallele agli autovettori sono gli *assi* dell'iperboloide. In questo modo gli iperboloidi vengono determinati da 3 parametri e si hanno le equazioni canoniche

Iperboloidi ellittici

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

eq. can.: $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \ (c \leq b < 0 < a)$

Iperboloidi iperbolici

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

eq. can.: $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \ (c < 0 < b \leq a)$

Paraboloidi. Sia W il sostegno del piano improprio. Ancora una volta possiamo applicare il Teorema Spettrale e trovare una base ortonormale di W (rispetto ad h) fatta di autovettori di A'. Poichè A' è degenere, uno degli autovalori è uguale a 0 e sia $\langle v_3 \rangle$ il sottospazio di autovettori corrispondente. Il sottospazio $\langle v_1, v_2 \rangle$, generato dagli autovettori relativi agli autovalori non nulli, determina una retta nel piano improprio, e la polare di questa retta è l'*asse (principale)* del paraboloide, che interseca il supporto della quadrica in $\sigma \langle v_3 \rangle$ ed in un punto proprio $V = \sigma \langle v_0 \rangle$, che viene detto il *vertice* del paraboloide; tale punto va preso come origine del riferimento e le rette per V, parallele agli autovettori, sono gli *assi* del paraboloide. In questo modo i paraboloidi vengono determinati da 2 parametri e si hanno le equazioni canoniche

Paraboloidi ellittici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eq. can.: $ax^2 + by^2 - 2z = 0 \ (0 < a \leq b)$

Paraboloidi iperbolici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eq. can.: $ax^2 + by^2 - 2z = 0 \ (b < 0 < a, \ a \geq |b|)$

5. Fuochi di una conica

Nel piano euclideo, vi sono degli ulteriori punti "notevoli" che si associano ad una conica e sono i suoi *fuochi*. Questi punti sono fondamentali nella descrizione delle coniche come 'luoghi geometrici'; ad esempio, le ellissi sono le curve per cui è costante la somma delle distanze dai fuochi e la conoscenza di quei due punti e della somma delle distanze, caratterizza completamente l'ellisse in questione. Dal nostro punto di vista daremo una definizione 'geometrica' dei fuochi e vedremo che relazioni ci sono tra i punti così definiti e le definizioni delle coniche come luoghi geometrici.

Ricordiamo che si chiamano *rette isotrope* le rette proprie contenenti uno dei punti ciclici (cf. *Osservazione VI.5.11*) e quindi, in particolare, si tratta di rette complesse, non reali.

5.1 Definizione. Sia $\mathscr{C}$ una conica non degenere del piano euclideo. Si chiamano *fuochi* di $\mathscr{C}$ i punti di intersezione delle rette isotrope, tangenti a $\mathscr{C}$.

Mostriamo come si possano determinare esplicitamente tali punti nel caso di un riferimento in cui la conica ha equazione canonica. Distinguiamo quindi i vari casi.

Conica a centro. Consideriamo quindi una conica a centro di equazione $ax^2+by^2=1$ e siano $C=\begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix}$ e $\overline{C}=\begin{pmatrix}0\\1\\-i\end{pmatrix}$ i punti ciclici. Una generica retta isotropa, passante per C, ha equazione affine $r_k: ix-y=k$, con $k\in\mathbb{C}$, e la sua coniugata $\overline{r_k}: -ix-y=\overline{k}$ è una retta isotropa passante per l'altro punto ciclico, $\overline{C}$.

Considerando le coordinate plückeriane –ovvero la riga dei coefficienti dell'equazione– la retta $r_k=(k,-i,1)$ è tangente alla conica $\mathscr{C}$ se, e solo se, $r_kA^{-1}{}^tr_k=0$, ove $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$ è la matrice della conica $\mathscr{C}$ (cf. `Esercizio VII.1.6`).

Dunque, le tangenti isotrope a $\mathscr{C}$ sono le rette(*)

$$\begin{array}{llll} r_1: ix-y=i\sqrt{a^{-1}-b^{-1}} & \text{ed} & r_2: ix-y=-i\sqrt{a^{-1}-b^{-1}} & \text{uscenti da } C;\\ \overline{r_1}: ix+y=i\sqrt{a^{-1}-b^{-1}} & \text{ed} & \overline{r_2}: ix+y=-i\sqrt{a^{-1}-b^{-1}} & \text{uscenti da } \overline{C}. \end{array}$$

Si ottengono così due fuochi reali di coordinate omogenee

$$F_1=r_1\cap\overline{r_1}=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\\0\end{pmatrix}\qquad\text{ed}\qquad F_2=r_2\cap\overline{r_2}=\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\\0\end{pmatrix}$$

e due fuochi di coordinate complesse coniugate $F=r_1\cap\overline{r_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\-i\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\end{pmatrix}$ ed $\overline{F}=r_2\cap\overline{r_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\i\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\end{pmatrix}$.

Possiamo quindi riassumere quanto visto affermando che, in una conica a centro di equazione canonica $ax^2+by^2=1$, vi sono due fuochi reali e due fuochi complessi coniugati (non reali). I fuochi si trovano sugli assi,e l-asse che contiene i fuochi reali prende il nome di *asse focale*. L'asse focale è parallelo all'autovettore relativo all'autovalore che determina il coefficiente a dell'equazione canonica. I due fuochi reali sono simmetrici rispetto al centro della conica e si trovano a distanza $\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$ da quest'ultimo.

.

Parabola. Consideriamo quindi una parabola di equazione $2y-ax^2=0$ e siano $C=\begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix}$ e $\overline{C}=\begin{pmatrix}0\\1\\-i\end{pmatrix}$ i punti ciclici. La retta impropria è una retta tangente a $\mathscr{C}$ e contiene entrambi i punti ciclici e quindi ci aspettiamo di trovare una retta isotropa passante per C e la sua coniugata, passante per $\overline{C}$; la loro intersezione determinerà un unico fuoco. Una generica retta isotropa, passante per C, ha equazione affine

(*) Il lettore è invitato a verificare che, qualunque conica a centro (non degenere) si stia considerando, l'argomento della radice quadrata è un numero reale non-negativo.

$r_k : ix - y = k$, con $k \in \mathbb{C}$, e la sua coniugata $\overline{r_k} : -ix - y = \overline{k}$ è una retta isotropa passante per l'altro punto ciclico, $\overline{C}$.

Considerando le coordinate plückeriane –ovvero la riga dei coefficienti dell'equazione– la retta $r_k = (k, -i, 1)$ è tangente alla conica $\mathscr{C}$ se, e solo se, $r_k A^{-1} {}^t r_k = 0$, ove $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è la matrice della conica $\mathscr{C}$ (cf. `Esercizio VII.1.6`).

Dunque, le tangenti isotrope a $\mathscr{C}$ sono le due rette

$$r : ix - y = -\frac{1}{2a} \quad \text{ed} \quad \overline{r} : ix + y = \frac{1}{2a}$$

che si intersecano nell'unico fuoco (reale) di coordinate omogenee

$$F = r \cap \overline{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2a} \end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi riassumere quanto detto, affermando che una parabola di equazione canonica $2y = ax^2$ ha un solo fuoco, che è un punto reale dell'asse e si trova a distanza $\frac{1}{2a}$ dal vertice.

Vi sono due punti dell'asse, a distanza $\frac{1}{2a}$ dal vertice, ed il fuoco F è caratterizzato dal fatto che la sua polare, d, non interseca la parabola in punti reali. La polare del fuoco è detta la *direttrice* della parabola.

.

Il lettore è invitato a determinare i fuochi delle coniche studiate negli esercizi della sezione precedente.

Esercizio 5.1. *Si studi la conica $\mathscr{C}$ del piano euclideo, di equazione affine* $11x^2 - 4xy + 14y^2 + 22x - 4y + 5 = 0$.

Svolgimento. Supponiamo il piano euclideo immerso nel piano proiettivo scegliendo come di consueto, la retta impropria di equazione omogenea $x_0 = 0$ ed utilizziamo indifferentemente sia coordinate omogenee che le corrispondenti coordinate affini.

La conica $\mathscr{C}$ ha matrice

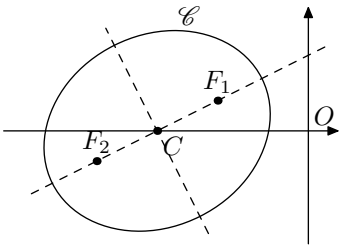
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 11 & -2 \\ 11 & 11 & -2 \\ -2 & -2 & 14 \end{pmatrix}$$

con $\det A = -2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = -6 \cdot 150$ e $\det A' = 150$. Dunque si tratta di un'ellisse (non-degenere). Il polinomio caratteristico di A' è $x^2 - 25x + 150$ le cui radici sono $\lambda_1 = 15$ e $\lambda_2 = 10$. Gli autovettori corrispondenti determinano le direzioni degli assi dell'ellisse, ovvero i punti impropri $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Gli assi sono quindi le polari di questi due punti, ovvero le rette

$$h_1 : 2x + y + 2 = 0, \qquad \text{ed} \qquad h_2 : x - 2y + 1 = 0 \text{ (asse focale)},$$

che si intersecano nel centro, ovvero nel punto C, di coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



L'equazione canonica dell'iperbole è $\frac{5}{3}X^2 + \frac{5}{2}Y^2 = 1$, e quindi la distanza dei fuochi dal centro è $\delta = \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

I fuochi sono i punti di cordinate omogenee $F_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ovvero $F_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed $F_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$ e concludiamo la discussione, con un abbozzo della conica e dei suoi assi. □

Esercizio 5.2. *Si studi la conica $\mathscr{C}$ del piano euclideo, di equazione affine* $10x^2 - 20xy - 5y^2 - 12x + 6y - 6 = 0$.

Svolgimento. Supponiamo il piano euclideo immerso nel piano proiettivo scegliendo come di consueto, la retta impropria di equazione omogenea $x_0 = 0$ ed utilizziamo indifferentemente sia coordinate omogenee che le corrispondenti coordinate affini.

La conica $\mathscr{C}$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -6 & 10 & -10 \\ 3 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

con $\det A = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ e $\det A' = -2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Dunque si tratta di un'iperbole (non-degenere).

Il polinomio caratteristico di A' è $x^2 - 5x - 150$ le cui radici sono $\lambda_1 = 15$ e $\lambda_2 = -10$. Gli autovettori corrispondenti determinano le direzioni degli assi dell'iperbole, ovvero i punti impropri $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Gli assi sono quindi le polari di questi due punti, ovvero le rette

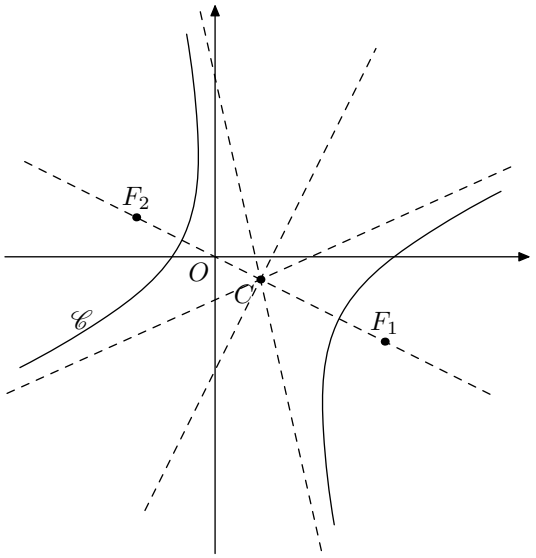
$h_1 : 2x - y - 1 = 0$, ed $h_2 : x + 2y = 0$ (asse focale),

che si intersecano nel centro, ovvero nel punto C, di coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

L'equazione canonica dell'iperbole è

$$\tfrac{5}{3}X^2 - \tfrac{10}{9}Y^2 = 1,$$

e quindi la distanza dei fuochi dal centro è $\delta = \sqrt{\frac{3}{5} + \frac{9}{10}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. I fuochi sono i punti $F_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, ovvero i punti di coordinate omogenee $F_{1,2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \pm 2\sqrt{30} \\ -2 \mp \sqrt{30} \end{pmatrix}$.



I punti di intersezione tra la conica e la retta impropria sono $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2+\sqrt{6} \end{pmatrix}$ e $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2-\sqrt{6} \end{pmatrix}$, le cui polari sono gli asintoti di $\mathscr{C}$. Concludiamo la discussione, con un abbozzo della conica, dei suoi assi e degli asintoti. □

Esercizio 5.3. *Si studi la conica $\mathscr{C}$ del piano euclideo, di equazione affine* $4x^2 + y^2 - 4xy - 6x - 12y + 30 = 0$.

Svolgimento. Supponiamo il piano euclideo immerso nel piano proiettivo scegliendo come di consueto, la retta impropria di equazione omogenea $x_0 = 0$ ed utilizziamo indifferentemente sia coordinate omogenee che le corrispondenti coordinate affini.

La conica $\mathscr{C}$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -3 & -6 \\ -3 & 4 & -2 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

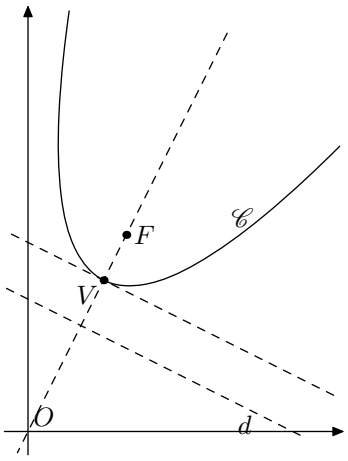
con $\det A = -225$ e $\det A' = 0$. Dunque si tratta di una parabola (non-degenere).

Il polinomio caratteristico di A' è x^2-5x e l'autovettore corrispondente all'autovalore 0, dà la direzione dell'asse della parabola, ovvero il punto improprio $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. All'autovalore 5, corrisponde la direzione ortogonale $P_\infty^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; e l'asse di $\mathscr{C}$ è la polare di $P_\infty^\perp$, ovvero la retta $h : y - 2x = 0$, che interseca la parabola nel vertice $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

L'equazione canonica della parabola è $6Y - \sqrt{5}X^2 = 0$, e quindi la distanza del fuoco dal vertice è $\delta = \frac{3}{2\sqrt{5}}$. Il fuoco è il punto

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{10} \\ \frac{13}{5} \end{pmatrix}.$$

La direttrice è la polare del fuoco, ovvero la retta $d : 2x + 4y - 7 = 0$.



Concludiamo la discussione, con un abbozzo della parabola, del suo asse e della direttrice. □

Esercizio 5.4. Si consideri la conica $\mathscr{C}$ del piano euclideo, di equazione affine $x^2 + 4xy - 4x + 2y - 2 = 0$, e se ne determinino il centro, gli assi, i fuochi e l'equazione canonica. □

Esercizio 5.5. Si consideri la conica $\mathscr{C}$ del piano euclideo, di equazione affine $2x^2 + 2y^2 - 5xy + x = 0$, e se ne determinino gli eventuali assi, centro, vertici, fuochi, direttrice, asintoti ed equazione canonica. □

Esercizio 5.6. Si consideri la conica $\mathscr{C}$ del piano euclideo, di equazione affine $x^2 + y^2 + 4xy + 2y - 2 = 0$, e se ne determinino gli eventuali assi, centro, vertici, fuochi, direttrice ed equazione canonica. □

Esercizio 5.7. Si consideri la conica $\mathscr{C}$ del piano euclideo, di equazione affine $x^2 + 3y^2 + 4xy + 2y - 2 = 0$, e se ne determinino il centro, gli assi, i fuochi e l'equazione canonica. □

Esercizio 5.8. Si consideri la conica $\mathscr{C}$ del piano euclideo, di equazione affine $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x - 2y = 0$, e se ne determinino l'equazione canonica e gli eventuali assi, centro, vertici, fuochi, direttrice, asintoti. □

Esercizio 5.9. Si consideri la conica $\mathscr{C}$ del piano euclideo, di equazione affine $12x^2 - 7xy - 12y^2 + 24x - 7y - 13 = 0$, e se ne determinino l'equazione canonica e gli eventuali assi, centro, vertici, fuochi, direttrice, asintoti. □

Facciamo vedere come si possa ricavare facilmente una nota proprietà del fuoco di una parabola.

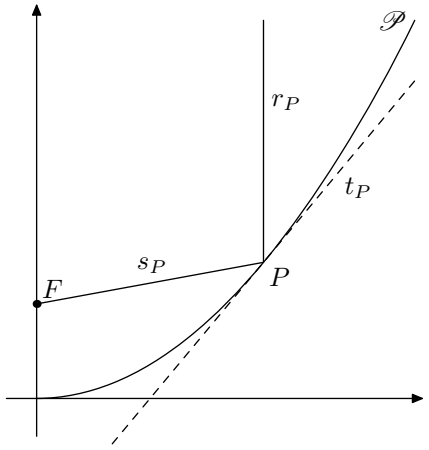
Esercizio 5.10. *Sia $\mathscr{P}$ una parabola nel piano euclideo e sia P un suo punto (proprio). Si indichi con r_P la retta passante per P e parallela all'asse della parabola e sia $s_P \neq r_P$ la retta passante per P e formante con la tangente t_P a $\mathscr{P}$ in P un angolo (non-orientato) uguale all'angolo tra r_P e t_P.*

Si mostri che la retta s_P passa per il fuoco F della parabola $\mathscr{P}$.(*)

Svolgimento. Possiamo scegliere un riferimento (ortonormale) nel piano affinchè $\mathscr{P}$ abbia equazione affine $y = ax^2$.

(*) Si può dare un'interpretazione "fisica" di questo esercizio. La retta r_P può essere pensata come un raggio di luce incidente lo specchio parabolico $\mathscr{P}$ ed s_P come il raggio riflesso.

Tracciamo qui di fianco uno schizzo della situazione.



Il fuoco F di $\mathscr{P}$ ha coordinate $F = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4a} \end{pmatrix}$ e l'asse è la retta di equazione $x = 0$, ed è quindi parallela al vettore $z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un generico punto di $\mathscr{P}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} \lambda \\ a\lambda^2 \end{pmatrix}$, al variare di λ tra i numeri reali, e la tangente a $\mathscr{P}$ in P è la retta di equazione $t_P : 2a\lambda x - y = a\lambda^2$.

In particolare, t_P è parallela al vettore $v_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2a\lambda \end{pmatrix}$. Considerato quindi il vettore $F - P = \frac{1}{4a} \begin{pmatrix} -4a\lambda \\ 1-4a^2\lambda^2 \end{pmatrix}$, la tesi è verificata se si mostra che i vettori z ed $F - P$ formano lo stesso angolo non-orientato con v_P, ovvero se vale l'uguaglianza

$$\frac{|(F-P)\cdot v_P|}{\|F-P\|\,\|v_P\|} = \frac{|z\cdot v_P|}{\|z\|\,\|v_P\|}.$$

Infatti, si ha:

$$\frac{|(F-P)\cdot v_P|}{\|F-P\|\,\|v_P\|} = \frac{|-4a\lambda + 2a\lambda - 8a^3\lambda^3|}{\|v_P\|\sqrt{16a^2 + (1-4a^2\lambda^2)^2}} =$$
$$= \frac{|2a\lambda|\,|1+4a^2\lambda^2|}{\|v_P\|\sqrt{(1+4a^2\lambda^2)^2}} = \frac{|2a\lambda|}{\|v_P\|} = \frac{|z\cdot v_P|}{\|z\|\,\|v_P\|}$$

e ciò conclude la discussione. □

Esercizio 5.11. *Si consideri l'iperbole $\mathscr{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathscr{C} : 2x^2 - 2y^2 + 3xy + 5x + 5y = 0.$$

Si determinino il centro, gli assi e gli asintoti di $\mathscr{C}$. Si determinino inoltre l'equazione canonica di $\mathscr{C}$ e la matrice di un'isometria che porta gli assi coordinati sugli assi della conica.

Svolgimento. Si tratta dell'iperbole non degenere, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix},$$

essendo $\det A = 6 \cdot 25$ e $\det A' = -25$. La matrice $A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ ha gli autovalori 5 e -5, a cui corrispondono gli spazi di autovettori, ovvero i punti impropri $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, le cui polari sono gli assi di $\mathscr{C}$. In particolare, poichè $-\frac{\det A'}{\det A} = \frac{1}{6} > 0$, la direzione dell'asse focale è lo spazio di autovettori relativi all'autovalore positivo. Gli assi di $\mathscr{C}$ sono quindi

$$h_1 : x - 3y + 2 = 0 \text{ (asse focale)}, \qquad \text{ed} \qquad h_2 : 3x + y + 4 = 0.$$

Il centro è l'intersezione degli assi, ovvero il punto di coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$. In base a quanto visto, $\mathscr{C}$ è un'iperbole equilatera di equazione canonica $\frac{5}{6}X^2 - \frac{5}{6}Y^2 = 1$.

Gli asintoti sono le polari dei due punti di intersezione tra $\mathscr{C}$ e la retta impropria, ovvero le polari di $A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, cioè le rette

$$a_1 : x + 2y + 1 = 0 \qquad \text{ed} \qquad a_2 : 2x - y + 3 = 0.$$

Infine, la matrice della trasformazione di coordinate è

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{5} & \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \qquad \text{e si ha} \qquad -\tfrac{\det A'}{\det A}\ {}^tXAX = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Ciò conclude la discussione. □

Esercizio 5.12. *Sia $\mathscr{C}$ un'ellisse (non degenere) del piano euclideo e sia C il suo centro. Dato un punto $P \neq C$ del piano, si consideri il punto $P' = (P + C) \cap \pi_{\mathscr{C}}(P)$, ove $\pi_{\mathscr{C}}(P)$ indica la retta polare di P.*

(a) Si mostri che la corrispondenza $P \mapsto P'$ è ben definita ed ha periodo 2.

(b) Nel caso in cui $\mathscr{C} : x^2 + y^2 = 1$ (riferimento ortonormale), si scrivano esplicitamente le coordinate del punto P' in funzione delle coordinate del punto $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Inoltre, si mostri che ogni retta verticale $x = c$ ($c \neq 0$) viene trasformata da questa corrispondenza in una circonferenza passante per C e se ne determinino centro e raggio.

Svolgimento. (a). Dato un punto $P \neq C$ del piano affine, si ha $(P + C) \neq \pi_{\mathscr{C}}(P)$, perchè ogni retta per il centro ha il polo sulla retta impropria (polare del centro). Inoltre, le due rette si incontrano in un punto del piano affine, perchè altrimenti, il punto improprio di $P + C$ apparterrebbe alla propria polare e sarebbe quindi un punto reale di $\mathscr{C}$ sulla retta impropria, e ciò non è possibile, perchè $\mathscr{C}$ è un'ellisse. Osserviamo infine che P' è un punto della retta $P + C$ diverso da C (perchè?); quindi $P + C = P' + C$ e, poichè P' è un punto della polare di P, la sua polare passa per P e quindi P è l'intersezione tra $P' + C$ e $\pi_{\mathscr{C}}(P')$(†).

(*b*). Fissato il punto $P = \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, i punti della retta $P + C$ hanno coordinate $\begin{pmatrix} \lambda x_0 \\ \lambda y_0 \end{pmatrix}$, al variare di λ in $\mathbb{R}$. Un tale punto appartiene alla polare di P se, e solo se,

$$(1, x_0, y_0) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda x_0 \\ \lambda y_0 \end{pmatrix} = 0;$$

ovvero se, e solo se, $\lambda(x_0^2 + y_0^2) - 1 = 0$. Ciò significa che la corrispondenza si può scrivere esplicitamente nella forma

$$P = \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) \mapsto P' = \begin{pmatrix} \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2} \\ \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} \end{pmatrix}.$$

Dunque, i punti della retta verticale $x = c$ vengono trasformati nei punti di $S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{c}{c^2 + t^2} \\ \frac{t}{c^2 + t^2} \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$ ed, in particolare, si ha

$$\left(\frac{c}{c^2 + t^2}\right)^2 + \left(\frac{t}{c^2 + t^2}\right)^2 = \frac{1}{c^2 + t^2} = 2\frac{1}{2c}\left(\frac{c}{c^2 + t^2}\right),$$

da cui si deduce che

$$\left(\frac{c}{c^2 + t^2} - \frac{1}{2c}\right)^2 + \left(\frac{t}{c^2 + t^2}\right)^2 = \frac{1}{4c^2},$$

(†) Esercizio per il lettore: si scelga un riferimento (ortonormale) del piano euclideo i cui assi coincidano con gli assi di $\mathscr{C}$ e si supponga che l'ellisse abbia equazione $ax^2 + by^2 = 1$, con $a > 0 < b$. Si scrivano quindi esplicitamente le coordinate del punto P' in funzione delle coordinate del punto $P = \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$.

ovvero che tutti i punti di S appartengono alla circonferenza di centro $\begin{pmatrix} \frac{1}{2c} \\ 0 \end{pmatrix}$ e raggio $\frac{1}{2c}$. In particolare, a partire dai punti della retta, si ottengono in tal modo tutti i punti della circonferenza, ad eccezione del punto $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ che non è nell'immagine della corrispondenza data. □

Esercizio 5.13. *Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri l'ipersuperficie di equazione*

$$\mathscr{E} : x^2 + 6y^2 + 2z^2 = 3$$

(a) Si determinino i due fasci di piani che tagliano su $\mathscr{E}$ dei cerchi e si distinguano i cerchi di raggio reale e di raggio immaginario.

(b) Si determini il luogo formato dai centri di tali circonferenze.

Svolgimento. (a). Consideriamo lo spazio euclideo immerso nel modo consueto nello spazio proiettivo, con piano improprio $\pi_\infty : x_0 = 0$. Un piano (reale) π taglia su $\mathscr{E}$ un cerchio se, e solo se, la sua retta impropria, $\pi \cap \pi_\infty$, interseca $\mathscr{E}$ in due punti ciclici per la metrica euclidea, ovvero in due punti impropri appartenenti alla conica $\mathscr{H} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Si tratta quindi di trovare, i punti di $\pi_\infty \cap \mathscr{H} \cap \mathscr{E}$ e determinare le famiglie di piani (reali e propri) che contengono coppie di tali punti. Si ha

$$\pi_\infty \cap \mathscr{H} \cap \mathscr{E} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_3^2 = 0 \end{cases}$$

da cui si deduce che i quattro punti (complessi, a due a due, coniugati) di intersezione sono contenuti nelle due rette (reali ed improprie) di equazioni omogenee

$$s_\infty : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad t_\infty : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}.$$

Dunque i piani che tagliano cerchi su $\mathscr{E}$ formano i due fasci di piani paralleli

$$\tau^{(k)} : x + 2y = k \qquad \text{e} \qquad \sigma^{(k)} : x - 2y = k.$$

Per sapere se su un tale piano resta tagliato un cerchio con o senza punti reali, basta considerare la forma quadratica indotta da $\mathscr{E}$ sul sottospazio di $\mathbb{R}^4$ corrispondente al piano in questione. Più esplicitamente, al piano $\sigma^{(k)}$ corrisponde il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni dell'equazione omogenea $x_1 - 2x_2 - kx_0 = 0$. Su tale sottospazio (x_0, x_2, x_3) sono un sistema di coordinate $(x_1 = 2x_2 + kx_0)$ ed in tali coordinate, la forma quadratica indotta da $\mathscr{E}$ è $(k^2 - 3)x_0^2 + 4kx_0x_2 + 10x_2^2 + 2x_3^2$ che è definita positiva se, e solo se, $k^2 > 5$. Dunque, i cerchi $\sigma^{(k)} \cap \mathscr{E}$ hanno raggio reale e positivo se $k^2 < 5$, si riducono ad un punto[(*)] se $k^2 = 5$, mentre hanno raggio immaginario se la forma quadratica è definita positiva, ovvero se $k^2 > 5$. Un calcolo analogo porta a determinare gli stessi valori di k anche per i raggi dei cerchi $\tau^{(k)} \cap \mathscr{E}$.

(*b*). Il centro di una conica (quando esiste) è il polo della retta impropria del piano affine su cui giace la conica. La superficie $\mathscr{E}$ è una quadrica dello spazio tridimensionale e quindi determina una polarità di tale spazio. Inoltre, trattandosi di due fasci di piani paralleli, si ha la stessa retta impropria per tutti i piani di un fascio. Dunque il centro del cerchio tagliato su $\mathscr{E}$ dal piano $\sigma^{(k)}$ è l'intersezione tra tale piano e la polare (rispetto ad $\mathscr{E}$) della retta s_∞ ed analogamente, il centro del cerchio tagliato su $\mathscr{E}$ dal piano $\tau^{(k)}$ è l'intersezione tra tale piano e la polare della retta t_∞. Ciò significa che i centri dei circoli di $\mathscr{E}$ sono tutti e soli i punti delle polari delle rette s_∞ e t_∞, ovvero formano le due rette di equazioni affini[(†)]

$$s : \begin{cases} x + 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad t : \begin{cases} x - 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

(*) I punti in questione, ovvero i punti in cui i piani che tagliano circoli sono tangenti alla superficie di $\mathscr{E}$, si dicono i *punti ombelicali* o gli *ombelichi* di $\mathscr{E}$. Vedremo nello svolgimento di (*b*) che i centri dei circoli in questione stanno su due rette e quindi i punti ombelicali possono esere determinati come intersezione di tali rette con la superficie $\mathscr{E}$.

(†) Per trovare le equazioni della polare s di s_∞, è sufficiente considerare due punti distinti di s_∞ ed intersecare i piani polari di tali punti. Analogamente si può procedere per determinare la polare t di t_∞.

Ciò conclude la discussione. □

5.2 Osservazione. Come abbiamo visto nell'esercizio precedente, sulle quadriche a punti ellittici vi sono dei punti in cui i piani dei fasci che tagliano cerchi divengono tangenti alla quadrica. Tali punti sono gli *ombelichi* della quadrica. Determiniamo le coordinate degli ombelichi per le quadriche in forma canonica.

Sia $\mathscr{E} : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$, con $a > b > c > 0$ un ellissoide e determiniamone gli ombelichi. Le intersezioni con l'assoluto sono le soluzioni del sistema

$$\mathscr{E} \cap \mathscr{H} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

ovvero i punti impropri

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},\ \bar{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ -p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ p_2 \\ -p_3 \end{pmatrix},\ \bar{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ -p_2 \\ -p_3 \end{pmatrix}, \qquad \text{ove} \qquad \begin{cases} p_1 = \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}} \\ p_2 = \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} \\ p_3 = \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} \end{cases}.$$

Le giaciture dei piani che tagliano cerchi su $\mathscr{E}$ sono quindi le due rette improprie

$$P \vee \bar{P} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ p_3 x_1 - p_1 x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad Q \vee \bar{Q} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ p_3 x_1 + p_1 x_3 = 0 \end{cases}.$$

I poli dei piani dei due fasci che siano sul supporto della quadrica sono i quattro punti di coordinate affini

$$H_1 = \begin{pmatrix} a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \\ 0 \\ c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} -a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \\ 0 \\ c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} -a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \\ 0 \\ -c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \\ 0 \\ -c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} \end{pmatrix}.$$

Nel caso di un ellissoide di rotazione gli ombelichi divengono due e coincidono con due vertici, mentre nel caso della sfera tutti i punti sono ombelichi.

Un calcolo analogo si può fare per l'iperboloide ellittico, di equazione $\mathscr{I} : \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$, con $b > c > 0$ che interseca l'assoluto nei punti impropri

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},\ \bar{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ -p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ p_2 \\ -p_3 \end{pmatrix},\ \bar{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ -p_2 \\ -p_3 \end{pmatrix}, \qquad \text{ove} \qquad \begin{cases} p_1 = \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}} \\ p_2 = \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}} \\ p_3 = \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}} \end{cases}.$$

I fasci di piani di giaciture $P \vee \bar{P}$ e $Q \vee \bar{Q}$, sono tangenti alla quadrica nei quattro punti di coordinate affini

$$H_1 = \begin{pmatrix} a\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}} \\ 0 \\ c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2+c^2}} \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} -a\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}} \\ 0 \\ c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2+c^2}} \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} -a\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}} \\ 0 \\ -c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2+c^2}} \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} a\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}} \\ 0 \\ -c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2+c^2}} \end{pmatrix}.$$

Nel caso di un iperboloide ellittico di rotazione, gli ombelichi divengono due e coincidono con i due vertici.

Infine, nel caso del paraboloide ellittico di equazione $\mathscr{P} : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 2Z = 0$, con $a > b > 0$, l'intersezione con l'assoluto è data dai punti impropri

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},\ \bar{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ p_2 \\ -p_3 \end{pmatrix},\ \bar{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_1 \\ p_2 \\ -p_3 \end{pmatrix}, \qquad \text{ove} \qquad \begin{cases} p_1 = ia \\ p_2 = b \\ p_3 = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}.$$

I fasci di piani di giaciture $P \vee \bar{P}$ e $Q \vee \bar{Q}$, sono tangenti alla quadrica solo in due punti propri, di coordinate affini

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} \\ \frac{a^2-b^2}{2} \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} \\ \frac{a^2-b^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Si ha un unico ombelico, coincidente con il vertice, per il paraboloide di rotazione.

Esercizio 5.14. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le due rette*

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ x - z = 3 \end{cases} \qquad ed \qquad s : \begin{cases} x + z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

(a) Si verifichi che le due rette sono sghembe e se ne calcoli la distanza.
(b) Si scriva l'equazione del luogo $\mathscr{Q}$ dei punti dello spazio la cui distanza da r è uguale alla distanza da s.
(c) Si determinino, se esistono, dei piani passanti per $S = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$ che taglino su $\mathscr{Q}$ una circonferenza.

Svolgimento. (a). La retta r passa per il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la retta s passa per il punto $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. In particolare le due rette non sono parallele tra loro e la loro distanza d si può calcolare come

$$d = \frac{|(Q-P) \cdot v \times w|}{\|v \times w\|} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

Poiché le due rette hanno distanza positiva e non sono parallele tra loro, si tratta di due rette sghembe.

(b). Un punto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è equidistante dalle due rette se, e solo se,

$$\frac{\|(X-P) \times v\|}{\|v\|} = \frac{\|(X-Q) \times w\|}{\|w\|}$$

da cui si deduce che le coordinate di X devono essere soluzioni dell'equazione

$$\mathscr{Q} : x^2 - 4xy - 10xz - 2y^2 - 4yz + z^2 - 20x + 28y + 16z + 4 = 0.$$

(c). Un piano π taglia una circonferenza su $\mathscr{Q}$ se, e solo se, l'intersezione $\pi \cap \mathscr{Q} \cap \pi_\infty$ è costituita da due punti appartenenti all'assoluto $\mathscr{H}$, ovvero alla conica (di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$) di equazioni $\mathscr{H} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases}$.

Dunque i piani che tagliano circonferenze su $\mathscr{Q}$ hanno come giacitura (retta impropria corrispondente al sottospazio direttore) delle rette reali passanti per due dei punti (non-reali, e quindi coniugati) di intersezione tra $\mathscr{Q}$ e $\mathscr{H}$. Cerchiamo quindi di determinare l'intersezione

$$\mathscr{Q} \cap \mathscr{H} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^2 - 4x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2 = 0 \end{cases}.$$

Il fascio di coniche del piano improprio determinato da $\mathscr{Q}$ ed $\mathscr{H}$ contiene la conica degenere

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 - 4x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ [(2-\sqrt{6})(2x_1+x_2)-(x_3-x_1)][(2+\sqrt{6})(2x_1+x_2)-(x_3-x_1)] = 0 \end{cases}$$

che si spezza nelle due rette reali che danno le giaciture dei piani cercati. Osserviamo che le giaciture trovate coincidono con le due rette in cui si decompone la conica degenere $\mathscr{Q} \cap \pi_\infty$ ($\mathscr{Q}$ è un paraboloide iperbolico), e quindi tutti i "cerchi" sulla quadrica sono in realtà coniche degeneri che contengono la retta impropria nel loro supporto e perciò passano per i punti ciclici. □

Esercizio 5.15. Si consideri la parabola $\mathscr{C}$ del piano euclideo, di equazione affine

$$\mathscr{C} : 9x^2 - 12xy + 4y^2 + 4x + 6y = 0.$$

Si determinino il vertice, l'asse, il fuoco e la direttrice di $\mathscr{C}$. Si determinino inoltre l'equazione canonica di $\mathscr{C}$ e la matrice di un'isometria che porta l'equazione di $\mathscr{C}$ in forma canonica. □

Esercizio 5.16. *Nel piano euclideo, siano P un punto ed r una retta non passante per P. Per ogni scelta di e tra i numeri reali positivi, si mostri che il luogo dei punti X soddisfacenti alla condizione $\|X-P\| = ed(X,r)$ è una conica.*

Si mostri inoltre che, per ogni valore di e, l'asse focale di tale conica è sempre perpendicolare alla retta r e che P è uno dei fuochi della conica. Si dica se ogni conica può essere descritta in questo modo, a meno di isometrie.

Svolgimento. Possiamo sempre supporre di aver fissato un sistema di coordinate (ortonormali) nel piano euclideo che abbia il punto P come origine e per il quale la retta r abbia equazione $x = d$, con $d > 0$. Dunque, in tale sistema di coordinate, il luogo dei punti soddisfacenti alla condizione $\|X-P\| = ed(X,r)$ è la curva di equazione $x^2+y^2 = e^2(x-d)^2$, ovvero la conica di matrice

$$A = \begin{pmatrix} e^2d^2 & -e^2d & 0 \\ -e^2d & e^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si vede così che, per ogni valore di $e > 0$, si tratta di una conica non-degenere ($\det A = e^2d^2$) ed, in particolare, si ha un'ellisse per $0 < e < 1$, una parabola per $e = 1$ ed un'iperbole per $e > 1$ ($\det A' = 1-e^2$).

Per $e \neq 1$, il centro della conica ha coordinate (affini) $\begin{pmatrix} \frac{e^2d}{e^2-1} \\ 0 \end{pmatrix}$, e quindi, la retta $y = 0$ è un asse della conica, perchè gli assi della conica sono paralleli agli assi coordinati. Inoltre, anche quando la conica è una parabola, l'asse è parallelo alla retta $y = 0$ e quindi, per concludere la discussione è sufficiente verificare che, per ogni valore di $e > 0$, il punto P è un fuoco della conica. Dunque è sufficiente verificare che le tangenti alla conica uscenti da P sono rette isotrope. La polare di P è la retta di equazione affine $x = d$ (cioè la retta r) che interseca la conica nei punti (di $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$) di coordinate affini $R_1 = \begin{pmatrix} d \\ id \end{pmatrix}$ ed $R_2 = \begin{pmatrix} d \\ -id \end{pmatrix}$ e si verifica con un calcolo diretto che le polari di tali punti sono rette isotrope. Ciò risponde completamente al quesito posto.

Può essere interessante osservare che in questo modo si può costruire ogni conica non-degenere (a meno di isometria) facendo variare opportunamente i parametri e e d. Osserviamo infatti che ogni parabola (non degenere) si può ottenere ponendo $e = 1$ e facendo variare la distanza d. Inoltre, se $e \neq 1$, i quadrati dei semiassi della conica di matrice A sono

$$\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2} \qquad \text{ed} \qquad \frac{e^2d^2}{1-e^2}$$

ed è facile, al variare di e e d, ottenere per tali frazioni qualsiasi coppia di valori non-nulli distinti, il primo positivo ed il secondo di segno arbitrario. Quindi in questo modo possiamo costruire, a meno di isometria, qualsiasi conica con eccentricità $e \neq 0$. Resta aperto il problema di determinare le circonferenze, coniche con eccentricità $e = 0$. Infatti, se si pone $e = 0$ nella definizione iniziale, si ottiene la condizione $\|X-P\| = 0$ e quindi la circonferenza degenere di raggio nullo, centrata in P. Le circonferenze di raggio positivo si possono ottenere solo con un opportuno 'passaggio al limite'. Infatti, fissato un numero reale $k > 0$, possiamo considerare i parametri e e d legati dalla condizione $ed = k$ e far tendere $e \to 0$ sotto questa condizione (in tal modo $d \to \infty$ e quindi la retta

r si allontana indefinitamente da P). In questo modo i quadrati dei semiassi tendono entrambi a k^2 e si ottiene così come limite la circonferenza di centro P e raggio k. □

Esercizio 5.17. *Si consideri l'iperbole $\mathscr{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 10xy + 4x - 4y + \tfrac{5}{3} = 0.$$

(a) Si determinino il centro, gli assi e l'equazione canonica di $\mathscr{C}$.
(b) Si determini inoltre la matrice di un'affinità che trasforma $\mathscr{C}$ in un'iperbole equilatera con centro nell'origine.

Svolgimento. Si tratta dell'iperbole non degenere, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix},$$

essendo $\det A = -8$ e $\det A' = -24$. La matrice $A' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ha gli autovalori 6 e -4, i cui spazi di autovettori corrispondono ai punti impropri $P_\infty = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ e $Q_\infty = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, le cui polari sono gli assi di $\mathscr{C}$. In particolare, poichè $-\frac{\det A'}{\det A} = -3 < 0$, la direzione dell'asse focale è lo spazio di autovettori relativi all'autovalore negativo, ovvero Q_∞. Quindi gli assi di $\mathscr{C}$ sono

$$h_1 : 3x - 3y + 2 = 0 \text{ (asse focale)}, \qquad \text{e} \qquad h_2 : x + y = 0.$$

Il centro è l'intersezione degli assi, ovvero il punto di coordinate omogenee $C = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. In base a quanto visto, l'equazione canonica dell'iperbole $\mathscr{C}$ è quindi $\frac{X^2}{1/12} - \frac{Y^2}{1/18} = 1$. Infine, un'affinità che trasformi $\mathscr{C}$ in un'iperbole equilatera con centro nell'origine, si può trovare portando l'origine degli assi nel centro di $\mathscr{C}$, portando gli assi coordinati sugli assi di $\mathscr{C}$ ed infine, modificando le unità di misura sugli assi in modo da far coincidere il valore assoluto dei due semiassi dell'ellisse. Si può quindi considerare l'affinità di matrice

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \qquad \text{e si ha} \qquad -\tfrac{1}{3}\,{}^tXAX = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix},$$

che è la matrice di un'iperbole equilatera con centro nell'origine. □

5.3 Un appunto sulle proprietà focali. Sia $\mathscr{C}$ una conica non degenere nel piano euclideo e sia h un suo asse. Fissato un punto $P \in h$, si indichi con $p = \pi_{\mathscr{C}}(P)$ la polare del punto P. Data una retta u passante per P, consideriamo la retta u', perpendicolare ad u e passante per il polo di u.

Vogliamo mostrare che, comunque si scelga u passante per P, le rette u' costruite nel modo precedente, passano tutte per uno stesso punto P' di h. La corrispondenza tra u ed u', è equivalente alla proiettività $f : p \to r_\infty$, che manda il polo U della retta u nel punto improprio della retta u', ovvero la corrispondenza che associa ad $U \in p$ la direzione ortogonale alla polare u di U. Se mostriamo che questa proiettività è una prospettività e che il centro di prospettiva appartiene all'asse h, abbiamo dimostrato l'asserto. A tale scopo, consideriamo il punto $H = p \cap r_\infty$. Per costruzione, la polare di H è l'asse h della conica e quindi la direzione ortogonale ad h è il punto H che è quindi unito nella proiettività f, che perciò è una prospettività. Inoltre, considerato il punto $K = p \cap h$, si verifica che $f(K) = h \cap r_\infty$ e quindi che il centro di prospettiva P' appartiene all'asse h.

Ora vogliamo mostrare che, la corrispondenza $P \mapsto P'$ è una proiettività involutoria di h in sé. I punti uniti di tale involuzione sono i fuochi contenuti nell'asse h della conica $\mathscr{C}$. È chiaro dalla costruzione che

la corrispondenza tra P e P' ha periodo 2. Per verificare che si tratta di una proiettività si può ragionare nel modo seguente: fissato un punto improprio U_∞, diverso dalle direzioni di h e p, ed indicata con U'_∞ la direzione perpendicolare, la corrispondenza che associa alla retta $U_\infty + P$ la retta $U'_\infty + P'$ è la proiettività indotta dalla conica $\mathscr{C}$, perchè ciascuna delle due rette contiene il polo dell'altra; quindi tale proiettività taglia una proiettività sulla retta h. È chiaro poi che i punti uniti in tale involuzione sono centri di fasci di rette ove la proiettività indotta dalla conica $\mathscr{C}$ coincide con l'involuzione degli angoli retti, ovvero i fuochi di $\mathscr{C}$.

L'involuzione $P \mapsto P'$ descritta sopra è detta l'*involuzione focale*. Da quanto visto discende la seguente osservazione *Se r è una retta tangente nel punto R alla conica $\mathscr{C}$ ed r' è la perpendicolare ad r passante per il punto di tangenza R, allora le rette che congiungono R con i fuochi F_1 ed F_2 di $\mathscr{C}$ separano armonicamente r ed r'*. Ciò significa che r' è la bisettrice tra le retta $R + F_1$ ed $R + F_2$. Ovvero che le rette $R + F_1$ ed $R + F_2$ formano angoli uguali con la tangente in R. Si osservi che, se $\mathscr{C}$ è una parabola uno dei fuochi va sostituito con il punto improprio dell'asse.

Esercizio 5.18. Si deduca dalle considerazioni precedenti che un'ellise ed un'iperbole, aventi gli stessi fuochi, hanno tangenti ortogonali nei punti di intersezione. □

6. Fasci di coniche

In questa sezione ci occuperemo di particolari famiglie di curve, quali sono i fasci di coniche. Molti dei contenuti di questa sezione si potrebbero generalizzare a curve di grado diverso o a quadriche di dimensione maggiore. Ci limiteremo al solo caso delle coniche lasciando al lettore curioso l'indagine su ulteriori sviluppi.

In questo capitolo abbiamo definito le coniche (nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(C)$) come forme quadratiche nelle coordinate omogenee del piano, a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. È chiaro che una tale forma,

$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

è determinata dai sei coefficienti, a meno della moltiplicazione per un fattore non nullo e dunque alla conica corrisponde un punto $\begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{02} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^5(C)$ e questa corrispondenza è biunivoca.

Esercizio 6.1. Si verifichi che l'insieme delle coniche non-degeneri di $\mathbb{P}^2(C)$ corrisponde ad un *aperto* dello spazio $\mathbb{P}^5(C)$, ovvero al complementare dell'insieme degli zeri di un insieme di polinomi omogenei nelle coordinate e si determinino le equazioni del *chiuso* complementare. □

Esercizio 6.2. Sia fissata la retta $r : x_0 = 0$ in $\mathbb{P}^2(C)$. Si verifichi che l'insieme delle coniche tangenti ad retta r (cioè le parabole del piano affine $\mathbb{P}^2(C) \setminus r$) è un *chiuso* dello spazio $\mathbb{P}^5(C)$, ovvero è l'insieme degli zeri di un insieme di polinomi omogenei nelle coordinate. Si determinino le equazioni di tale chiuso. □

⋆Esercizio 6.3. Fare l'esercizio analogo al precedente con una generica retta $r : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ di $\mathbb{P}^2(C)$. □

Poichè le coniche corrispondono a punti di uno spazio proiettivo, può essere interessante studiare le famiglie di coniche corrispondenti a sottovarietà lineari di tale spazio. In particolare ci occuperemo di famiglie corrispondenti a rette di $\mathbb{P}^5(C)$, e queste sono i fasci di coniche.

6.1 Definizione. Si chiama *fascio di coniche* in $\mathbb{P}^2(C)$, ogni famiglia di coniche corrispondente ad una retta di $\mathbb{P}^5(C)$.

In base alla corrispondenza definita sopra tra coniche e punti di $\mathbb{P}^5(C)$, possiamo osservare che, date due coniche distinte, di matrici A e B, ogni conica del fascio contenente le due coniche date ha una matrice del tipo $\lambda A + \mu B$, al variare dei parametri omogenei (λ, μ). In particolare, le entrate della matrice sono espressioni lineari omogenee nei parametri λ e μ e quindi il determinante della matrice $\lambda A + \mu B$, se non

è identicamente nullo, è un polinomio omogeneo di terzo grado nei parametri e quindi *in un fascio che contenga almeno una conica non degenere, vi sono al più tre coniche degeneri.*

Esercizio 6.4. Fissato un punto P del piano, si mostri che tutte le coniche di $\mathbb{P}^2(C)$ che passano per P formano un iperpiano di $\mathbb{P}^5(C)$. Fissati un punto P ed una retta r del piano, si mostri che tutte le coniche di $\mathbb{P}^2(C)$ per cui r sia la polare di P formano una sottovarietà lineare di dimensione 3 di $\mathbb{P}^5(C)$. □

Esercizio 6.5. Si mostri che per 5 punti, a tre a tre non allineati, passa un'unica conica di $\mathbb{P}^2(C)$. □

Esercizio 6.6. Siano date due coniche degeneri distinte $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$. Si mostri che se vi è un punto comune ai vertici delle due coniche, allora tutte le coniche del fascio sono degeneri ed il punto appartiene al vertice di ogni conica del fascio. □

Esercizio 6.7. Siano date le coniche

$$\mathscr{C} : 4x_0^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2 + 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 0 \quad \text{e} \quad \mathscr{C}' : -4x_0^2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2 = 0.$$

Si determinino le coniche degeneri del fascio per $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ e si tracci un disegno indicativo delle coniche degeneri e delle coniche date. □

Esercizio 6.8. Siano date due coniche non-degeneri distinte $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$.

(a) Si mostri che se un punto P appartiene al supporto di entrambo le coniche date, allora P appartiene al supporto di tutte le coniche del fascio.

(b) Sia r la polare di un punto P rispetto a $\mathscr{C}$ ed r' la polare dello stesso punto rispetto a $\mathscr{C}'$ e supponiamo $r \neq r'$. Si mostri che le polari del punto P rispetto a tutte le coniche del fascio formano il fascio di rette di $\mathbb{P}^2(C)$ generato da r ed r'.

(c) Cosa succede se, nel punto precedente, $r = r'$? □

Esercizio 6.9. Tutte le rette tangenti ad una conica data, formano una conica del piano duale. Come descrivere i fasci di coniche del piano duale? □

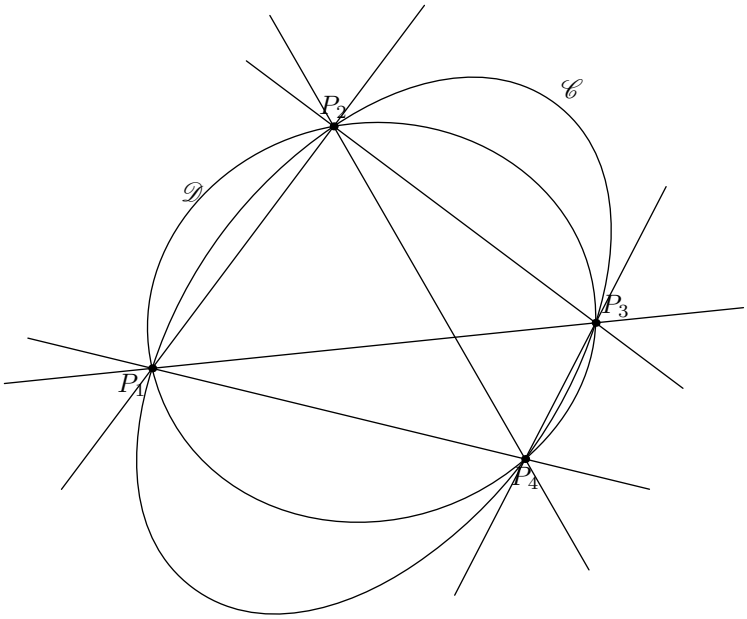
Abbiamo visto come, date due coniche $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$, i punti di intersezione tra le due appartengano a tutte le coniche del fascio (cf. `Esercizio VII.6.8`); possiamo usare questa osservazione per determinare le intersezioni tra le due coniche.

6.2 Osservazione. *Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ due coniche non degeneri del piano proiettivo reale. L'intersezione tra le due coniche è formata da quattro punti del piano proiettivo complesso, contati con le opportune molteplicità ed ogni conica del fascio determinato da $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ interseca le coniche date solo in quei punti.*

dim. L'intersezione tra $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ sono le soluzioni del sistema di quarto grado, formato dalle equazioni delle due coniche. Se una delle due coniche fosse degenere, ovvero la sua equazione fosse il prodotto di due equazioni lineari, il problema si ridurrebbe alla determinazione dell'intersezioni tra una conica e due rette (contate con le opportune molteplicità) che è perciò costituita da quattro punti (contati con le opportune molteplicità).

Per quanto visto (cf. `Esercizio VII.6.8`), i punti comuni alle due coniche appartengono anche ad ogni altra conica del fascio e quindi verifichiamo che nel fascio determinato da $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ vi sono coniche degeneri. Infatti, dette A e B le matrici delle coniche date, ogni conica del fascio ha una matrice del tipo $\lambda A + \mu B$, al variare dei parametri omogenei (λ, μ).

Questi parametri sono coordinate omogenee sulla retta di $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ corrispondente al fascio e le coniche degeneri del fascio sono determinate dalla condizione $\det(\lambda A + \mu B) = 0$ che è quindi un'equazione omogenea di terzo grado in λ e μ, che non può essere identicamente uguale a zero perché nel fascio vi sono coniche non degeneri. Un polinomio reale di terzo grado ha almeno una radice reale e quindi il fascio contiene una conica degenere reale e l'intersezione tra questa conica ed una delle coniche date è quindi costituita da quattro punti del piano complesso (contati con le opportune molteplicità). Questi quattro punti sono in comune con ogni conica del fascio e non possono esservi ulteriori intersezioni, perchè il passaggio per 5 punti (a tre a tre non allineati) determina una ed una sola conica (cf. `Esercizio VII.6.5`).

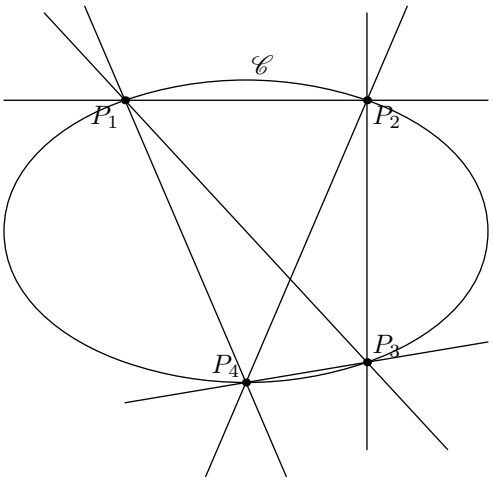


Si veda qui a fianco un disegno che illustra l'idea geometrica soggiacente alla dimostrazione. **CVD** □

Possiamo quindi affermare che ogni fascio di coniche, contenente almeno una conica non degenere, determina quattro punti del piano, contati con le opportune molteplicità, che sono i punti comuni a tutte le coniche del fascio. Questi quattro punti sono detti i *punti base* del fascio e, quando sono a due a due distinti, è possibile ricostruire il fascio a partire dalla conoscenza di tali punti.

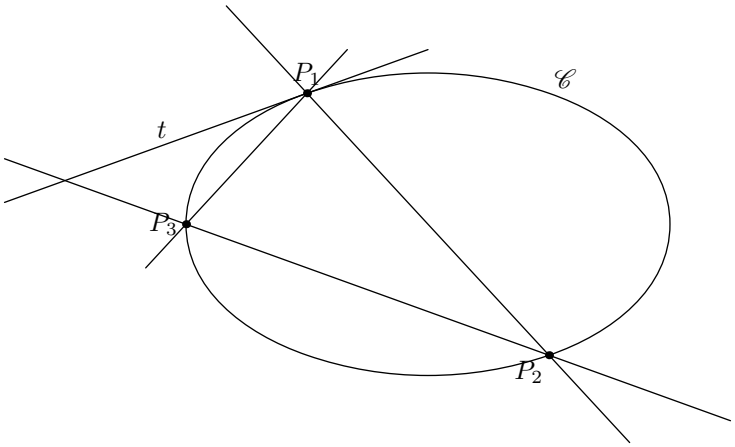
Nel seguito diamo una rapida descrizione grafica dei vari fasci di coniche, a partire dalla configurazione dei punti base che, per semplicità, rappresenteremo sempre come punti a coordinate reali, lasciando al lettore il compito di adattare gli argomenti qui esposti ai casi in cui compaiano coppie di punti a coordinate complesse coniugate.

6.3 Quattro punti distinti. Siano P_1, P_2, P_3, P_4 i quattro punti. Allora il fascio ha esattamente tre coniche degeneri, costituita dalle due coppie di lati opposti e dalle due diagonali del quadrangolo che ha i quattro punti come vertici. Possiamo quindi determinare facilmente le equazioni di due distinte coniche degeneri a partire dai punti base e determinare così tutte le coniche del fascio.



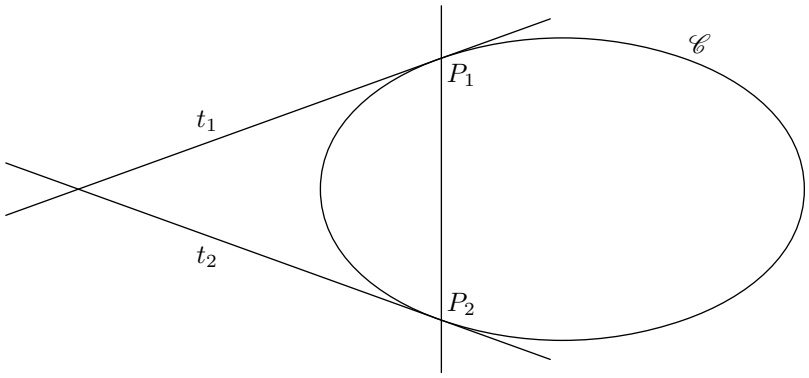
Possiamo considerare questa come la situazione "generica" e pensare ai casi successivi come a "specializzazioni" di questa situazione in cui alcuni tra i punti vengano a coincidere.

6.4 Tre punti distinti. Uno tra i punti deve avere molteplicità 2 e supponiamo quindi che i punti base del fascio siano $2P_1, P_2, P_3$. La conica spezzata nel prodotto delle due rette $P_1 + P_2$ e $P_1 + P_3$ appartiene al fascio e, se $\mathscr{C}$ è una qualunque conica non degenere dello stesso fascio, allora la tangente t a $\mathscr{C}$ in P_1, (ovvero la polare del punto P_1) è tangente in quel punto a tutte le coniche del fascio e quindi una seconda conica degenere si spezza nel prodotto della retta t con la retta $P_2 + P_3$ e non vi sono altre coniche degeneri nel fascio.



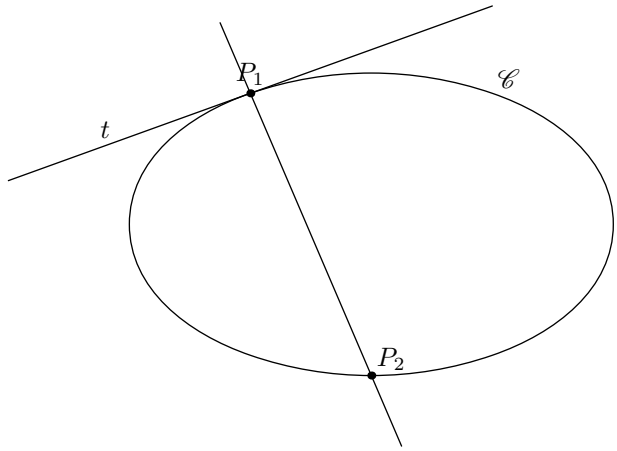
Un fascio di questo tipo sarà detto un *fascio di coniche tangenti* alla retta t in P_1. Per quanto visto per determinare il fascio non è sufficiente conoscere i punti base, ma è necessario conoscere anche la retta t o, almeno una conica non degenere del fascio.

6.5 Due punti doppi. Supponiamo quindi che i punti base del fascio siano $2P_1, 2P_2$. La conica degenere data dalla retta $P_1 + P_2$ con molteplicità 2 appartiene certamente al fascio e, se $\mathscr{C}$ è una qualunque conica non degenere dello stesso fascio, allora le tangenti t_1 e t_2 a $\mathscr{C}$ in P_1 e P_2, sono tangenti nei rispettivi punti a tutte le coniche del fascio e quindi una seconda conica degenere si spezza nel prodotto delle due tangenti e non vi sono altre coniche degeneri nel fascio.



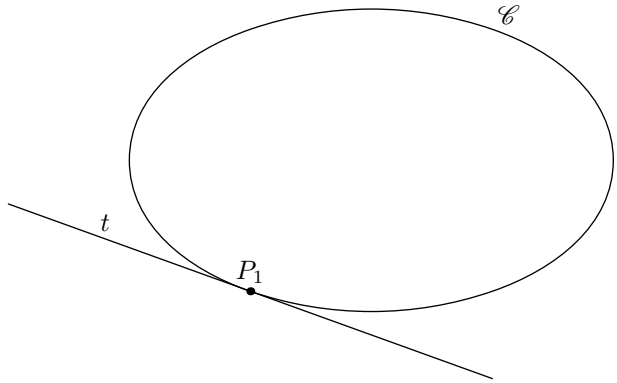
Un fascio di questo tipo sarà detto un *fascio di coniche bitangenti* alle rette t_1 e t_2 nei punti P_1 e P_2. Per determinare il fascio non è sufficiente conoscere i punti base, ma è necessario conoscere anche le due rette tangenti, ovvero il loro punto di intersezione, o una conica non degenere del fascio.

6.6 Un punto triplo ed uno semplice. Supponiamo quindi che i punti base del fascio siano $3P_1$ e P_2. Se $\mathscr{C}$ è una qualunque conica non degenere dello stesso fascio, allora la tangente t a $\mathscr{C}$ in P_1 è tangente anche ad ogni altra conica del fascio. Quindi una conica degenere si spezza nel prodotto di questa retta tangente con la retta $P_1 + P_2$.



Un fascio di questo tipo sarà detto un *fascio di coniche osculatrici* alla conica $\mathscr{C}$ nel punto P_1. Per determinare il fascio non è sufficiente conoscere i punti base, ma è necessario conoscere anche una conica non degenere del fascio.

6.7 Un punto quadruplo. Supponiamo quindi che i punti base del fascio siano $4P_1$. Se $\mathscr{C}$ è una qualunque conica non degenere dello stesso fascio, e consideriamo la conica formata dalla tangente t a $\mathscr{C}$ in P_1, con molteplicità 2, allora l'intersezione tra le due coniche è costituita proprio dal punto P_1, con molteplicità 4 e perciò la retta t con molteplicità 2 è l'unica conica degenere del fascio.



Un fascio di questo tipo sarà detto un *fascio di coniche iperosculatrici* alla conica $\mathscr{C}$ nel punto P_1. Per determinare il fascio non è sufficiente conoscere il punto base, ma è necessario conoscere anche una conica non degenere del fascio.

6.8 Involuzione indotta da un fascio di coniche su una retta. Sia $\mathscr{F}$ un fascio di coniche ed r una retta che non contenga nessuno dei punti base del fascio. Allora, per ogni punto P di r, esiste un'unica conica, $\mathscr{C}_P$, del fascio $\mathscr{F}$ che passi per P. La conica $\mathscr{C}_P$ interseca la retta r in due punti $\{P, P'\}$ (eventualmente coincidenti) e consideriamo quindi l'applicazione $\rho_{\mathscr{F}} : r \to r$ che manda P su P'. Si tratta chiaramente di un'applicazione di periodo 2, e vogliamo mostrare che si tratta di un'involuzione, ovvero che la corrispondenza appena descritta è una proiettività della retta r.

Supponiamo quindi che la retta r abbia equazione $x_0 = 0$ ed indichiamo con A e B le matrici di due coniche, generatrici del fascio $\mathscr{F}$. Dato un punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, la conica del fascio che passa per P ha matrice $\lambda A + \mu B$, ove $\lambda = {}^tPBP$ e $\mu = -{}^tPAP$. Le sue intersezioni con la retta r sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ {}^tPBP\,{}^tXAX - {}^tPAP\,{}^tXBX = 0 \end{cases} \qquad \text{ove } X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Una delle due soluzioni è il punto P e quindi il polinomio ${}^tPBP{}^tXAX - {}^tPAP{}^tXBX$ è divisibile per $p_2x_1 - p_1x_2$ e, sviluppando i calcoli, si ricava che il punto P' è soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ (2a_{11}b_{12}p_1 - 2b_{11}a_{12}p_1 + a_{11}b_{22}p_2 - b_{11}a_{22}p_2)x_1 - (b_{11}a_{22}p_1 - a_{11}b_{22}p_1 + 2b_{12}a_{22}p_2 - 2a_{12}b_{22}p_2)x_2 = 0 \end{cases}.$$

Si conclude quindi che le coordinate del punto $P' = \begin{pmatrix} 0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ sono date da

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{22} - a_{11}b_{22} & 2b_{12}a_{22} - 2a_{12}b_{22} \\ 2a_{11}b_{12} - 2b_{11}a_{12} & a_{11}b_{22} - b_{11}a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

e quindi la corrispondenza $P \mapsto P'$ è un'involuzione sulla retta r, che viene chiamata l'*involuzione indotta dal fascio* $\mathscr{F}$.

6.9 Fasci di Coniche per quattro punti. Dati quattro punti reali, a due a due distinti, del piano affine reale, resta determinato un fascio di coniche. Vogliamo capire come la disposizione dei quattro punti nel piano possa determinare il tipo di coniche contenute nel fascio. Siano quindi P, Q, R ed S quattro punti, a due a due distinti, del piano affine. I primi tre possono essere presi come punti base per un sistema di coordinate baricentriche e si avrà quindi $S = aP+bQ+cR$, con $a+b+c = 1$. Vogliamo determinare le coniche del fascio avente P, Q, R, S come punti base e per fare questo, fissiamo un riferimento affine che abbia i tre punti P, Q, R come punti fondamentali, ovvero sia

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Due coniche degeneri sono

$$(P \vee R)(Q \vee S) : y\big((b-1)x - ay + a\big), \qquad (P \vee S)(Q \vee R) : x\big(bx + (1-a)y - b\big),$$

e la matrice della generica conica del fascio è

$$A_{(\lambda,\mu)} = \begin{pmatrix} 0 & -b\mu & a\lambda \\ -b\mu & 2b\mu & (b-1)\lambda + (1-a)\mu \\ a\lambda & (b-1)\lambda + (1-a)\mu & -2a\lambda \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det A_{(\lambda,\mu)} = 2abc\lambda\mu(\lambda-\mu)$ e quindi, se $abc \neq 0$, si hanno solo tre coniche degeneri (la terza è $(P\vee Q)(R\vee S) : (x+y-1)(bx-ay)$); mentre, in caso contrario, tre dei quattro punti sono allineati, perché una delle coordinate baricentriche si annulla, ed il fascio è tutto costituito da coniche degeneri che hanno in comune una retta. Facciamo quindi d'ora in poi l'ipotesi $abc \neq 0$.

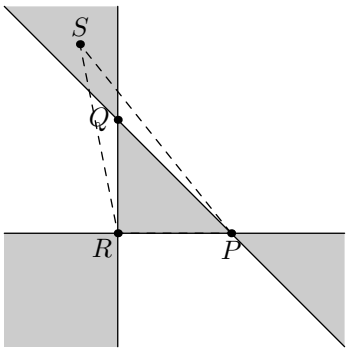
Per studiare le coniche del fascio dal punto di vista affine, ci interessa conoscere il segno di

$$\det A'_{(\lambda,\mu)} = -(b-1)^2\lambda^2 - (1-a)^2\mu^2 - 2(a+b+ab-1)\lambda\mu.$$

Si tratta quindi di una forma quadratica in (λ, μ) ed i coefficienti dei termini puri (λ^2 e μ^2) sono entrambi negativi se $a \neq 1 \neq b$; quindi, per il Teorema di Jacobi [cf. `Esercizio IV.2.11`] la forma quadratica è definita negativa se, e solo se,

$$\det \begin{pmatrix} -(b-1)^2 & -(a+b+ab-1) \\ -(a+b+ab-1) & -(1-a)^2 \end{pmatrix} = 4abc > 0.$$

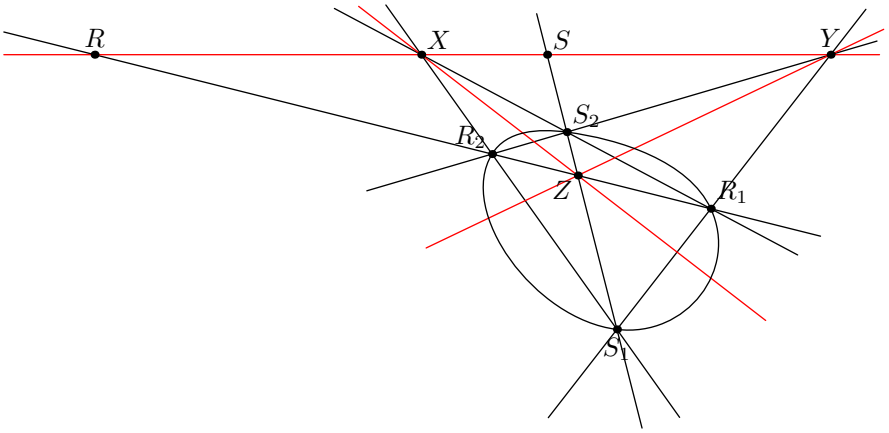
In tal caso $\det A'_{(\lambda,\mu)} < 0$, per ogni valore dei parametri omogenei (λ, μ), e quindi tutte le coniche (non-degeneri) del fascio sono iperboli. Se $abc < 0$, (che comprende i casi $a = 1$ e $b = 1$, perché?), la forma quadratica non è definita (definita positiva non può essere, perché?) e quindi nel fascio vi sono sia iperboli che ellissi (e parabole).



Vediamo ora cosa significa questa condizione per la reciproca posizione dei punti P, Q, R, S e facciamo un disegnino dei punti in questione. Ricordando che (a, b, c) (con $a + b + c = 1$) sono le coordinate baricentriche del punto S, rispetto a P, Q, R, la condizione $abc > 0$ dice che il punto S deve trovarsi nella regione ombreggiata e quindi uno dei quattro punti è contenuto nel triangolo che ha come vertici gli altri tre, ovvero il quadrilatero che ha come vertici i quattro punti, P, Q, R, S, non è convesso.

Possiamo quindi riassumere la discussione affermando che il fascio di coniche di punti base P, Q, R, S, contiene solo iperboli (eventualmente degeneri) se, e solo se, il quadrilatero $PQRS$ non è convesso, ovvero uno dei suoi vertici è contenuto nel triangolo determinato dagli altri tre. Altrimenti il fascio contiene sia iperboli che ellissi che parabole.

Vogliamo vedere ora un'altra particolarità dei fasci di coniche con quattro punti base distinti nel piano proiettivo. Precisamente, vogliamo mostrare che *i tre vertici delle coniche degeneri del fascio formano un triangolo autopolare rispetto a tutte le coniche non-degeneri del fascio.*[(*)] Diamo una dimostrazione di questo asserto facendo riferimento al disegno qui sotto, dove sono evidenziati in rosso i lati del triangolo autopolare.



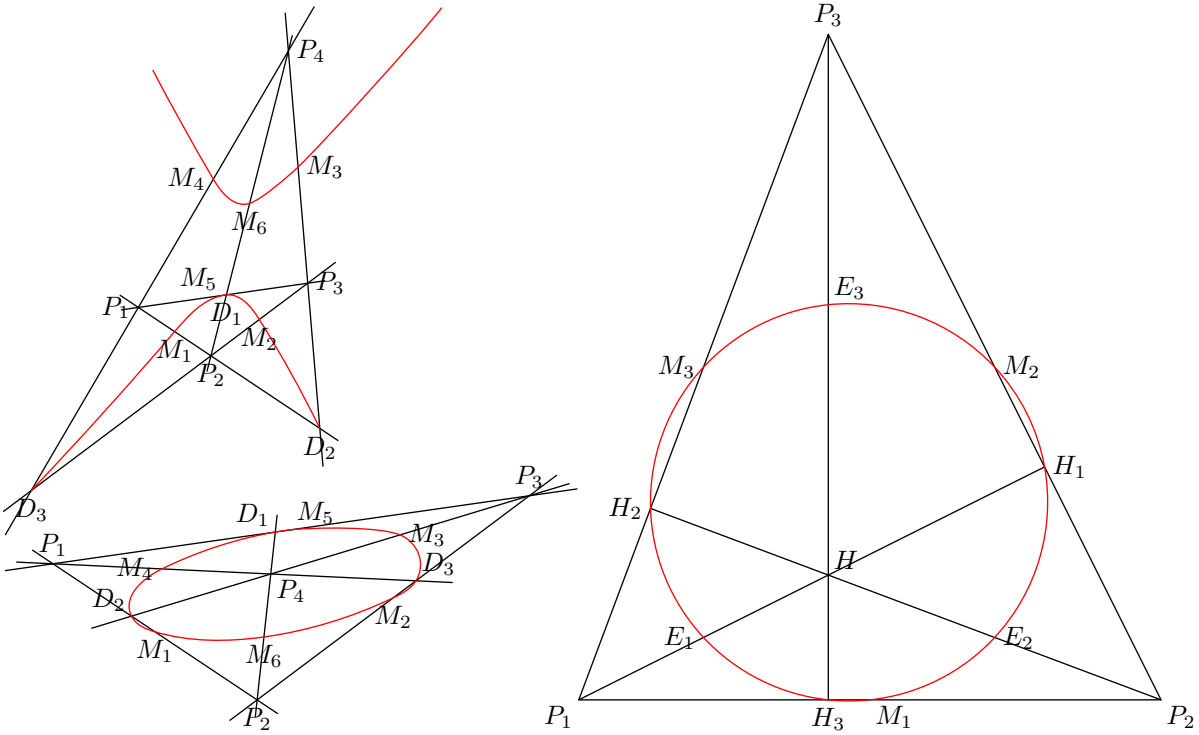
Siano, R_1, R_2, S_1, S_2 i punti base del fascio di coniche ed indichiamo con X, Y, Z i vertici delle tre coniche degeneri del fascio. I quattro punti base sono i vertici di un quadrangolo piano completo di cui X, Y e Z sono i punti diagonali, quindi, sempre facendo riferimento al disegno, si hanno una serie di quaterne armoniche; ad esempio $(R, S, X, Y) = -1$ (cf. `Esercizio VI.4.8`). Considerando la proiezione di centro Z, si può concludere che la retta $X \vee Z$ taglia il quarto armonico dopo R_1, S_1, Y e dopo R_2, S_2, Y, e quindi è la polare di Y rispetto ad ogni conica non-degenere del fascio (cf. `Esercizio VII.1.9`). Analogamente, la retta $Y \vee Z$ è la polare di X e quindi X, Y, Z sono i vertici di un triangolo autopolare rispetto ad ogni conica non-degenere del fascio (...c'è un risultato analogo per le coniche tangenti quattro rette date? Come si potrebbe enunciare?).

6.10 La conica dei nove punti. Nel piano affine, siano dati quattro punti, P_1, P_2, P_3, P_4, a tre a tre non allineati, e si consideri il fascio di coniche avente i quattro punti come punti base. I punti, P_1, P_2, P_3, P_4, sono i vertici di un quadrangolo piano completo i cui sei lati formano, a due a due, le coniche degeneri del fascio. Indichiamo con D_1, D_2, D_3 i tre punti diagonali del quadrangolo, ovvero i vertici delle tre coniche degeneri ed osserviamo che i tre punti diagonali sono i vertici di un triangolo autopolare per tutte le coniche del fascio (perché?).

Consideriamo ora il luogo geometrico dei centri delle coniche del fascio. Si tratta di una conica che passa certamente per i punti medi, $M_1, \ldots, M_6$ dei lati. Infatti, preso uno qualsiasi di questi punti, sia M, le sue polari rispetto alle coniche del fascio sono tutte le rette passanti per il quarto armonico dopo i due punti base, P_i e P_j, contenuti nel lato ed il punto M. Essendo M il punto medio dei due punti base, P_i e P_j, il suo quarto armonico è il punto improprio del lato $P_i \vee P_j$, e quindi tra le polari di M c'è la retta impropria cioè M è il centro di una conica del fascio. La conica dei centri passa anche per i punti diagonali perché, essendo i vertici delle coniche degeneri, hanno come "polare" il vuoto proiettivo e quindi sono soluzione del sistema lineare che determina il centro nel caso della conica degenere. Per questo motivo la conica in questione viene detta la *conica dei nove*

(*) Si può pensare a questo risultato come ad una variazione del Teorema Spettrale. Ovvero, date due forme quadratiche in $\mathbb{R}^3$ (senza richiedere che una delle due sia definita), se l'intersezione delle coniche associate è costituita da quattro punti distinti, allora esiste una base che porta una delle due in forma canonica e l'altra in forma diagonale. Non è però più vero, in generale, che gli elementi sulla diagonale siano autovalori per la matrice della forma quadratica.

punti. Si vedano i disegni qui sotto, a seconda che il punto P_4 sia esterno o interno al triangolo P_1, P_2, P_3.



Se si considera poi il caso particolare in cui i quattro punti base di un fascio nel piano euclideo sono i vertici, P_1, P_2, P_3, di un triangolo ed il punto, H, di intersezione tra le tre altezze dello stesso, la conica in questione passa per i piedi delle altezze e per i punti medi dei lati, nonché per i punti medi dei segmenti che congiungono i vertici del triangolo con il punto H. Questi nove punti sono detti, talvolta, i *punti di Eulero* del triangolo e la conica che li contiene è, in realtà, un cerchio. Infatti, le tre coniche degeneri del fascio sono tre coppie di rette ortogonali (il lato del triangolo e la relativa altezza) e quindi l'involuzione indotta dalla conica sulla retta impropria coincide con l'involuzione degli angoli retti. Poiché la conica dei nove punti passa per i punti uniti dell'involuzione indotta dal fascio (ovvero i punti impropri delle parabole del fascio), si conclude che la conica dei nove punti, in questo caso, passa per i punti ciclici ed è quindi un cerchio (cf. il disegno sopra). Tale cerchio è anche detto il *cerchio di Feuerbach*.

Esercizio 6.10. Dati quattro punti, P_1, P_2, P_3, P_4 del piano affine, a tre a tre non allineati, si mostri che esiste sempre un riferimento affine rispetto a cui i quattro punti hanno coordinate affini $P_1 = \binom{0}{0}$, $P_2 = \binom{1}{0}$, $P_3 = \binom{0}{1}$, $P_4 = \binom{a}{b}$, per opportuni valori di a e b, con $ab \neq 0$.

Si verifichi che le coniche del fascio di punti base P_1, P_2, P_3, P_4 hanno matrice generica

$$A_{(\lambda,\mu)} = \begin{pmatrix} 0 & \mu b & -\lambda a \\ \mu b & -2\mu b & \mu(a-1) - \lambda(b-1) \\ -\lambda a & \mu(a-1) - \lambda(b-1) & 2\lambda a \end{pmatrix}.$$

Si verifichi che il luogo dei centri delle coniche del fascio è la conica di equazione affine

$$2b(b-1)x^2 - 4abxy + 2a(a-1)y^2 + \big(2ab - b(b-1)\big)x + \big(2ab - a(a-1)\big)y - ab = 0.$$

Si verifichi che la conica passa per punti medi dei sei lati e per i punti diagonali del quadrangolo di vertici P_1, P_2, P_3, P_4. □

6.11 Costruzione con riga e compasso di un'involuzione su una retta. In questa sezione vogliamo dare alcune costruzioni grafiche legate alle involuzioni. Abbiamo già visto come, utilizzando le proprietà del quadrangolo

piano completo, si possa costruire l'immagine di un punto tramite un'involuzione di cui siano noti i due punti uniti reali. La costruzione si basa sul fatto che i punti uniti di un'involuzione separano armonicamente le coppie di punti corrispondenti. In questa sezione illustreremo alcune costruzioni con riga e compasso.

Cominciamo mostrando come, dati i due punti uniti si possa costruire l'immagine di ogni punto della retta r nell'involuzione che ha i punti dati come punti uniti. Se i punti uniti sono due punti reali, P_1 e P_2, (involuzione iperbolica) si traccia un cerchio che passi per i due punti e l'immagine di un punto P della retta r si determina intersecando la polare di P rispetto al cerchio con r, come si può vedere nella Figura 1, qui sotto, dove si è preso proprio il cerchio che ha centro sulla retta r.

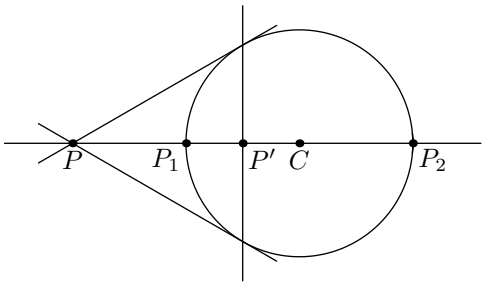


Figura 1

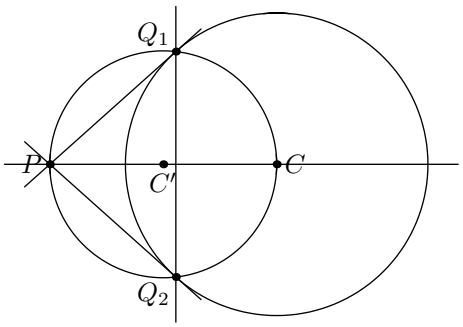


Figura 2

Per completezza nella costruzione, occorre ricordare come si costruisca la polare di un punto P rispetto ad un cerchio. La costruzione è descritta nella Figura 2. Se il punto P è esterno alla circonferenza, si traccia la retta passante per P ed il centro C del cerchio dato e si disegna il cerchio passante per P e C, con il centro, C', sulla retta data. I due punti (propri) di intersezione dei due cerchi, Q_1 e Q_2, appartengono alla polare di P, perché il segmento PQ_1 (risp. PQ_2) è perpendicolare al raggio CQ_1 (risp. CQ_2) e quindi fa parte della retta tangente al cerchio dato.

Se il punto P è interno alla circonferenza, si costruisce la perpendicolare alla retta $C \vee P$ (C è sempre il centro del cerchio dato) e si determinano così i punti Q_1 e Q_2. A questo punto, è sufficiente determinare il punto di intersezione, P', tra la retta $C \vee P$ e la perpendicolare al raggio CQ_1, passante per Q_1. La polare cercata è la perpendicolare alla retta $C \vee P$ passante per P'.

Passiamo ora al caso di due punti uniti complessi coniugati, I ed $\overline{I}$. Se i punti sono l'intersezione di un cerchio con la retta data, allora, ancora una volta, la determinazione dell'immagine del punto P consiste nel determinare l'intersezione tra la retta data e la polare del punto P (cf. la Figura 3 qui sotto).

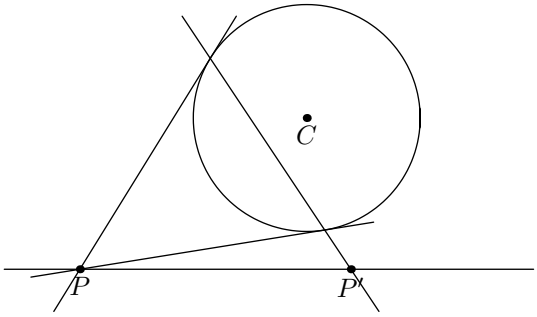


Figura 3

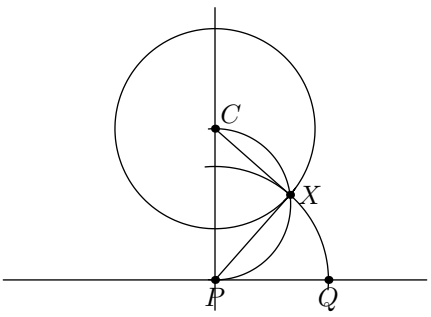
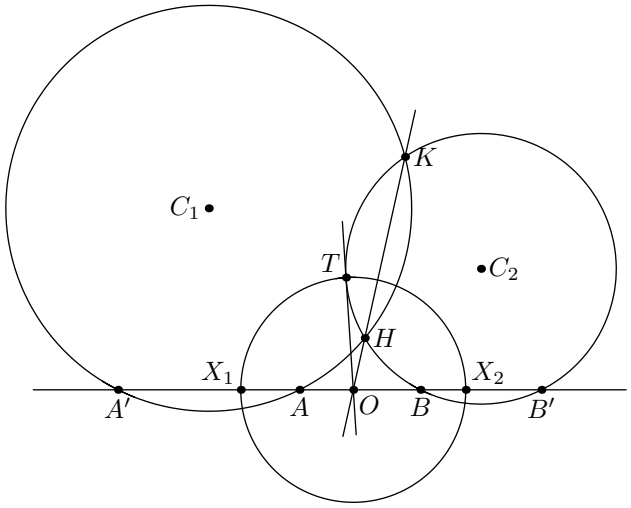


Figura 4

Vediamo ora come tracciare una circonferenza che intersechi la retta r in due punti dati I ed $\overline{I}$ (cf. Figura 4). Sia quindi O un punto su r, fissato come origine, e sia $I = O + (a + ib)v$, ove v è un versore parallelo ad r ed $a, b \in \mathbb{R}$. Sia $P = O + av$, il punto medio tra I ed $\overline{I}$, e tracciamo la perpendicolare alla retta r, passante per P. Fissato un punto C sulla perpendicolare, a distanza $d > b$ da P, si determina il punto X di intersezione tra la semicirconferenza per C e P e l'arco di cerchio, centrato in P, di raggio b ($Q = P + bv$ nel disegno). La circonferenza di centro C, di raggio $t = CX$, interseca la retta r in I ed $\overline{I}$, essendo $t^2 = d^2 - b^2$, perché il triangolo PXC è rettangolo in X.

Ora vogliamo dare una costruzione grafica del cerchio che determina l'involuzione a partire da due coppie involutorie di punti della retta r. Siano (A, A') e (B, B') due coppie distinte di punti della retta r e supponiamo che i due segmenti AA' e BB' non si intersechino e quindi che i punti uniti siano una coppia di punti reali (cf. il disegno qui sotto).



Tracciamo quindi due cerchi, di centro C_1 e C_2, passanti rispettivamente per le due coppie di punti ed intersecantesi tra loro. Ricordiamo che per ogni coppia di punti vi è un fascio di cerchi passanti per tale coppia e quindi è possibile trovarne due che si intersechino in due punti distinti H e K. Sia O il punto di intersezione tra la retta $H \vee K$ ed r. Osserviamo che il fascio di cerchi generato dai due cerchi dati induce un'involuzione sulla retta r (cf. *Involuzione indotta da un fascio di coniche su una retta VII.6.8*), che coincide con l'involuzione data su due coppie di punti e quindi su tutta la retta. Il punto O è intersezione della retta r con la conica degenere del fascio (il prodotto $H \vee K$ con la retta impropria) e quindi O è il punto corrispondente al punto improprio di r e perciò è punto medio tra i due punti uniti dell'involuzione.

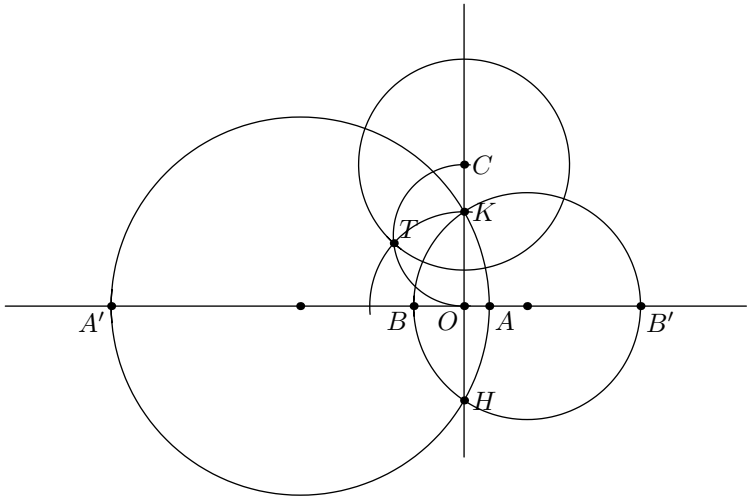
Consideriamo un riferimento unitario sulla retta r, che abbia il punto O come origine (e l'usuale punto improprio). In questo riferimento, l'involuzione ha matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e quindi, se x ed x' sono le coordinate di due punti corrispondenti, si ha $xx' = \alpha\beta$. La costante $\alpha\beta$ è uguale al prodotto $\|OB\| \cdot \|OB'\|$ e quindi la distanza dei punti uniti da O è uguale alla radice quadrata di questo numero. Se consideriamo il segmento OT, tangente alla circonferenza di centro C_2, allora per un noto teorema di geometria euclidea si ha $\|OB\| : \|OT\| = \|OT\| : \|OB'\|$, e quindi il segmento OT è il raggio della circonferenza centrata in O, passante per i punti uniti dell'involuzione, X_1, X_2.

Supponiamo ora che (A, A') e (B, B') siano due coppie distinte di punti della retta r e che i due segmenti AA' e BB' si intersechino; il che significa che i punti uniti dell'involuzione che scambia i punti di quelle coppie sono una coppia di punti complessi coniugati.

Tracciamo quindi due cerchi, con centri sulla retta r, passanti rispettivamente per le due coppie di puntie siano di nuovo H e K i punti (propri) di intersezione tra i due cerchi. Sia O il punto di intersezione tra la retta $H \vee K$ ed r ed osserviamo che, anche in questo caso, il fascio di cerchi generato dai due cerchi dati induce un'involuzione sulla retta r (cf. *Involuzione indotta da un fascio di coniche su una retta VII.6.8*), che coincide con l'involuzione data su tutta la retta. Di nuovo il punto O è intersezione della retta r con la conica degenere del fascio (il prodotto $H \vee K$ con la retta impropria) e quindi O è il punto corrispondente al punto improprio di r e perciò la sua coordinata coincide con parte reale delle coordinate dei due punti uniti dell'involuzione.

Come nel caso precedente, consideriamo un riferimento unitario sulla retta r, che abbia il punto O come origine (e l'usuale punto improprio). In questo riferimento, l'involuzione ha matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e quindi, se x ed x' sono le coordinate di due punti corrispondenti, si ha $xx' = \alpha\beta$. La costante $\alpha\beta$ è uguale al prodotto $\|OB\| \cdot \|OB'\|$ e quindi la parte immaginaria della coordinata dei punti uniti è uguale alla radice quadrata di questo numero,

ovvero alla lunghezza del segmento OK (cf. il disegno qui sotto).



Per quanto visto, se vogliamo trovare un cerchio che passi per i punti uniti, dobbiamo prendere il suo centro, C, sulla perpendicolare alla retta r, passante per O (ovvero sulla retta $O \vee K$); ed il raggio, CT, del cerchio deve soddisfare alla condizione $\|OK\|^2 + \|TC\|^2 = \|OC\|^2$. Ciò conclude la costruzione.

VIII
Cenni alle metriche non–euclidee

In questo capitolo vogliamo illustrare come, utilizzando i risultati dei capitoli precedenti, si possano costruire dei modelli di pian i non-euclidei. Nella costruzione faremo uso solo di concetti di algebra lineare e geometria proiettiva, senza far ricorso a concetti e tecniche della geometria differenziale.

1. Piano ellittico e piano iperbolico

1.1 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 dotato di un'applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{R}$ simmetrica e definita positiva e, per ogni vettore $v \in V$ sia $\|v\| = \sqrt{g(v,v)}$.

Fissato un numero reale $R > 0$, sia $K = 1/R^2$ e definiamo la metrica δ_K su $\mathbb{P}(V)$ ponendo $\cos\left(\dfrac{\delta_K(P,Q)}{R}\right) = \dfrac{|g(v,w)|}{\|v\|\,\|w\|}$, ove $P = \sigma\langle v\rangle$, $Q = \sigma\langle w\rangle$ e $0 \le \delta_K(P,Q) \le \frac{R\pi}{2}$.

I numeri reali R e K sono detti rispettivamente il *raggio di curvatura* e la *curvatura* della metrica δ_K.

La definizione è ben posta e non dipende dalla scelta dei vettori v e w, ma solo dai sottospazi da essi generati. La funzione appena definita ha le proprietà generali di una distanza, ovvero vale la seguente

1.2 Proposizione. *Siano V e g come nella Definizione VIII.1.1. La funzione $\delta_K : \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{R}$ gode delle seguenti proprietà.*
(a) $\delta_K(P,Q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P = Q$;
(b) $\delta_K(P,Q) = \delta_K(Q,P)$;
(c) $\delta_K(P,S) \le \delta_K(P,Q) + \delta_K(Q,S)$.

dim. (a). è conseguenza della disuguaglianza di Cauchy–Schwarz.
(b). è una conseguenza della simmetria dell'applicazione bilineare g.
(c). Possiamo supporre che i tre punti $P = \sigma\langle v\rangle$, $Q = \sigma\langle w\rangle$ ed $S = \sigma\langle z\rangle$ siano a due a due distinti e che $g(v,v) = g(w,w) = g(z,z) = 1$.

Supponiamo dapprima che i tre vettori siano complanari. Allora, fissato un vettore n ortogonale a v, parallelo al piano contenente i tre vettori e con $g(n,n) = 1$, si ha $w = \cos\alpha v + \sin\alpha n$ e $z = \cos\beta v + \sin\beta n$ e con una scelta opportuna dei tre vettori, possiamo supporre $\alpha, \beta \in [0.\pi]$. Allora $\delta_K(P,Q) = R\min\{\alpha, \pi - \alpha\}$ e, analogamente, $\delta_K(P,S) = R\min\{\beta, \pi - \beta\}$. Ora $g(w,z) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\beta - \alpha)$. Si tratta di verificare che in tutti i casi possibili si ha la disuguaglianza voluta e lasciamo questo compito al lettore diligente.

Siano ora v, w, z linearmente indipendenti e sia t la proiezione ortogonale di w sul piano $\langle v, z\rangle$, ovvero $w = t + u$, con $t \in \langle v, z\rangle$ e $u \in \langle v, z\rangle^{\perp}$. Se $t = 0$ la tesi è verificata. Altrimenti, si ha $g(v,w) = g(v,t)$ e $0 < g(t,t) = 1 - g(u,u) < 1$. Posto $Q' = \sigma\langle t\rangle$, si ha $\delta_K(P,S) \le \delta_K(P,Q') + \delta_K(Q',S)$ per quanto visto sopra (i tre vettori corrispondenti sono complanari). D'altra parte $g(v,w) < \frac{g(v,t)}{\sqrt{g(t,t)}}$ e quindi $\delta_K(P,Q) \ge \delta_K(P,Q')$, per la decrescenza della funzione coseno. Analogamente, si ha $\delta_K(S,Q) \ge \delta_K(S,Q')$ e si conclude anche in questo caso. **CVD** □

1.3 Definizione. Nelle notazioni della *Definizione VIII.1.1*, chiameremo *piano ellittico* di curvatura K il piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$ dotato della metrica δ_K.

Nel piano ellittico, oltre alla distanza tra due punti possiamo definire la misura dell'angolo tra due rette nel modo seguente.

1.4 Definizione. Nelle notazioni della *Definizione VIII.1.1*, date due rette $r = \sigma\langle v, w\rangle$ ed $s = \sigma\langle v, z\rangle$ del piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$, si considerino i vettori y_r ed y_s in V, tali che $\langle y_r\rangle = \langle v, w\rangle^\perp$ e $\langle y_s\rangle = \langle v, z\rangle^\perp$. L'angolo tra le due rette è il numero reale $\alpha(r, s)$ tale che $\cos(\alpha(r, s)) = \dfrac{|g(y_r, y_s)|}{\|y_r\|\,\|y_s\|}$ e $0 \le \alpha(r, s) \le \frac{\pi}{2}$.

Si osservi che, a differenza della distanza, la misura dell'angolo è indipendente dalla curvatura del piano ellittico.

Ora vogliamo definire le metriche iperboliche sui punti del piano proiettivo e vedremo che per poter avere una definizione soddisfacente dovremo accontentarci di definire la metrica solo su un sottoinsieme dell'insieme dei punti del piano proiettivo reale. Andiamo quindi a discutere alcuni fatti preliminari alla definizione.

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 dotato di un'applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{R}$ simmetrica, non degenere e non-definita di segnatura $(2, 1)$, ovvero sia $i(g) = 1$; ciò significa che esiste una base di V rispetto a cui g ha matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di V

$$\mathscr{T} = \{\, v \in V \mid g(v, v) < 0 \,\} \quad \text{e} \quad \mathscr{C} = \{\, v \in V \mid g(v, v) = 0 \,\} \tag{1.5}$$

ed osserviamo che se $v \in \mathscr{T}$ (risp. $v \in \mathscr{C}$) allora $\langle v\rangle \smallsetminus \{0\} \subseteq \mathscr{T}$ (risp. $\langle v\rangle \subseteq \mathscr{C}$). Poniamo inoltre $\|v\| := \sqrt{-g(v, v)}$ per ogni $v \in \mathscr{T}$ e diciamo che due vettori v e w di $\mathscr{T}$ sono *concordi* se $g(v, w) < 0$.

1.6 Lemma. *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 dotato di un'applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{R}$ simmetrica, non degenere e non-definita di segnatura $(2, 1)$ e sia $\mathscr{T}$ il sottoinsieme di V definito in (VIII.1.5).*

(a) la relazione di concordanza è una relazione di equivalenza che suddivide l'insieme $\mathscr{T}$ in due classi.

(b) Presi comunque due vettori v e w in $\mathscr{T}$ si ha

$$\frac{|g(v, w)|}{\|v\|\,\|\|w\|} \ge 1 \qquad [\textit{disuguaglianza di Schwarz inversa}]$$

e vale l'uguaglianza se, e solo se, v e w sono linearmente dipendenti.

dim. (a). La relazione di concordanza, $v \sim w \Leftrightarrow g(v, w) < 0$, per i vettori di $\mathscr{T}$ è chiaramente riflessiva e simmetrica. Per quanto riguarda la transitività, siano v, w, z in $\mathscr{T}$ con $g(v, w) < 0$ e $g(w, z) < 0$. Utilizzando la decomposizione ortogonale, possiamo quindi scrivere $v = \alpha w + v'$ e $z = \beta w + z'$, con $v', z' \in \langle w\rangle^\perp$ e $\alpha = \frac{g(v,w)}{g(w,w)} > 0$, $\beta = \frac{g(w,z)}{g(w,w)} > 0$. Da $g(v, v) < 0$, si deduce che $\alpha^2|g(w, w)| > g(v', v')$ ed analogamente $\beta^2|g(w, w)| > g(z', z')$. Possiamo quindi scrivere $g(v, z) = \alpha\beta g(w, w) + g(v', z')$ ed osservare che questo numero è minore di zero perché $\alpha^2\beta^2 g(w, w)^2 > g(v', v')g(z', z') \ge g(v', z')^2$, e quest'ultima disuguaglianza vale perché $v', z' \in \langle w\rangle^\perp$ e la restrizione di g a questo sottospazio è definita positiva (cf. Teorema di Sylvester) e quindi per i vettori v' e z' vale la consueta disuguaglianza di Cauchy–Schwarz.

Infine, per vedere che vi sono solo due classi possiamo osservare che, preso un vettore v_0 in $\mathscr{T}$, anche $-v_0 \in \mathscr{T}$ e i due vettori non sono concordi. Se w non è concorde con v_0, ovvero $g(v_0, w) > 0$, allora w è concorde con $-v_0$ e quindi i vettori di $\mathscr{T}$ si dividono tra la classe di v_0 e quella di $-v_0$.

(b). Siano v e w in $\mathscr{T}$ ed osserviamo che, se sono linearmente dipendenti la tesi è verificata. Sia quindi $\dim\langle v, w\rangle = 2$ ed osserviamo che la restrizione di g a tale sottospazio non può essere definita, per cui il sottospazio contiene vettori isotropi, ovvero esistono dei numeri reali λ per cui

$$0 = g(v + \lambda w, v + \lambda w) = g(v, v) + 2\lambda g(v, w) + \lambda^2 g(w, w)$$

e quindi considerando il discriminante del trinomio, si ha $g(v, w)^2 - g(v, v)g(w, w) \ge 0$, da cui si deduce la disuguaglianza dell'enunciato.

Infine, supponiamo che si abbia $|g(v,w)| = \|v\|\,\|\|w\|$ e, a meno di sostituire v con $-v$, possiamo supporre $g(v,w) = \|v\|\,\|\|w\|$. Posto $z = v + \frac{\|v\|}{\|w\|}w$, si ha

$$g(z,w) = g(v,w) + \frac{\|v\|}{\|w\|}g(w,w) = \|v\|\,\|w\| - \frac{\|v\|}{\|w\|}\|w\|^2 = 0$$
$$g(z,v) = g(v,v) + \frac{\|v\|}{\|w\|}g(w,v) = -\|v\|^2 + \frac{\|v\|}{\|w\|}\|v\|\,\|w\| = 0$$
$$g(z,z) = g(v,v) + 2\frac{\|v\|}{\|w\|}g(v,w) + \frac{\|v\|^2}{\|w\|^2}g(w,w) = -2\|v\|^2 + 2\frac{\|v\|}{\|w\|}\|v\|\,\|w\| = 0.$$

Dunque, z è un vettore isotropo, appartenente a $\langle v,w\rangle^\perp = \langle v\rangle^\perp \cap \langle w\rangle^\perp$. Deve essere $z = 0$ perché la restrizione di g ai sottospazi $\langle v\rangle^\perp$ e $\langle w\rangle^\perp$ è definita positiva [cf. Teorema di Sylvester] e quindi 0 è l'unico vettore isotropo appartenente a tali sottospazi. Abbiamo quindi verificato che v e w sono linearmente dipendenti. **CVD** □

Possiamo quindi passare dallo spazio vettoriale V a $\mathbb{P}(V)$ e considerare i sottoinsiemi

$$H = \{\, P \in \mathbb{P}(V) \mid P = \sigma\langle v\rangle,\ v \in \mathscr{I}\,\} \quad \text{e} \quad \Gamma = \{\, P \in \mathbb{P}(V) \mid P = \sigma\langle v\rangle,\ v \in \mathscr{C} \smallsetminus \{0\}\,\} \tag{1.7}$$

ed arrivare alla definizione delle metriche iperboliche.

1.8 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 dotato di un'applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{R}$ simmetrica, non degenere e non-definita di segnatura $(2,1)$ e sia H il sottoinsieme definito in (VIII.1.7).

Fissato un numero reale $R > 0$, sia $K = -1/R^2$ e definiamo la metrica $\delta_K : H \times H \to \mathbb{R}$, ponendo $\cosh\left(\dfrac{\delta_K(P,Q)}{R}\right) = \dfrac{|g(v,w)|}{\|v\|\,\|w\|}$, ove $P = \sigma\langle v\rangle$, $Q = \sigma\langle w\rangle$ e $0 \le \delta_K(P,Q)$.

I numeri reali R e K sono detti rispettivamente il *raggio di curvatura* e la *curvatura* della metrica δ_K.

In base alla disuguaglianza di Schwarz inversa ed al fatto che la funzione cosh è crescente sulla semiretta positiva di $\mathbb{R}$, la definizione è ben posta e, anche in questo caso, $\delta_K(P,Q)$ non dipende dalla scelta dei vettori v e w, ma solo dai sottospazi da questi generati. Andiamo a dimostrare un risultato analogo alla *Proposizione VIII.1.2*.

1.9 Proposizione. *Siano V e g come nella Definizione VIII.1.8. La funzione $\delta_K : H \times H \to \mathbb{R}$ gode delle seguenti proprietà.*
(a) $\delta_K(P,Q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P = Q$;
(b) $\delta_K(P,Q) = \delta_K(Q,P)$;
(c) $\delta_K(P,S) \le \delta_K(P,Q) + \delta_K(Q,S)$.

dim. (a). discende dall'ultima parte del *Lemma VIII.1.6*.
(*b*). discende dalla simmetria di g.
(*c*). Possiamo supporre che i tre punti $P = \sigma\langle v\rangle$, $Q = \sigma\langle w\rangle$ ed $S = \sigma\langle z\rangle$ siano a due a due distinti, che i vettori v, w ,z siano concordi e che $g(v,v) = g(w,w) = g(z,z) = -1$.

Supponiamo dapprima che i tre vettori, v, w, z, siano complanari. Allora, fissato un vettore n ortogonale a v, parallelo al piano contenente i tre vettori e con $g(n,n) = 1$, si ha $w = \cosh a\,v + \sinh a\,n$ e $z = \cosh b\,v + \sinh b\,n$ per opportuni numeri reali positivi a e b. Allora $\delta_K(P,Q) = Ra$ e, analogamente, $\delta_K(P,S) = Rb$. Ora $|g(w,z)| = \cosh a\cosh b - \sinh a\sinh b = \cosh(b-a)$ e quindi $R|b-a| = \delta_K(Q,S)$. Si conclude che $\delta_K(P,S) = Rb = Ra + R(b-a) \le Ra + R|b-a| = \delta_K(P,Q) + \delta_K(Q,S)$.

Siano ora v, w, z linearmente indipendenti (e concordi) e sia t la proiezione ortogonale di w sul piano $\langle v,z\rangle$, ovvero $w = t + u$, con $t \in \langle v,z\rangle$ e $u \in \langle v,z\rangle^\perp$. Si ha $g(v,w) = g(v,t)$ e $g(t,t) = -1 - g(u,u) < -1$. Posto $Q' = \sigma\langle t\rangle$, si ha $\delta_K(P,S) \le \delta_K(P,Q') + \delta_K(Q',S)$ per quanto visto sopra (i tre vettori

corrispondenti sono complanari). D'altra parte $\cosh(\frac{\delta_K(P,Q)}{R}) = |g(v,w)| > \frac{|g(v,t)|}{\sqrt{-g(t,t)}} = \cosh(\frac{\delta_K(P,Q')}{R})$ e quindi $\delta_K(P,Q) > \delta_K(P,Q')$, perché cosh è una funzione crescente ed $R > 0$. Analogamente, si ha $\delta_K(S,Q) > \delta_K(S,Q')$ e si conclude anche in questo caso. **CVD** □

1.10 Definizione. Nelle notazioni della *Definizione VIII.1.8*, chiameremo *piano iperbolico* di curvatura $K < 0$ il sottoinsieme D del piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$ dotato della metrica δ_K. Il sottoinsieme Γ di $\mathbb{P}(V)$ (cf. VIII.1.7), è detto l'*assoluto* del piano iperbolico. I punti di H saranno anche detti i punti *interni all'assoluto*. I punti di $\mathbb{P}(V)$ che non siano né in H né in Γ saranno anche detti i punti *esterni all'assoluto*.

L'assoluto del piano iperbolico è quindi il supporto (reale) della conica a punti reali di $\mathbb{P}(V)$ associata all'applicazione bilineare g ed un punto $P = \sigma\langle V\rangle$, che non sia in Γ, è interno o esterno all'assoluto a seconda del segno di $g(v,v)$. Anche nel caso della metrica ellittica avremmo potuto parlare di assoluto, indicando con questo termine la conica senza punti reali determinata dall'applicazione bilineare definita positiva che da origine alla metrica ellittica. Nel seguito useremo in questo senso il termine di *assoluto* nel piano ellittico.

Nel caso del piano iperbolico, come abbiamo dovuto fare una restrzione sostanziale tra i punti di $\mathbb{P}(V)$ per poter definire la metrica iperbolica, così dovremo fare una restrizione tra le rette del piano $\mathbb{P}(V)$ per poter parlare di angoli e la scelta delle rette dipenderà, come per i punti, dalla loro "posizione" rispetto all'assoluto. Diamo una definizione precisa.

1.11 Definizione. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 dotato di un'applicazione bilineare $g : V \times V \to \mathbb{R}$ simmetrica, non degenere e non-definita di segnatura $(2,1)$ e consideriamo un piano iperbolico (di curvatura $K < 0$) associato a questi dati. Siano Γ ed H i sottoinsiemi definiti in (VIII.1.7). Una retta $r = \sigma\langle v,w\rangle$ di $\mathbb{P}(V)$ si dice
(*a*) *tangente all'assoluto* se la restrizione di g a $\langle v,w\rangle$ è degenere;
(*b*) *esterna all'assoluto* se la restrizione di g a $\langle v,w\rangle$ è definita positiva;
(*c*) *secante l'assoluto* se la restrizione di g a $\langle v,w\rangle$ è non-degenere e non definita.

Esercizio 1.1. Notazioni come nella *Definizione VIII.1.11*. Sia $r = \sigma\langle v,w\rangle$ una retta di $\mathbb{P}(V)$, e si verifichi che
(*a*) se r è tangente all'assoluto, Γ, allora $r \cap \Gamma = \{P\}$ e $r \cap H = \varnothing$;
(*b*) se r è esterna all'assoluto, Γ, allora $r \cap \Gamma = \varnothing$ e $r \cap H = \varnothing$;
(*c*) se r è secante l'assoluto, Γ, allora $r \cap \Gamma = \{P,Q\}$ e $r \cap H \neq \varnothing$. □

Solo le rette secanti l'assoluto contengono punti del piano iperbolico e ciò giustifica la seguente definizione,

1.12 Definizione. Le rette di $\mathbb{P}(V)$ secanti l'assoluto sono dette le *rette del piano iperbolico*. Data una tale retta, i due punti in $r \cap \Gamma$ sono detti i *punti impropri* di r, mentre i punti di $r \cap H$ sono detti i *punti propri* della retta. Due rette del piano iperbolico si diranno *incidenti* se si intersecano in un punto proprio.

Mostriamo ora come si possano misurare gli angoli tra rette incidenti del piano iperbolico. Anche in questo caso la misura dell'angolo sarà indipendente dalla curvatura del piano.

1.13 Definizione. Siano $r = \sigma\langle v,w\rangle$ ed $s = \sigma\langle v,z\rangle$ due rette del piano iperbolico, incidenti in $P = \sigma\langle v\rangle \in H$. L'*angolo* tra le due rette è il numero reale $\alpha(r,s)$ tale che $\cos\alpha(r,s) = \frac{|g(y_r,y_s|)}{\|y_r\|\,\|y_s\|}$, e $0 \leq \alpha(r,s) \leq \frac{\pi}{2}$, ove $\langle y_r\rangle = \langle v,w\rangle^\perp$ e $\langle y_s\rangle = \langle v,z\rangle^\perp$.

La definizione ha senso, perché i sottospazi ortogonali, $\langle y_r\rangle = \langle v,w\rangle^\perp$ e $\langle y_s\rangle = \langle v,z\rangle^\perp$, sono entrambi contenuti in $\langle v\rangle^\perp$ che, per il Teorema di Sylvester, è un sottospazio su cui g induce un'applicazione bilineare definita positiva e vale perciò la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz.

Il fatto che due rette formino un angolo retto è in relazione con la polarità associata alla conica.

Esercizio 1.2. Fissata una retta, r, del piano iperbolico, le rette che formano un angolo di $\pi/2$ con r sono tutte e sole le rette di H che, come rette di $\mathbb{P}(V)$, contengono il polo di r rispetto all'assoluto, Γ. □

Esercizio 1.3. Dimostrare nel piano ellittico un risultato analogo all'esercizio precedente. □

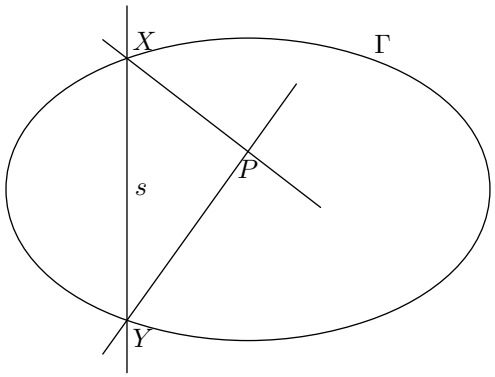
Esercizio 1.4. Siano r ed s due rette del piano iperbolico che formano un angolo di $\frac{\pi}{2}$. Si mostri che le rette sono incidenti. □

Esercizio 1.5. Siano r e t due rette distinte del piano iperbolico, entrambe ortogonali ad una stessa retta s. Si mostri che r e s non sono parallele (cf. *Definizione VIII.1.14*). □

Esercizio 1.6. Siano r e t due rette parallele e distinte nel piano iperbolico (cf. *Definizione VIII.1.14*) e sia s una retta ortogonale ad r. Si mostri che s e t non sono ortogonali. □

1.14 Definizione. Due rette del piano iperbolico si dicono *parallele* se la loro intersezione contiene un punto dell'assoluto.

In base alle definizioni date, possiamo affermare che esistono rette del piano iperbolico che non sono né incidenti né parallele (quelle che si incontrano in un punto esterno all'assoluto). Inoltre, due rette parallele ad una stessa retta, s, non sono necessariamente parallele tra loro (cf. ad es. la figura qui sotto); ovvero la relazione di parallelismo tra le rette del piano iperbolico *non* è una relazione di equivalenza.



Nel piano ellittico si potrebbe dare una analoga definizione di parallelismo, utilizzando come assoluto la conica senza punti reali, Γ, associata all'applicazione bilineare che definisce la metrica. In questo caso, ogni retta reale contiene due punti, a coordinate complesse coniugate, del supporto di Γ, e quindi due rette reali che abbiano in comune un punto dell'assoluto, necessariamente coincidono, perché hanno in comune anche il punto coniugato. Possiamo quindi affermare che nel piano ellittico non vi sono rette distinte parallele, neanche nell'accezione più generale mutuata dal piano iperbolico.

Vogliamo ora occuparci della distanza di un punto da una retta nei piani iperbolici ed ellittici. Come in ogni spazio metrico la distanza di un punto P da una retta r è l'estremo inferiore delle distanze $\delta_K(P, X)$, al variare di X tra i punti (propri) di r. Come nel caso dello spazio euclideo, il segmento di minima distanza è quello che congiunge P con la sua proiezione ortogonale su r.

Esercizio 1.7. Siano $P = \sigma\langle u\rangle$ ed $r = \sigma\langle v, w\rangle$ un punto ed una retta del piano iperbolico, H, di curvatura K. Sia $u' \in \langle v, w\rangle$ la proiezione ortogonale di u ($u = u' + y$ con $n \in \langle v, w\rangle^{\perp}$). Posto $P' = \sigma\langle u'\rangle$; si mostri che, per ogni punto proprio, X, di r, si ha $\delta_K(P, P') \leq \delta_K(P, X)$. □

Esercizio 1.8. Siano $P = \sigma\langle u\rangle$ ed $r = \sigma\langle v, w\rangle$ un punto ed una retta del piano ellittico di curvatura K. Sia $u' \in \langle v, w\rangle$ la proiezione ortogonale di u ($u = u' + y$ con $n \in \langle v, w\rangle^{\perp}$). Posto $P' = \sigma\langle u'\rangle$; si mostri che, per ogni punto proprio, X, di r si ha $\delta_K(P, P') \leq \delta_K(P, X)$. □

2. Un'altra definizione delle metriche non-euclidee

In questa sezione vogliamo confrontare la definizioni date di distanza ed angolo nel piano iperbolico e nel piano ellittico coincidono con le classiche definizioni date per mezzo del birapporto tra punti e rette del piano proiettivo (cf. *Definizione VI.4.1*).

Nel caso della metrica ellittica, dobbiamo confrontare δ_K con la seguente definizione.

2.1 Definizione. Si consideri lo spazio vettoriale V di dimensione 3 su $\mathbb{R}$ e sia fissata una conica non–degenere, priva di punti reali, Γ, del piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$. Fissato un numero reale positivo, R, dati due punti distinti P e Q di $\mathbb{P}(V)$, si pone

$$\rho_K(P,Q) := \frac{R}{2i}\log(R_1,R_2,P,Q),$$

ove $K = 1/R^2$, i è l'unità immaginaria ed R_1 ed R_2 sono le due intersezioni (non reali) della retta $P \vee Q$ con l'assoluto, Γ, prese nell'ordine per cui $\Im(R_1,R_2,P,Q) \geq 0$. Osserviamo che, se $P = Q$, presa comunque una retta per P, il birapporto (R_1,R_2,P,P) è uguale ad 1 ed il suo logaritmo è nullo e si pone quindi $\rho_K(P,P) = 0$.

Nel caso della metrica ellittica, dobbiamo confrontare δ_K con la seguente definizione.

2.2 Definizione. Si consideri lo spazio vettoriale V di dimensione 3 su $\mathbb{R}$ e sia fissata una conica non–degenere, a punti reali, Γ, del piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$. Fissato un numero reale positivo, R, dati due punti distinti P e Q di $\mathbb{P}(V)$, si pone

$$\rho_K(P,Q) := \frac{R}{2}\log(R_1,R_2,P,Q),$$

ove $K = -1/R^2$ ed R_1, R_2 sono le due intersezioni (reali) della retta $P \vee Q$ con l'assoluto, Γ, prese nell'ordine per cui $(R_1,R_2,P,Q) \geq 1$. Osserviamo che, se $P = Q$, presa comunque una retta per P, il birapporto (R_1,R_2,P,P) è uguale ad 1 ed il suo logaritmo è nullo e si pone quindi $\rho_K(P,P) = 0$.

Quindi possiamo occuparci di confrontare le metriche δ_K e ρ_K nel solo caso in cui i due punti siano distinti. Nel seguito, indicheremo con g un'applicazione bilineare simmetrica associata a Γ, che possiamo scegliere definita positiva nel caso ellittico e di segnatura $(2,1)$ $(i(g) = 1)$ nel caso iperbolico. Siano dati quindi $P = \sigma\langle v\rangle$ e $Q = \sigma\langle w\rangle$, con l'ulteriore ipotesi che v e w siano in $\mathscr{T}$ e concordi se siamo nel piano iperbolico. La retta $P \vee Q = \sigma\langle v,w\rangle$ interseca l'assoluto nei punti $R_1 = \sigma\langle\lambda_1 v + w\rangle$ ed $R_2 = \sigma\langle\lambda_2 v + w\rangle$ ove λ_1 e λ_2 sono le soluzioni dell'equazione $\lambda^2 g(v,v) + 2\lambda g(v,w) + g(w,w) = 0$; ovvero

$$\lambda_{1,2} = \frac{-g(v,w) \pm \Big(g(v,w)^2 - g(v,v)g(w,w)\Big)^{1/2}}{g(v,w)},$$

che sono due numeri complessi coniugati nel caso del piano ellittico e due numeri reali (distinti) nel caso del piano iperbolico. In entrambo i casi, il prodotto delle due radici, $\lambda_1\lambda_2 = \frac{g(w,w)}{g(v,v)}$ è un numero reale positivo.

Posto $v_\infty = \frac{\lambda_1 v + w}{\lambda_1 - \lambda_2}$ e $v_0 = -\frac{\lambda_2 v + w}{\lambda_1 - \lambda_2}$, si ha $v = v_\infty + v_0$ e $w = -(\lambda_2 v + \lambda_1 w)$; da cui si conclude che $(R_1,R_2,P,Q) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Possiamo quindi scrivere

$$\frac{\rho_K(P,Q)}{R} = \frac{1}{2i}\log\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad \text{nel caso ellittico} \qquad \text{e} \qquad \frac{\rho_K(P,Q)}{R} = \frac{1}{2}\log\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad \text{nel caso iperbolico.}$$

Posto quindi $\rho = \rho_K(P,Q)$ ed utilizzando la formula di Eulero, $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ nel caso ellittico e la definizione di coseno iperbolico $\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ nel caso iperbolico, possiamo quindi scrivere

$$\cos\frac{\rho}{R} = \frac{e^{i\rho/R}+e^{-i\rho/R}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{1/2} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2}\right] \quad \text{nel caso ellittico;}$$

$$\cosh\frac{\rho}{R} = \frac{e^{\rho/R}+e^{-\rho/R}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{1/2} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2}\right] \quad \text{nel caso iperbolico.}$$

In entrambo i casi si ha

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{1/2} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{|\lambda_1+\lambda_2|}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\left|\frac{2g(v,w)}{g(v,v)}\right|}{\sqrt{\frac{g(w,w)}{g(v,v)}}} = \frac{|g(v,w)|}{\|v\|\,\|w\|}$$

da cui si conclude che $\delta_K(P,Q) = \rho_K(P,Q)$ come ci eravamo proposti.

Infine, diamo la definizione alternativa di angolo tra due rette, lasciando al lettore il compito di verificare in modo analogo a quanto visto per le distanze, che coincide questa nuova grandezza coincide con $\alpha(r,s)$ (cf. *Definizione VIII.1.4* e *Definizione VIII.1.13*).

2.3 Definizione. date due rette, r ed s del piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$, da prendersi secanti l'assoluto ed incidenti nel caso del piano iperbolico, si pone

$$\beta(r,s) := \frac{1}{2i}\log(h_1,h_2,r,s),$$

ove h_1, h_2 sono le due rette tangenti a Γ uscenti dal punto $r\cap s$.

Osserviamo che, se $r=s$, prese le tangenti a Γ uscenti da un qualsiasi punto (proprio) della retta, si ha $(h_1,h_2,r,r)=1$ ed il suo logaritmo è nullo e si pone $\beta(P,P)=0$.

3. Fasci di rette e perpendicolari

Nel piano affine (o nel piano euclideo) immerso nel piano proiettivo, i fasci di rette venivano distinti in fasci di rette propri, il cui centro è un punto del piano affine, e fasci di rette parallele, ovvero fasci di rette che hanno come centro un punto della retta impropria che, come tale, non appartiene al fascio di rette parallele.

Il piano ellittico contiene tutti i punti del piano proiettivo e quindi in questo ambiente vi sono solo fasci propri di rette. La situazione del piano iperbolico richiede distinzioni più sottili, a seconda della posizione del centro del fascio rispetto all'assoluto. Diamo quindi la seguente

3.1 Definizione. Chiameremo *fascio di rette* del piano iperbolico l'insieme delle rette secanti l'assoluto (cf. *Definizione VIII.1.11*) e facenti parte di un fascio di rette del piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$. Distinguiamo quindi tre diversi tipi di fasci di rette.

(a) Sono *fasci propri* i fasci di rette il cui centro è un punto interno all'assoluto.
(a) Sono *fasci di parallele* i fasci di rette il cui centro è un punto dell'assoluto.
(a) Sono *fasci impropri* i fasci di rette il cui centro è un punto esterno all'assoluto.

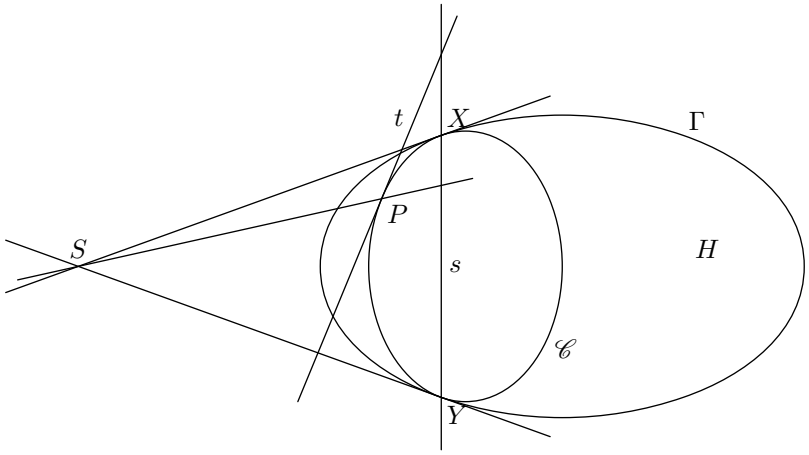
Nel piano euclideo le curve ortogonali(*) a tutte le rette di un fascio proprio di centro P sono le circonferenze che hanno come centro il centro del fascio (sono le coniche del fascio bitangente nei punti

(*) L'angolo tra una curva ed una retta r in un punto semplice P, è l'angolo formato da r con la tangente alla curva in P. Più in generale, l'angolo tra due curve in un punto P, semplice per entrambe, è l'angolo formato tra le rette tangenti alle curve in P.

ciclici alle rette isotrope uscenti da P). Invece un fascio di rette parallele alla direzione $\langle v\rangle$ ha come curve ortogonali le rette del fascio passante per il punto improprio corrispondente alla direzione ortogonale (nel senso euclideo) a $\langle v\rangle$.

La situazione nel piano iperbolico è più articolata. Vediamo di descrivere le curve ortogonali ai diversi tipi di fasci di rette. Si tratterà sempre, come vedremo, di fasci di coniche e la nozione di angolo tra due curve sarà analoga a quella descritta nella nota precedente; con la differenza che useremo la misura dell'angolo nel piano iperbolico (cf. *Definizione VIII.1.13*) al posto dell'angolo euclideo.

3.2 Definizione. Si chiamano *ipercicli* del piano iperbolico tutte le coniche appartenenti ad un fascio di coniche bitangenti l'assoluto in una coppia di punti reali ed i cui punti reali siano interni all'assoluto.



Nel disegno qui sopra, la curva $\mathscr{C}$ è un iperciclo e faremo riferimento a questa figura nella dimostrazione della seguente

3.3 Proposizione. *Siano s una retta del piano iperbolico, X ed Y le intersezioni della retta con l'assoluto, Γ, ed S il polo di s rispetto a Γ. Ogni conica, $\mathscr{C}$, interna al piano iperbolico, del fascio bitangente l'assoluto nei punti X ed Y è ortogonale a tutte le rette del piano iperbolico appartenenti al fascio improprio centrato in S. Inoltre, tutti i punti di $\mathscr{C}$ sono equidistanti dalla retta s.*

dim. Sia g un'applicazione bilineare simmetrica associata a Γ e siano $X = \sigma\langle v\rangle$, $Y = \sigma\langle w\rangle$ ed $S = \sigma\langle y\rangle$, per cui $s = \sigma\langle v, w\rangle$ e $\langle y\rangle = \langle v, w\rangle^{\perp}$. Una generica conica, $\mathscr{C}$, del fascio di ipercicli tangenti l'assoluto in X ed Y ha supporto $\{\ \sigma\langle x\rangle \in \mathbb{P}(V) \mid \lambda g(x,x) + \mu g(y,x)^2 = 0\ \}$, per opportuni valori dei parametri omogenei (λ, μ). In particolare, fissato un punto $P = \sigma\langle x_0\rangle$ di H, l'iperciclo, $\mathscr{C}$, passante per P è determinato dalla condizione $g(y,x_0)^2 g(x,x) - g(x_0,x_0)g(y,x)^2 = 0$. Vogliamo mostrare che la tangente a $\mathscr{C}$ in P, è ortogonale alla retta $P \vee S$. La tangente a $\mathscr{C}$ in P è $t = \{\ \sigma\langle x\rangle \in \mathbb{P}(V) \mid g(y,x_0)g(x_0,x) - g(x_0,x_0)g(y,x) = 0\ \}$ e quindi, posto $y_t = g(y,x_0)x_0 - g(x_0,x_0)y$, si ha $t = \sigma\langle y_t\rangle^{\perp}$. La retta $P \vee S = \sigma\langle x_0, y\rangle = \sigma\langle y_0\rangle^{\perp}$, ove $y_0 = g(w,x_0)v - g(v,x_0)w$. Dunque $g(y_0,y_t) = g(w,x_0)g(y,x_0)g(v,x_0) - g(y,x_0)g(v,x_0)g(w,x_0) = 0$ e le due rette sono ortogonali (cf. *Definizione VIII.1.13*).

Per quanto riguarda la distanza, possiamo ragionare come segue. Siano $P = \sigma\langle x_0\rangle$ ed $R = \sigma\langle y\rangle$ come sopra e sia $Q = \sigma\langle x_1\rangle$ un altro punto del supporto di $\mathscr{C}$. La distanza del punto P da s è quindi uguale alla distanza di P dal punto $s \cap (P \vee S)$ (cf. `Esercizio VIII.1.7`). Analogamente, la distanza di Q da s è uguale alla distanza di Q dal punto $s \cap (Q \vee S)$. Nel punto $P' = s \cap (P \vee S) = \sigma\langle ax_0 + by\rangle$ i coefficienti a e b sono determinati dalla condizione $g(y, ax_0 + by) = 0$, di appartenenza ad s; quindi

$P' = \sigma\langle g(y,y)x_0 - g(x_0,y)y\rangle$. Si ha perciò

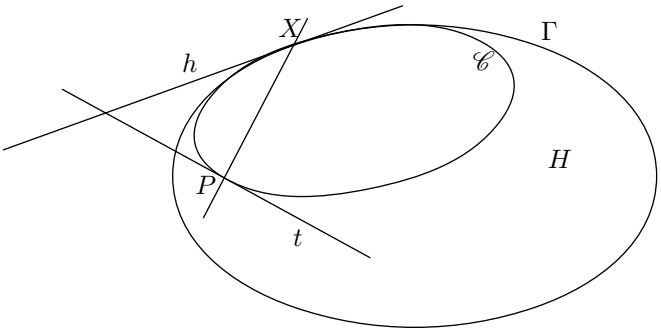
$$\begin{aligned}\cosh\frac{\delta_K(P,s)}{R} = \cosh\frac{\delta_K(P,P')}{R} &= \frac{|g(x_0, g(y,y)x_0 - g(x_0,y)y)|}{\|x_0\|\ \|g(y,y)x_0 - g(x_0,y)y\|}\\ &= \frac{|g(x_0,x_0)g(y,y) - g(x_0,y)^2|}{\sqrt{g(x_0,x_0)\big[g(y,y)^2g(x_0,x_0) - g(y,y)g(x_0,y)^2\big]}}\\ &= \frac{g(x_0,y)^2 - g(x_0,x_0)g(y,y)}{\sqrt{-g(x_0,x_0)g(y,y)\big[g(x_0,y)^2 - g(y,y)g(x_0,x_0)\big]}}\\ &= \sqrt{\frac{g(x_0,y)^2 - g(x_0,x_0)g(y,y)}{-g(x_0,x_0)g(y,y)}}\\ &= \sqrt{1 - \frac{g(x_0,y)^2}{g(x_0,x_0)g(y,y)}}.\end{aligned}$$

Analogamente $s \cap (Q \vee S) = \sigma\langle g(y,y)x_1 - g(x_1,y)y\rangle$ e $\frac{\delta_K(Q,s)}{R} = \sqrt{1 - \frac{g(x_1,y)^2}{g(x_1,x_1)g(y,y)}}$. Per quanto visto sopra, il fatto che P e Q appartengano al supporto della stessa conica $\mathscr{C}$ significa che $g(x_0,y)^2g(x_1,x_1) - g(x_0,x_0)g(x_1,y)^2 = 0$ e quindi $\frac{g(x_0,y)^2}{g(x_0,x_0)g(y,y)} = \frac{g(x_1,y)^2}{g(x_1,x_1)g(y,y)}$, da cui si conclude che $\delta_K(P,s) = \delta_K(Q,s)$. **CVD** □

Abbiamo quindi visto che gli ipercicli nel piano iperbolico hanno una doppia caratterizzazione di tipo metrico. Se chiamiamo s la retta passante per u due punti di tangenza all'assoluto, gli ipercicli sono curve ortogonali al fascio di rette centrato nel polo di s rispetto all'assoluto e inoltre sono i luoghi dei punti equidistanti da s.

Passiamo ora alle curve ortogonali ad un altro tipo di fascio di rette.

3.4 Definizione. Si chiamano *oricicli* del piano iperbolico tutte le coniche appartenenti ad un fascio di coniche iperosculatrici l'assoluto in un punto reale ed i cui punti reali siano interni all'assoluto.



Nel disegno qui sopra, la curva $\mathscr{C}$ è un oriciclo e faremo riferimento a questa figura nella dimostrazione della seguente

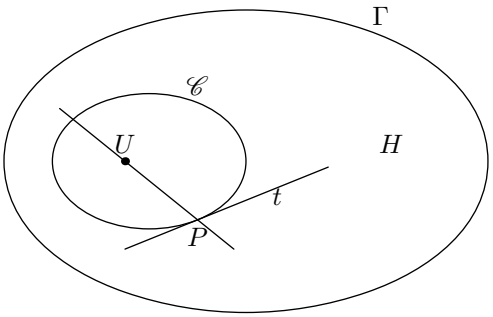
3.5 Proposizione. *Sia X un punto dell'assoluto, Γ, e sia h la tangente a Γ in X. Ogni conica, $\mathscr{C}$, interna al piano iperbolico, del fascio iperosculatore l'assoluto nel punto X è ortogonale a tutte le rette del piano iperbolico appartenenti al fascio di parallele centrato in X.*

dim. Sia g un'applicazione bilineare simmetrica associata a Γ e sia $X = \sigma\langle v\rangle$. Una generica conica, $\mathscr{C}$, del fascio di oricicli tangenti l'assoluto in X ha supporto $\big\{\ \sigma\langle x\rangle \in \mathbb{P}(V) \mid \lambda g(x,x) + \mu g(v,x)^2 = 0\ \big\}$, per opportuni valori dei parametri omogenei (λ,μ). In particolare, fissato un punto $P = \sigma\langle x_0\rangle$ di H, l'oriciclo, $\mathscr{C}$, passante per P è determinato dalla condizione $g(v,x_0)^2g(x,x) - g(x_0,x_0)g(v,x)^2 = 0$.

Vogliamo mostrare che la tangente a $\mathscr{C}$ in P, è ortogonale alla retta $P \vee X$. La tangente a $\mathscr{C}$ in P è $t = \{\, \sigma\langle x\rangle \in \mathbb{P}(V) \mid g(v,x_0)g(x_0,x) - g(x_0,x_0)g(v,x) = 0 \,\}$ e quindi, posto $y = g(v,x_0)x_0 - g(x_0,x_0)v$, si ha $t = \sigma\langle y\rangle^{\perp}$. La retta $P \vee X = \sigma\langle x_0, v\rangle$ e quindi contiene il punto $Y = \sigma\langle y\rangle$ che è il polo di t rispetto a Γ. Dunque le due rette sono ortogonali (cf. *Definizione VIII.1.13*). **CVD** □

Passiamo ora alle curve ortogonali all'ultimo tipo di fascio di rette.

3.6 Definizione. Si chiamano *cicli* del piano iperbolico tutte le coniche appartenenti ad un fascio di coniche bitangenti l'assoluto in due punti complessi coniugati (non reali) ed i cui punti reali siano interni all'assoluto.



Nel disegno qui sopra, la curva $\mathscr{C}$ è un oriciclo e faremo riferimento a questa figura nella dimostrazione della seguente

3.7 Proposizione. *Sia U un punto del piano iperbolico e sia r_U la sua polare rispetto all'assoluto, Γ. La retta r_U interseca l'assoluto in due punti complessi coniugati, X e $\bar{X}$. Ogni conica, $\mathscr{C}$, interna al piano iperbolico, del fascio bitangente l'assoluto nei punti X ed $\bar{X}$ è ortogonale a tutte le rette del piano iperbolico appartenenti al fascio proprio centrato in U. Inoltre, tutti i punti di $\mathscr{C}$ in H sono equidistanti dal punto U.*

dim. Sia g un'applicazione bilineare simmetrica associata a Γ e sia $U = \sigma\langle u\rangle \in H$. Una generica conica, del fascio di cicli bitangenti l'assoluto in X ed $\bar{X}$ ha supporto $\{\, \sigma\langle x\rangle \in \mathbb{P}(V) \mid \lambda g(x,x) + \mu g(u,x)^2 = 0 \,\}$, per opportuni valori dei parametri omogenei (λ,μ). In particolare, fissato un punto $P = \sigma\langle x_0\rangle$ di H, il ciclo, $\mathscr{C}$, passante per P di tale fascio è determinato dalla condizione $g(u,x_0)^2 g(x,x) - g(x_0,x_0)g(u,x)^2 = 0$. Vogliamo mostrare che la tangente a $\mathscr{C}$ in P, è ortogonale alla retta $P \vee U$. La tangente a $\mathscr{C}$ in P è $t = \{\, \sigma\langle x\rangle \in \mathbb{P}(V) \mid g(u,x_0)g(x_0,x) - g(x_0,x_0)g(u,x) = 0 \,\}$ e quindi, posto $y = g(u,x_0)x_0 - g(x_0,x_0)u$, si ha $t = \sigma\langle y\rangle^{\perp}$. La retta $P \vee X = \sigma\langle x_0, u\rangle$ e quindi contiene il punto $Y = \sigma\langle y\rangle$ che è il polo di t rispetto a Γ. Dunque le due rette sono ortogonali (cf. *Definizione VIII.1.13*).

Per quanto riguarda la distanza, dei punti di $\mathscr{C}$ da U, sia $Q = \sigma\langle x_1\rangle$ un altro punto di H nel supporto di $\mathscr{C}$. Si ha quindi $g(u,x_0)^2 g(x_1,x_1) - g(x_0,x_0)g(u,x_1)^2 = 0$; ovvero $\frac{g(u,x_0)^2}{-g(x_0,x_0)} = \frac{g(u,x_1)^2}{-g(x_1,x_1)}$. Dunque, si ha

$$\cosh\frac{\delta_K(U,P)}{R} = \frac{|g(u,x_0)|}{\sqrt{-g(u,u)}\,\sqrt{-g(x_0,x_0)}} = \frac{1}{\sqrt{-g(u,u)}}\sqrt{\frac{g(u,x_0)^2}{-g(x_0,x_0)}} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{-g(u,u)}}\sqrt{\frac{g(u,x_1)^2}{-g(x_1,x_1)}} = \frac{|g(u,x_1)|}{\sqrt{-g(u,u)}\,\sqrt{-g(x_1,x_1)}} = \cosh\frac{\delta_K(U,Q)}{R}$$

e ciò conclude la verifica. **CVD** □

Abbiamo quindi visto che anche i cicli del piano iperbolico hanno una doppia caratterizzazione di tipo metrico. Ovvero, dato un punto U del piano iperbolico i cicli bitangenti l'assoluto nell'intersezione

tra questi e la polare di U sono le curve ortogonali alle rette del fascio proprio centrato in U e sono luoghi di punti equidistanti da U.

Nel piano ellittico tutti i fasci di rette sono fasci propri e quindi si ha solo l'analogo dei cicli del piano iperbolico.

3.8 Definizione. Nel piano ellittico. l'assoluto è una conica senza punti reali e quindi, presa una qualsiasi retta reale, la retta interseca l'assoluto in una coppia di punti complessi coniugati. Si chiamano *cicli* le coniche (a punti reali) del fascio di coniche bitangenti a Γ nei punti di intersezione con r.

Lasciamo al lettore la dimostrazione dell'analoga caratterizzazione metrica dei cicli (cf. *Proposizione VIII.3.7*).

Esercizio 3.1. Sia U un punto del piano ellittico e sia r_U la sua polare rispetto all'assoluto, Γ. La retta r_U interseca l'assoluto in due punti complessi coniugati, X e $\bar{X}$. Ogni conica, $\mathscr{C}$, del fascio bitangente l'assoluto nei punti X ed $\bar{X}$ è ortogonale a tutte le rette di $\mathbb{P}(V)$ appartenenti al fascio proprio centrato in U. Inoltre, tutti i punti di $\mathscr{C}$ sono equidistanti dal punto U. □

4. Isometrie

In questa sezione ci occuperemo di descrivere alcune caratteristiche delle isometrie dei piani non-euclidei. Cominciamo con la definizione.

4.1 Definizione. È un'*isometria* del piano ellittico una qualunque proiettività che lasci invariante l'assoluto. È un'*isometria* del piano iperbolico una qualunque proiettività che lasci invariante l'assoluto e mandi punti interni all'assoluto in punti interni allo stesso.

4.2 Proposizione. *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare che definisce la metrica non euclidea su $\mathbb{P}(V)$. Una proiettività $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, è un'isometria (nel senso della Definizione VIII.4.1) se, e solo se, esiste una soprastante, $\phi : V \to V$, di f che sia un'isometria per g (nel senso della Definizione IV.3.1).*

dim. Diamo la dimostrazione nel caso del piano iperbolico, H, lasciando al lettore il compito di sviluppare ragionamenti analoghi nel caso del piano ellittico.

Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, un'isometria del piano iperbolico, H, e sia $\psi : V \to V$ una soprastante. Poiché f manda l'assoluto in sé, si ha che, per ogni $v \in V$, $g(v, v) = 0 \Rightarrow g(\psi(v), \psi(v)) = 0$. Sia ora $P = \sigma \langle u \rangle$ un punto di H e v, w due vettori isotropi tali che $u = v + w$. Si ha $g(\psi(v+w), \psi(v+w)) = 2g(\psi(v), \psi(w)) = 2kg(v, w) = kg(v+w, v+w)$, ove $k = \frac{g(\psi(v+w),\psi(v+w))}{g(v+w,v+w)} > 0$. Inoltre, presi comunque due vettori in $\langle v, w \rangle$, si ha

$$g(\psi(av + bw), \psi(cv + dw)) = 2(ad + bc)g(\psi(v), \psi(w)) = 2(ad + bc)kg(v, w) = kg(av + bw, cv + dw).$$

Possiamo quindi affermare che $k^{1/2}\psi$ è un'isometria, del sottospazio $\langle v, w \rangle$ su $\langle \psi(v), \psi(w) \rangle$. La scelta di due diversi vettori isotropi (distinti) x, y tali che $u = x + y$, permette di concludere che la costante k non dipende da tale scelta e quindi che $\phi = k^{1/2}\psi$ è un'isometria dello spazio V. **CVD** □

D'ora in poi, quando considereremo un'isometria di un piano non-euclideo, useremo come soprastante l'isometria dello spazio vettoriale. È chiaro inoltre che le isometrie conservano distanze ed angoli e che formano un gruppo dipendente solo dal segno della curvatura della metrica. Come nel caso dello spazio euclideo, il gruppo delle isometrie agisce transitivamente sul piano. Lasciamo la verifica come esercizio.

Esercizio 4.1. Presi due punti P e Q del piano ellittico, esiste un'isometria del piano ellittico che manda P su Q. □

Esercizio 4.2. Presi due punti P e Q del piano iperbolico, H, esiste un'isometria del piano iperbolico che manda P su Q. □

Esercizio 4.3. Si mostri che, presi due punti, P e Q, esterni al piano iperbolico, esiste un'isometria del piano iperbolico che manda P su Q. □

Esercizio 4.4. Si mostri che, presi due punti, P e Q, appartenenti all'assoluto del piano iperbolico, esiste un'isometria del piano iperbolico che manda P su Q. □

4.3 Proposizione. *Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, un'isometria di un piano non euclideo, allora esiste almeno un punto P di $\mathbb{P}(V)$ tale che $f(P) = P$.*

dim. Basta osservare che il polinomio caratteristico dell'applicazione lineare soprastante ad f è un polinomio a coefficienti reali, di grado 3 e quindi viè necessariamente almeno un autovalore reale per la soprastante. **CVD** □

Grazie all'osservazione fatta, diamo una descrizione delle isometrie del piano ellittico.

4.4 Proposizione. *Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, un'isometria di un piano ellittico che lascia unito il punto $P = \sigma\langle u\rangle$. Esiste una base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di V rispetto a cui una soprastante di f ha matrice*

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \mp\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \pm\cos\theta \end{pmatrix}$$

per un opportuno $\theta \in [0, 2\pi)$.

dim. Sia $\phi : V \to V$ un'isometria di V soprastante ad f. Poiché g è definita positiva, gli autovalori reali sono uguali a ± 1 e possiamo quindi supporre che $v_1 = \frac{u}{\|u\|}$ sia un autovettore relativo all'autovalore 1. Sul sottospazio $\langle v_1\rangle^\perp$ resta indotta una trasformazione ortogonale e quindi presa una base ortonormale v_2, v_3 di $\langle v_1\rangle^\perp$, si conclude che $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è la base cercata. **CVD** □

Possiamo dare un interpretazione "geometrica" del parametro θ che compare nella precedente Proposizione.

4.5 Corollario. *Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, un'isometria di un piano ellittico che lascia unito il punto P. Presa una qualunque retta, r, passante per P, si ha $\cos\alpha(r, f(r)) = |\cos\theta|$, ove $f(r)$ è l'immagine della retta r tramite f e θ è il parametro che compare nella Proposizione VIII.4.4.*

dim. Sia $P = \sigma\langle v_1\rangle$ come nella dimostrazione della precedente proposizione. Una generica retta passante per P è $r = \sigma\langle v_1, v_2\rangle$, e possiamo supporre che i due vettori siano una base ortonormale del sottospazio considerato. Preso un vettore v_3 che completi v_2 ad una base ortonormale di $\langle v_1\rangle^\perp$, si ha $\phi(v_3) = (\mp\sin\theta)v_2 + (\pm\cos\theta)v_3$, ove ϕ è una soprastante di f. Possiamo quindi calcolare $\cos\alpha(r, f(r)) = |g(v_3, \phi(v_3)| = |\cos\theta|$. **CVD** □

Possiamo dare una descrizione analoga delle isometrie che lasciano fisso un punto del piano iperbolico.

4.6 Proposizione. *Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, un'isometria di un piano iperbolico che lascia unito un punto, $P = \sigma\langle u\rangle$, di H. Esiste una base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di V rispetto alla quale una soprastante di f ha matrice*

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \mp\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \pm\cos\theta \end{pmatrix}$$

per un opportuno $\theta \in [0, 2\pi)$.

dim. Sia $\phi : V \to V$ un'isometria di V soprastante ad f. Poiché possiamo cambiare ϕ con $-\phi$, possiamo supporre che u sia un autovettore relativo all'autovalore 1. Dunque preso $v_1 = \frac{u}{\|u\|}$, sul sottospazio $\langle v_1\rangle^\perp$ la restrizione di g è definita positiva (cf. *Teorema di Sylvester IV.2.7*) e resta perciò indotta una trasformazione ortogonale. Presa una base ortonormale v_2, v_3 di $\langle v_1\rangle^\perp$, si conclude che $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è la base cercata. **CVD** □

In modo perfettamente analogo al caso ellittico si ha

4.7 Corollario. *Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, un'isometria di un piano iperbolico che lascia unito il punto P. Presa una qualunque retta, r, passante per P, si ha $\cos\alpha(r, f(r)) = |\cos\theta|$, ove $f(r)$ è l'immagine della retta r tramite f e θ è il parametro che compare nella Proposizione VIII.4.6.*

dim. Sia $P = \sigma\langle v_1\rangle$ come nella dimostrazione della precedente proposizione. Una generica retta passante per P è $r = \sigma\langle v_1, v_2\rangle$, e possiamo supporre che i due vettori siano una base ortogonale del sottospazio considerato, con $g(v_1, v_1) = -1 = -g(v_2, v_2)$. Preso un vettore v_3 che completi v_2 ad una base ortonormale di $\langle v_1\rangle^\perp$, si ha $\phi(v_3) = (\mp\sin\theta)v_2 + (\pm\cos\theta)v_3$, ove ϕ è una soprastante di f. Possiamo quindi calcolare $\cos\alpha(r, f(r)) = |g(v_3, \phi(v_3)| = |\cos\theta|$. **CVD** □

Possiamo quindi concludere che i gruppi di isometrie che lasciano fisso un punto P del piano ellittico, del piano iperbolico o del piano euclideo sono tutti isomorfi tra loro (ed isomorfi al gruppo O_2 delle trasformazioni ortogonali di $\mathbb{R}^2$). Possiamo quindi estendere anche ai piani non-euclidei la nozione di angolo orientato tra semirette. e "sommare" le misure di angoli adiacenti.

Chiudiamo questa sezione dando una descrizione delle isometrie del piano iperbolico che lasciano fisso un punto dell'assoluto o un punto esterno ad esso.

4.8 Proposizione. *Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, un'isometria di un piano iperbolico che lascia unito un punto, $P = \sigma\langle u\rangle$, esterno all'assoluto. Esiste una base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di V rispetto alla quale una soprastante di f ha matrice*

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\tau & \pm\sinh\tau \\ 0 & \sinh\tau & \pm\cosh\tau \end{pmatrix}$$

per un opportuno numero reale τ.

dim. Sia $\phi : V \to V$ un'isometria di V soprastante ad f. Poiché possiamo cambiare ϕ con $-\phi$, possiamo supporre che u sia un autovettore relativo all'autovalore 1. Dunque preso $v_1 = \frac{u}{\|u\|}$, sul sottospazio $\langle v_1\rangle^\perp$ la restrizione di g è non–degenere e non–definita (cf. *Teorema di Sylvester IV.2.7*) e resta perciò indotta una isometria di tale spazio. Presa una base ortogonale v_2, v_3 di $\langle v_1\rangle^\perp$, con $g(v_2, v_2) = 1 = -g(v_3, v_3)$, si conclude che $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è la base cercata. **CVD** □

4.9 Proposizione. *Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$, un'isometria di un piano iperbolico che lascia unito un punto, $P = \sigma\langle v\rangle$, appartenente all'assoluto. Se ϕ è l'isometria soprastante f e $\phi(v) = av$ per qualche $a \neq \pm 1$, allora esiste una base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di V rispetto alla quale una soprastante di f ha matrice*

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per un opportuno numero reale a.

dim. Sia $\phi(v) = av$, e consideriamo $\langle v\rangle^\perp = \langle v, y\rangle$ e non è restrittivo supporre $g(y, y) = 1$. Allora, si ha $\phi(y) = \pm(y + bv)$, perché deve aversi $\phi(y) \in \langle v\rangle^\perp = \langle v, y\rangle$ e $g(\phi(y), \phi(y)) = g(y, y) = 1$. Infine, preso un vettore isotropo, w, appartenente a $\langle y\rangle^\perp$ e tale che $g(v, w) = 1$, si ha una base di V e deve aversi $\phi(w) = a^{-1}w \mp ba^{-1}y - \frac{b^2a^{-1}}{2}v$. Potendo ancora modificare l'isometria soprastante componendola con la moltiplicazione per -1, si può supporre che l'isometria soprastante f abbia matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & -\frac{b^2a^{-1}}{2} \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

per opportuni valori di $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Si ha una matrice triangolare superiore e, se $a \neq \pm 1$, gli autovalori sono distinti e quindi ϕ è diagonalizzabile nella forma dell'enunciato. **CVD** □

Nelle notazioni della dimostrazione precedente, possiamo osservare che la matrice di g nella base $\{v, y, w\}$ è uguale a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice

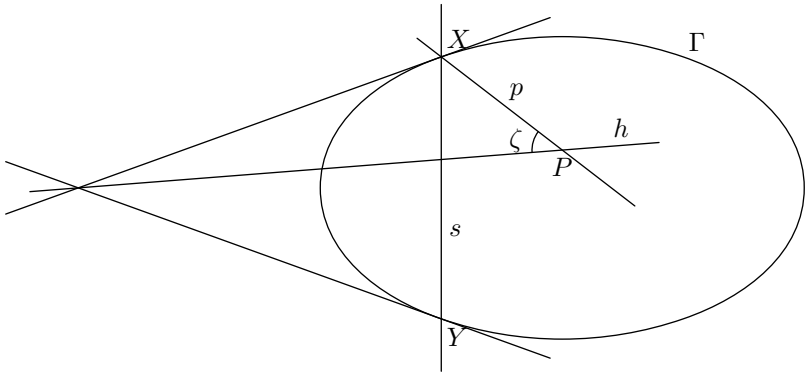
$$\begin{pmatrix} 1 & b & -b^2/2 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nella base data rappresenta un'isometria. Osserviamo che questa matrice, a differeenza delle matrici di isometrie di una forma definita positiva, non è diagonalizzabile se $b \neq 0$, nemmeno estendendo gli scalari al campo complesso.

5. Angolo di parallelismo

In questa sezione andremo a ricavare una relazione fondamentale della geometria iperbolica che lega la misura delle distanze a quella degli angoli.

5.1 Definizione. Sia $s$una retta del piano iperbolico H, di curvatura K, e sia dato un punto P non appartenente ad s. Siano p ed h, rispettivamente, una parallela ed una perpendicolare ad s passanti per P. L'angolo ζ tra p ed h è detto l'*angolo di parallelismo* di s in P (cf. il disegno sottstante).



Nel seguito di questa sezione, mostreremo che l'angolo ζ così definito non dipenda da quale sia stata scelta tra le due parallele ad s uscenti da P, e nemmeno dalla scelta del punto P, ma dipenda solo dalla distanza di P da s. Il significato dell'angolo ζ può essere espresso dicendo che tutte le rette per P che formano con h un angolo minore di ζ sono incidenti con s, mentre tutte le rette che formano un angolo strettamente maggiore di ζ non intersecano s in punti del piano iperbolico.

5.2 Proposizione. *Notazioni come nella Definizione VIII.5.1. L'angolo di parallelismo, ζ, dipende solo dalla distanza di P dalla retta s, $\delta = \delta_K(P, s)$, e tra le due grandezze vale la relazione fondamentale*

$$\sin \zeta = \frac{1}{\cosh \frac{\delta}{R}}.$$

dim. Sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare associata all'assoluto, Γ. Siano $X = \sigma \langle v \rangle$ ed $Y = \sigma \langle w \rangle$ i punti di $\Gamma \cap s$ e supponiamo si abbia $g(v, w) = 1$. Sia infine $S = \sigma \langle y \rangle$ il polo di s rispetto a Γ con $g(y, y) = 1$. Osserviamo che v, w, y formano una base di V. Sia $P = \sigma \langle u \rangle$ un punto del piano iperbolico non appartenente ad s. Si avrà quindi $u = av + bw + cy$, con $c \neq 0$ e $g(u, u) = 2ab + c^2 < 0$. Allora, la

perpendicolare ad s passante per P è $P \vee S = \sigma\langle u, y\rangle = \sigma\langle av - bw\rangle^{\perp}$, mentre una parallela ad s passante per P è $P \vee X = \sigma\langle u, v\rangle = \sigma\langle cv - by\rangle^{\perp}$. L'angolo di parallelismo è quindi determinato dalle condizioni

$$\cos\zeta = \frac{|g(av-bw, cv-by)|}{\sqrt{g(av-bw, av-bw)g(cv-by, cv-by)}} = \frac{|bc|}{\sqrt{(-2ab)b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{-2ab}} \qquad \text{e } \zeta \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

Questa grandezza non cambia sostituendo $P \vee X$ con l'altra parallela $P \vee Y$.

La proiezione ortogonale di P sulla retta s è il punto $P' = \sigma\langle av + bw\rangle$ e quindi $\delta = \delta_K(P, s) = \delta_K(P, P')$; da cui si deduce che

$$\cosh\frac{\delta}{R} = \frac{|g(u, av+bw)|}{\sqrt{g(u,u)g(av+bw, av+bw)}} = \frac{|2ab|}{\sqrt{(2ab+c^2)(2ab)}}.$$

Si ha quindi

$$\sin^2\zeta = \cos^2\zeta\,\tan^2\zeta = \cos^2\zeta\left(\frac{1}{\cos^2\zeta} - 1\right) = \frac{c^2}{-2ab}\frac{-2ab-c^2}{c^2} = \frac{-(2ab+c^2)}{-2ab} = \frac{1}{\cosh^2\frac{\delta}{R}},$$

da cui si deduce l'uguaglianza dell'enunciato, ricordando che sia $\sin\zeta$ che $\frac{\delta}{R}$ sono numeri reali non negativi.Questa relazione rende esplicita la dipendenza di ζ dalla distanza δ. **CVD** □

Con l'aiuto delle relazioni fondamentali per le funzioni trigonometriche ed iperboliche si possono trovare altre forme equivalenti alla relazione dell'enunciato.

Esercizio 5.1. Siano $\zeta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\frac{\delta}{R}$ un numero reale non negativo. Si verifichi che le seguenti uguaglianze

$$(a)\ \sin\zeta = \frac{1}{\cosh\frac{\delta}{R}}; \qquad (b)\ \cos\zeta = \tanh\frac{\delta}{R}; \qquad (c)\ \tan\zeta = \frac{1}{\sinh\frac{\delta}{R}}.$$

sono equivalenti. □

La relazione fonadamentale $\frac{1}{\tan\zeta} = \sinh\frac{\delta_K(P,s)}{R}$, fu pubblicata per la prima volta dal matematico russo Lobacevskij, nella prima metà del diciannovesimo secolo, ma gli storici affermano che la formula era già nota a Gauss almeno 15 anni prima della sua pubblicazione.

Questa relazione, oltre amo strare esplicitamente la dipendenza dell'angolo di parallelismo dalla distanza dalla retta, indica che, nell'ambito della geometria iperbolica, vi è un'unità di misura "assoluta" per le lunghezze, ovvero l'equivalente per la misura delle lunghezze di ciò che è il radiante per la misura degli angoli.

Facciamo un'ulteriore manipolazione per portare in un'altra forma equivalente la relazione fondamentale. Dalla relazione $\frac{1}{\tan\zeta} = \sinh\frac{\delta}{R}$, si deduce tramite le usuali formule della trigonometria l'uguaglianza

$$\frac{1-\tan^2\frac{\zeta}{2}}{2\tan\frac{\zeta}{2}} = \frac{e^{\frac{\delta}{R}} - e^{-\frac{\delta}{R}}}{2} \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{1-\tan^2\frac{\zeta}{2}}{\tan\frac{\zeta}{2}} = \frac{1-e^{-\frac{2\delta}{R}}}{e^{-\frac{\delta}{R}}}.$$

Osservando che, sia $\tan\frac{\zeta}{2}$ che $e^{-\frac{\delta}{R}}$ sono numeri reali positivi, dalla relazione precedente si conclude che

$$\tan\frac{\zeta}{2} = e^{-\frac{\delta}{R}}. \tag{5.3}$$

Si noti che, al tendere a zero di $\frac{\delta}{R}$, l'esponenziale $e^{-\frac{\delta}{R}}$ tende ad 1 e quindi l'angolo ζ tende a $\frac{\pi}{2}$. Cioè, per valori piccoli (rispetto ad R) della distanza di P dalla retta s, una retta parallela ad s forma con la perpendicolare h un angolo vicino a $\frac{\pi}{2}$. Cioè per valori della distanza piccoli rispetto ad R il piano iperbolico non differisce "sensibilmente" da quello euclideo. Inoltre, facendo tendere all'infinito il raggio

di curvatura, R, l'angolo di parallelismo diventa indipendente dalla distanza e costantemente uguale a $\frac{\pi}{2}$, come accade nel piano euclideo.

Concludiamo questa breve discussione sull'angolo di parallelismo riportando la stima fatta da Lobacevskij del raggio di curvatura dell'universo (ovvero di una sua eventuale metrica iperbolica) nell'ipotesi che questi sia uno spazio iperbolico(†).

5.4 Osservazione. Si consideri un triangolo rettangolo ABC, ove la lunghezza del lato BC, ovvero $\delta_K(B,C) = a$, è uguale al diametro maggiore dell'orbita terrestre (ovvero la massima distanza terra-sole), mentre nel punto A si trova una stella di parallasse $2p$(‡). Se indichiamo con $\zeta(a)$ l'angolo di parallelismo alla distanza a, si ha la disuguaglianza $\frac{\pi}{2} \geq \zeta(a) > \frac{\pi}{2} - 2p$, perché le due rette ci appaiono incidenti. Da ciò si deduce la disuguaglianza

$$\tan\frac{\zeta(a)}{2} > \tan\left(\frac{\pi}{4} - p\right) = \frac{1-\tan p}{1+\tan p}.$$

Dalla uguaglianza fondamentale (cf. VIII.5.3) si ricava $e^{\frac{a}{R}} < \frac{1+\tan p}{1-\tan p}$; ed applicando il logaritmo ad entrambo i membri si ottiene

$$\frac{a}{R} \leq \log\frac{1+\tan p}{1-\tan p} = \log(1+\tan p) - \log(1-\tan p) = 2\left(\tan p + \frac{\tan^3 p}{3} + \dots\right);$$

ove l'utilizzo della formula di Taylor per il logaritmo è legittimo perché $0 < p < \frac{\pi}{4}$ e quindi $0 < \tan p < 1$.

Osservando che $\tan 2p = \frac{2\tan p}{1-\tan^2 p} = 2\tan p(1+\tan^2 p + \dots)$; si deduce

$$\frac{a}{R} \leq \log\frac{1+\tan p}{1-\tan p} \leq \tan 2p.$$

A questo punto possiamo utilizzare come angolo $2p$ la parallasse di Sirio, che è $2p = 1''.24$ (in gradi) e si ottiene la disuguaglianza $\frac{a}{R} \leq 6.012 \cdot 10^{-6}$. Ovvero il presunto raggio di curvatura di un universo iperbolico ha un ordine di grandezza superiore a 150000 volte il diametro massimo dell'orbita terrestre ($R > a \cdot 1.663 \cdot 10^5$).

Per quanto osservato in precedenza, questa stima giustificherebbe pienamente l'uso della geometria euclidea per tutte le misure riguardanti oggetti terrestri in quanto l'eventuale differenza dovuta alla curvatura non sarebbe facilmente apprezzabile dagli usuali strumenti di misura.

(†) In realtà abbiamo dato solo la definizione di piano iperbolico senza mai definire cosa sia uno spazio iperbolico di dimensione maggiore di 2. D'altra parte, le considerazioni che verranno fatte nel seguito saranno considerazioni di geometria piana; perciò ci riteniamo esonerati dal compito di dare una definizione più generale.

(‡) Si chiama *parallasse* l'angolo da cui il punto A vede il diametro maggiore dell'orbita terrestre. Tale angolo viene calcolato misurando l'inclinazione del lato terra–stella, rispetto al diametro maggiore dell'orbita terrestre, nell'ipotesi che lo spazio sia euclideo. Quindi viene misurato l'angolo $\frac{\pi}{2} - 2p$, ed è questa misura che utilizzeremo nel seguito.

6. Triangoli

In questa sezione vogliamo mostrare alcune proprietà dei triangoli del piano iperbolico che presentano differenze sostanziali con le proprietà dei triangoli del piano euclideo. Lasciamo al lettore il compito di svolgere uno studio analogo delle proprietà dei triangoli del piano ellittico.

6.1 Definizione. Un *triangolo del piano iperbolico* è il dato di tre punti distinti, A, B, C del piano iperbolico, detti i *vertici* del triangolo e delle tre rette $a = B \vee C$, $b = A \vee C$, $c = A \vee B$, dette i *lati* del triangolo. Un triangolo si dirà *degenere* se i tre vertici sono allineati oppure se i tre lati concorrono ad uno stesso punto.

Come i vertici di un triangolo non degenere determinano i lati, così il dato dei tre lati, a, b e c, determina i vertici $A = b \cap c$, $B = a \cap c$, $C = a \cap b$. La *lunghezza del lato* di un triangolo è la distanza tra i due vertici contenuti nel lato.

Dati i tre vertici $A = \sigma\langle u\rangle$, $B = \sigma\langle v\rangle$ e $C = \sigma\langle w\rangle$, di un triangolo non degenere, supponiamo i tre vettori concordi e con $g(u,u) = g(v,v) = g(w,w) = -1$. Le lunghezze dei lati sono le costanti

$$\gamma = \cosh\frac{\delta_K(A,B))}{R} = -g(u,v), \quad \beta = \cosh\frac{\delta_K(A,C))}{R} = -g(u,w), \quad \alpha = \cosh\frac{\delta_K(B,C))}{R} = -g(v,w).$$

Quindi al triangolo non degenere determinato dai tre vertici dati, resta associata la base $\mathcal{V} = \{u,v,w\}$ di V e la matrice di g rispetto a questa base, ovvero

$$L = \begin{pmatrix} -1 & -\gamma & -\beta \\ -\gamma & -1 & -\alpha \\ -\beta & -\alpha & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrrice così definita è detta talvolta la *matrice dei lati* di un triangolo. Le costanti α, β, γ, sono tutte maggiori di 1 e si ha

$$\det L = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma - 1 < 0.$$

In particolare, due triangoli con i lati di uguale lunghezza sono necessariamente isometrici.

Vogliamo introdurre ora la misura degli "angoli interni" di un triangolo. non limitandoci quindi alla misura dell'angolo tra le due rette, ma considerando l'angolo tra le semirette corrispondenti.

Nelle notazioni precedenti, siano $a = B \vee C$, $b = A \vee C$, $c = A \vee B$ i tre lati del triangolo e consideriamo tre vettori, y_1, y_2, y_3, tali che

$$a = \sigma\langle v,w\rangle = \sigma\langle y_1\rangle^\perp, \qquad b = \sigma\langle u,w\rangle = \sigma\langle y_2\rangle^\perp, \qquad c = \sigma\langle u,v\rangle = \sigma\langle y_3\rangle^\perp,$$

con $g(y_1,y_1) = g(y_2,y_2) = g(y_3,y_3) = 1$ e le tre basi ordinate $\{u,v,y_3\}$, $\{u,y_2,w\}$, $\{y_1,v,w\}$, siano equiorientate con la base $\{u,v,w\}$. Gli *angoli interni* del triangolo sono quindi ϑ_A, ϑ_B, ϑ_C, in $[0,\pi]$, definiti dalle condizioni

$$\lambda = \cos\vartheta_A = -g(y_2,y_3), \qquad \mu = \cos\vartheta_B = -g(y_1,y_3), \qquad \nu = \cos\vartheta_C = -g(y_1,y_2).$$

La matrice dell'applicazione bilineare g, rispetto alla base $\{y_1,y_2,y_3\}$ è uguale ad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\mu \\ -\nu & 1 & -\lambda \\ -\mu & -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

ed è talvolta detta la *matrice degli angoli* del triangolo. Le costanti λ, μ, ν, sono tutte in $(-1,1)$ e si ha

$$\det A = 1 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 - 2\lambda\mu\nu < 0.$$

In particolare, due triangoli con gli angoli interni di uguale misura sono necessariamente isometrici.

Si noti che anche nel piano euclideo due triangoli aventi i lati di uguali lunghezze sono necessariamente isometrici, ma non è vero che ciò accada se sono uguali le misure degli angoli. L'uguaglianza delle misure degli angoli interni permette di affermare che i due triangoli sono omotetici e non necessariamente isometrici.

Esercizio 6.1. Siano dati i tre vertici $A = \sigma\langle u\rangle$, $B = \sigma\langle v\rangle$ e $C = \sigma\langle w\rangle$, di un triangolo non degenere, con i tre vettori, a due a due, concordi e $g(u,u) = g(v,v) = g(w,w) = -1$. Siano inoltre, $\gamma = -g(u,v)$, $\beta = -g(u,w)$ e $\alpha = -g(v,w)$ e si indichi con L la matrice dei lati del triangolo.

(a) Si verifichi che i vettori y_1, y_2, y_3 che definiscono gli angoli interni del triangolo sono

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{\alpha^2-1}{\sqrt{(1-\alpha^2)\det L}}u + \frac{\gamma-\alpha\beta}{\sqrt{(1-\alpha^2)\det L}}v + \frac{\beta-\alpha\gamma}{\sqrt{(1-\alpha^2)\det L}}w,\\
y_2 &= \frac{\gamma-\alpha\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)\det L}}u + \frac{\beta^2-1}{\sqrt{(1-\beta^2)\det L}}v + \frac{\alpha-\beta\gamma}{\sqrt{(1-\beta^2)\det L}}w,\\
y_3 &= \frac{\beta-\alpha\gamma}{\sqrt{(1-\gamma^2)\det L}}u + \frac{\alpha-\beta\gamma}{\sqrt{(1-\gamma^2)\det L}}v + \frac{\gamma^2-1}{\sqrt{(1-\gamma^2)\det L}}w.
\end{aligned}$$

(b) Si verifichi che i gli angoli interni del triangolo sono legati alle misure dei lati dalle relazioni

$$\cos\vartheta_A = \frac{\beta\gamma-\alpha}{\sqrt{(\beta^2-1)(\gamma^2-1)}}, \qquad \cos\vartheta_B = \frac{\alpha\gamma-\beta}{\sqrt{(\alpha^2-1)(\gamma^2-1)}}, \qquad \cos\vartheta_C = \frac{\alpha\beta-\gamma}{\sqrt{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}}.$$

Si concluda che due almeno tra gli angoli interni sono minori di $\frac{\pi}{2}$.

(c) Si scrivano i vettori u, v e w come combinazione lineare di y_1, y_2, y_3 e si scriveno esplicitamente le relazioni tra le lunghezze dei lati e le grandezze $\lambda = \cos\vartheta_A$, $\mu = \cos\vartheta_B$, $\nu = \cos\vartheta_C$. □

Siamo in grado di dimostrare il risultato fondamentale di questa sezione

6.2 Teorema. *Siano ϑ_A, ϑ_B, ϑ_C le misure degli angoli interni di un triangolo non degenere del piano iperbolico. Allora, $\vartheta_A + \vartheta_B + \vartheta_C < \pi$.*

dim. Tracciando la retta perpendicolare ad un lato passante per il vertice opposto, possiamo decomporre il triangolo in due triangoli rettangoli ed è quindi sufficiente dimostrare la tesi per un triangolo rettangolo. Supponiamo quindi che sia $\vartheta_C = \frac{\pi}{2}$. La matrice degli angoli del triangolo è uguale ad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mu \\ 0 & 1 & -\lambda \\ -\mu & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det A = 1-\lambda^2-\mu^2 < 0$, da cui si deduce che $0 < \vartheta_A, \vartheta_B < \frac{\pi}{2}$. Inoltre, si ha

$$1-\cos^2\vartheta_A = 1-\lambda^2 < \mu^2 = \cos^2\vartheta_B \qquad \text{e quindi} \qquad \sin^2\vartheta_A < \sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta_B\right).$$

Dunque $\vartheta_A < \frac{\pi}{2} - \vartheta_B$, ovvero $\vartheta_A + \vartheta_B < \frac{\pi}{2}$ e quindi la tesi. **CVD** □

Concludiamo la sezione con la seguente

6.3 Definizione. Siano A, B, C i tre vertici di un triangolo del piano iperbolico. L'*area* del triangolo ABC è il numero reale

$$A = \frac{\pi - \vartheta_A - \vartheta_B - \vartheta_C}{-K}$$

ove ϑ_A, ϑ_B, ϑ_C, sono le misure degli angoli interni del triangolo.

Lasciamo al lettore interessato lo studio delle analoghe proprietà dei triangoli del piano ellittico e la definizione in tale ambito della misura dell'area di un triangolo.

Sommario del contenuto

I. Vettori nello Spazio Euclideo
Vettori geometrici ... 1
Sottospazi e dipendenza lineare. ... 4
Spazio Affine e Spazio Euclideo ... 7
Prodotto Vettoriale e prodotto misto nello Spazio Euclideo tridimensionale ... 15
Geometria analitica nello spazio tridimensionale ... 19

II. Spazi vettoriali ed applicazioni lineari
Spazi vettoriali. ... 35
Applicazioni lineari e Matrici ... 40
Sistemi di Equazioni lineari. ... 50
Appendice. Spazio Affine, applicazioni affini. ... 57

III. Indipendenza lineare e determinanti
Un test per l'indipendenza lineare: applicazioni multilineari alternanti ... 67
Determinanti e Minori ... 73
Applicazioni e complementi ... 79
Alcune osservazioni sul volume ... 83

IV. Applicazioni bilineari
Applicazioni bilineari simmetriche ed alternanti ... 91
Classificazione ... 97
Isometrie ... 107
Forme hermitiane ... 112
Appendice. Lo spazio vettoriale duale. ... 118

V. Autovalori ed Autovettori
Endomorfismi e matrici simili ... 125
Autovettori generalizzati ... 130
Complementi ... 147

VI. Cenni allo Spazio Proiettivo
Introduzione e definizioni fondamentali ... 157
Sistemi di riferimento ... 161
Spazio proiettivo e spazio affine ... 166
Birapporti e gruppi armonici. ... 172
Complementi ... 178
Collineazioni. Teorema Fondamentale della Geometria Proiettiva ... 187

VII. Coniche e Quadriche
Coniche nel piano proiettivo ... 195
Coniche nel piano affine ... 204
Coniche nel piano euclideo ... 209
Quadriche ... 216
Fuochi di una conica ... 223
Fasci di coniche ... 235

VIII. Cenni alle metriche non–euclidee
Piano ellittico e piano iperbolico ... 247

Un'altra definizione delle metriche non-euclidee 251
Fasci di rette e perpendicolari 253
Isometrie 257
Angolo di parallelismo 260
Triangoli 262

Indice Analitico

Applicazione Bilineare. 83, 114
  dualità canonica. 111
  matrice. 84
Applicazione lineare. 40
  nucleo. 42
  immagine. 42
  matrice. 43
Applicazione lineare trasposta. 114
applicazione proiettiva. applicazione soprastante. . 146
Applicazioni. multilineari. 61
Assoluto dello spazio euclideo. 170
Autovalore. 118
  molteplicità di un autovalore. 119
  nullità di un autovalore. 118
Autovettore. 118
Autovettore generalizzato. 123
  periodo. 123

Baricentro. 8
Base duale. 112
Basi equiorientate. 74

Caratteristica di un corpo. 83
  caratteristica p. 83
  caratteristica 0. 84
Conica 180
  polare di un punto 183
  centro. 188
  coniche a centro. 188
  asse e vertice della parabola. 195
  ellisse. 188
  iperbole. 188
  parabola. 188
  equazione degli assi. 195
  proiettivamente equivalenti. 185
  affinemente equivalenti. 189
  isometriche. 193
Coordinate plückeriane. 148

Determinante. di un endomorfismo. 67
  di una matrice. 68
  di Van der Monde. 75
  Formule di Cramer. 73
  Regola di Laplace (per colonna). 70
  Regola di Laplace (per riga). 64
Dualità canonica. 111
  base duale. 112
Dualità proiettiva. 148

Eliminazione. 52
Endomorfismo. autoaggiunto. 138
Esponenziale di una matrice. 140

Forme quadratiche. 88
  indice di inerzia. 93
  segnatura. 93

Isometria. 99

Matrici 43
  somma e prodotto per scalari. 43
  prodotto di una matrice per una colonna. 44
  prodotto righe per colonne. 46
  diagonalizzabili. 118
  base canonica. 43
  equivalenti. 56
  riga-equivalenti. 56
  congruenti. 89
  simili. 118
  esponenziale di una matrice. 141
  matrice compagna di un polinomio. 132
  matrice trasposta. 56
  matrice di un'applicazione bilineare. 84

Omologia. 152

Polare di un punto rispetto ad una conica. 183
Polinomio caratteristico. 119
Polinomio minimo. 124
Proiettività. 146
Punti ciclici. 170

Quaternioni di Hamilton. 108

Relazioni di Grassmann. 40
Rette isotrope. 170

Sistemi lineari. 50
  riga-equivalenti. 56
Spazio Affine. 7, 58
Spazio Proiettivo. 146
  Assoluto dello spazio euclideo. 170

Collineazioni. 174
dimensione. 146
elemento. 146
Mappe proiettive. 174
punteggiato. 146
rappresentazione parametrica e cartesiana. 149
sistema di riferimento. 150
standard. 146
vuoto proiettivo. 146
Spazio Vettoriale. 35
base. 38
dimensione. 40
spazio vettoriale duale. 111
quoziente. 49
sottospazio. 36
sottospazio generato. 37
sottospazio isotropo. 86
sottospazio ortogonale. 113
somma di sottospazi. 37

Teorema di Binet. 67
Teorema di Hamilton-Cayley. 125
Teorema di Jordan. 127
Teorema di Sylvester. 93

Vettore isotropo. 87
Vettori. linearmente indipendenti. 38