

Omologia simpliciale e superficie reali

In queste note daremo le definizioni dei gruppi di omologia simpliciale ed alcuni esempi di calcolo di tali gruppi per superficie reali. Mostriamo inoltre le relazioni tra tali gruppi e la classificazione delle superficie reali compatte.

Definizione. [simplessi] Nello spazio affine $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$, dati $k + 1$ punti, P_0, \dots, P_k , in posizione generale ($0 \leq k \leq n$), si chiama k -simplesso (o *simplesso di dimensione k*) l'insieme

$$\Delta(P_0, \dots, P_k) = \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i \mid \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\},$$

ovvero l'involuppo convesso dei punti dati. Per $0 \leq r \leq k$, si chiama *faccia r -dimensionale* del simplesso $\Delta(P_0, \dots, P_k)$ ogni r -simplesso, $\Delta(P_{i_0}, \dots, P_{i_r})$, ottenuto prendendo $r + 1$ punti (distinti) $P_{i_0}, \dots, P_{i_r} \in \{P_0, \dots, P_k\}$.

In particolare, le facce 0-dimensionali sono anche dette i *vertici* del simplesso e le facce 1-dimensionali sono anche dette i *lati* del simplesso.

I vertici di un k -simplesso possono essere ordinati in $(k + 1)!$ modi diversi, lasciando invariato l'insieme $\Delta(P_0, \dots, P_k)$. Diremo che due ordinamenti dei vertici sono *concordi* se si ottengono l'uno dall'altro con una permutazione pari (di segnatura 1) dei vertici. Si tratta di una relazione di equivalenza che divide gli ordinamenti dei vertici in due classi distinte, se $k \geq 1$. Chiameremo *simplesso orientato* un simplesso su cui sia stato scelto un ordinamento dei vertici, a meno di equivalenza.

In particolare, dati $k + 1$ punti, P_0, \dots, P_k , con $k \geq 1$, si ha che $\Delta(P_0, P_1, \dots, P_k)$ e $\Delta(P_1, P_0, \dots, P_k)$ sono uguali come simplessi, ma sono distinti come simplessi orientati. Nel seguito scriveremo anche $[P_0 P_1 \dots P_k]$ per indicare il simplesso orientato di vertici P_0, \dots, P_k , nell'ordine. Fissare un ordinamento dei vertici di un simplesso, induce un orientamento su tutte le facce del simplesso prendendo le facce $[P_{i_0} \dots P_{i_r}]$, ove $j \mapsto i_j$ è un'applicazione *crescente* di $\{0, \dots, r\}$ su $\{0, \dots, k\}$ ^(*). Non è però vero che ordinamenti equivalenti sul simplesso inducano ordinamenti equivalenti sulle facce. Ad esempio, $[P_0 P_1 P_2]$ è concorde con $[P_1 P_2 P_0]$, ma il primo ha come faccia $[P_0 P_2]$, mentre il secondo ha $[P_2 P_0]$. Alcuni autori introducono anche il simplesso di dimensione -1 , ovvero l'insieme vuoto, \emptyset . In tal caso, non vi sono facce di dimensione minore e, come già accade per il punto (simplesso di dimensione 0), non vi sono orientamenti distinti.

Definizione. [complesso simpliciale] Un *complesso simpliciale* è un insieme, K , di simplessi (anche di dimensione diversa) con la condizione che qualsiasi coppia di simplessi, σ e τ , di K si intersechi o nell'insieme vuoto o in una faccia comune.

Se un simplesso appartiene a K anche le sue facce sono simplessi di K . La *dimensione* del complesso K è la massima dimensione (se esiste) di un simplesso di K .

Si indica con $|K|$ lo *spazio topologico soggiacente* al complesso K che, come insieme, è l'unione dei simplessi di K .

Vi è ambiguità nell'ultima parte della definizione se non precisiamo quale sia la topologia che si pone su $|K|$. Se i simplessi di K sono tutti contenuti in uno stesso spazio affine, è naturale porre la topologia indotta da quella di $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$. Si parla invece di *realizzazione* dello spazio topologico $|K|$ quando si pone la topologia per cui un sottoinsieme F è chiuso se, e solo se, $F \cap \sigma$ è chiuso in σ per ogni simplesso σ di K . Questa topologia ha senso anche se i simplessi non sono tutti contenuti in uno stesso spazio affine e coincide con la topologia indotta se i simplessi sono tutti contenuti in uno stesso spazio affine e *sono in numero finito*. In generale, però, la topologia della realizzazione è più fine della topologia indotta, come si può vedere dal seguente esempio. Si consideri il complesso $K = \{[n, n + 1] \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \left\{ \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}$, la cui

(*) Se consideriamo il simplesso orientato $[P_{\sigma(0)} \dots P_{\sigma(k)}]$, ove σ è una permutazione su k oggetti, le sue facce saranno i simplessi $[P_{\sigma(i_0)} \dots P_{\sigma(i_r)}]$, ove $j \rightarrow i_j$ è una funzione crescente.

unione è la retta reale $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$, e si osservi che l'insieme $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ è un chiuso nella topologia della realizzazione, ma non lo è nella topologia della retta reale.

Nel seguito ci occuperemo solo di complessi finiti, per cui parleremo di spazio topologico soggiacente senza paura di ambiguità.

Definizione. [triangolazione] Una *triangolazione* di uno spazio topologico, X , è il dato di un complesso simpliciale (finito) K e di un omeomorfismo $|K| \rightarrow X$.

Andiamo ora ad associare ad un complesso degli oggetti algebrici.

Definizione. [catene] Sia K un complesso e G un gruppo abeliano. Una *r-catena* di K a coefficienti in G è una funzione c dall'insieme degli r -simplessi orientati di K a valori in G , tale che, $c(\sigma) = -c(\tau)$ se σ e τ sono due diversi orientamenti dello stesso r -simpleso di K .

Due r -catene, c e c' , si possono sommare, ponendo $(c + c')(\sigma) = c(\sigma) + c'(\sigma)$ per ogni r -simpleso orientato di K . Quindi l'insieme $C_r(K, G)$ delle r -catene di K a coefficienti in G è naturalmente un gruppo abeliano. Porremo inoltre $C_r(K, G) = \{0\}$ se $r < 0$ oppure $r > \dim K$.

In particolare, se il gruppo G è un modulo su un anello A , anche $C_r(K, G)$ ha una struttura naturale di A -modulo. Ci interesserà principalmente il caso in cui $G = A$ e l'anello A è uguale a \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} o, più in generale, ad un campo k , cosicché i gruppi $C_r(K, A)$ sono A -moduli (A -spazi vettoriali se A è un campo). In questo caso, per ogni r -simpleso orientato σ di K , è definita la *catena elementare* $c_\sigma \in C_r(K, A)$

$$c_\sigma(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{se } \tau = \sigma \text{ come simpleso orientato} \\ -1 & \text{se } \tau = \sigma \text{ come simpleso, ma con orientamento discorde.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le catene elementari formano una base di $C_r(K, A)$ come A -modulo libero. Nel seguito, identificheremo il simpleso σ con la catena elementare corrispondente e scriveremo $[P_0 \dots P_r]$ per indicare la r -catena elementare corrispondente all'omonimo simpleso orientato.

Definizione. [operatore di bordo] Sia K un complesso ed A un anello. Si definisce l'*operatore di bordo* $\partial_r : C_r(K, A) \rightarrow C_{r-1}(K, A)$ ponendo

$$\partial_r [P_0 \dots P_r] = \sum_{i=0}^r (-1)^i [P_0 \dots \widehat{P}_i \dots P_r]$$

ove il cappuccio indica che viene omesso il vertice sottostante. L'applicazione ∂_r è ben definita (ovvero dipende solo dall'orientamento dei vertici e non dal particolare ordinamento in cui sono scritti) e si estende per linearità ad un omomorfismo di A -moduli. Si pone inoltre ∂_r identicamente uguale a 0 se $r \leq 0$, oppure $r > \dim K$.

Proposizione. Sia K un complesso ed A un anello ed indichiamo con $\partial_r : C_r(K, A) \rightarrow C_{r-1}(K, A)$ l'operatore di bordo per ogni intero r . Allora si ha $\partial_{r-1} \circ \partial_r = 0$.

dim. La tesi è banalmente vera se $r \leq 1$ o $r > \dim K$. Inoltre, è sufficiente verificare che la condizione vale sulle catene elementari, che formano una base di $C_r(K, A)$. In tal caso, si ha

$$\begin{aligned} \partial_{r-1}(\partial_r [P_0 \dots P_r]) &= \sum_{i=0}^r (-1)^i \partial_{r-1} [P_0 \dots \widehat{P}_i \dots P_r] = \\ &= \sum_{i=0}^r (-1)^i \sum_{j < i} (-1)^j [P_0 \dots \widehat{P}_j \dots \widehat{P}_i \dots P_r] + \sum_{i=0}^r (-1)^i \sum_{j > i} (-1)^{j-1} [P_0 \dots \widehat{P}_i \dots \widehat{P}_j \dots P_r] = 0 \end{aligned}$$

In quanto i termini della seconda sommatoria cancellano quelli della prima. **CVD** □

Definizione. [cicli, bordi, omologia] Sia K un complesso ed A un anello. Si chiamano r -cicli (a coefficienti in A) gli elementi $Z_r(K, A) = \ker \partial_r$. Si chiamano r -bordi (a coefficienti in A) gli elementi $B_r(K, A) = \text{im } \partial_{r+1}$. In particolare si ha $B_r(K, A) \subseteq Z_r(K, A)$ e si chiama r -esimo gruppo di omologia di K a coefficienti in A il quoziente

$$H_r(K, A) = \frac{Z_r(K, A)}{B_r(K, A)}.$$

Quando $A = \mathbb{Z}$ il gruppo di omologia $H_r(K, \mathbb{Z})$ è quoziente di due moduli liberi finitamente generati (ricordiamo che supponiamo di lavorare con complessi finiti), quindi sarà uno \mathbb{Z} -modulo finitamente generato, ovvero somma diretta di un modulo libero, \mathbb{Z}^k , e di un numero finito di moduli del tipo $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$, per opportuni interi positivi n_i . L'intero k è il rango del gruppo abeliano $H_r(K, \mathbb{Z})$ ed è detto l' r -esimo numero di Betti del complesso K . Gli interi n_i sono detti i coefficienti di r -torsione del complesso K .

Definizione. Si chiama *caratteristica di Eulero-Poincaré* del complesso (finito) K l'intero

$$\chi(K) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \text{rk } H_n(K, \mathbb{Z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \dim H_n(K, \mathbb{Q}).$$

Abbiamo quindi visto come, dato un complesso simpliciale, K , ed un anello A , si costruiscano gli A -moduli $C_r(K, A)$ e gli omomorfismi $\partial_r : C_r(K, A) \rightarrow C_{r-1}(K, A)$, tali che $\partial_{r-1} \circ \partial_r = 0$ per ogni intero r . Da questi si ottengono i gruppi di omologia come quoziente del nucleo di ∂_r sull'immagine di ∂_{r+1} . In generale si chiama *complesso di A -moduli* (C_\bullet, d_\bullet) una collezione di A -moduli, C_n ($n \in \mathbb{Z}$), e di omomorfismi $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$, tali che $d_n \circ d_{n+1} = 0$ per ogni indice n . Si definisce l'*omologia* del complesso C come la collezione degli A -moduli $H_n(C_\bullet) = \frac{\ker d_n}{\text{im } d_{n+1}}$.

Definizione. [omologia relativa] Siano K un complesso ed A un anello e sia fissato un sottocomplesso F di K . Allora, si ha $C_r(F, A) \subseteq C_r(K, A)$ per ogni intero r , per cui ha senso considerare i quozienti $C_r = \frac{C_r(K, A)}{C_r(F, A)}$. L'operatore di bordo relativo a K induce un omomorfismo $d_r : C_r \rightarrow C_{r-1}$ che rende la famiglia (C_\bullet, d_\bullet) un complesso di A -moduli. L'omologia di questo complesso è anche detta l'*omologia di K relativa a F* , a coefficienti in A , e si indica con $H_r(K, F, A)$ l' r -esimo gruppo di omologia del complesso (C_\bullet, d_\bullet) .

Abbiamo tutte le definizioni necessarie per poter dare qualche esempio di gruppi di omologia associati a triangolazioni di superficie reali. Vediamo dapprima qualche fatto generale.

Proposizione. Sia K un complesso simpliciale finito. Lo spazio topologico $|K|$ è connesso per archi se, e solo se, presi comunque due vertici, P e Q , esiste una sequenza di vertici P_0, \dots, P_r di K tale che $P_0 = P$, $P_r = Q$ e, per ogni $i = 1, \dots, r$, $[P_{i-1}P_i]$ è un lato (1-faccia) di K .

dim. La condizione è chiaramente sufficiente, perché posso congiungere con un segmento di retta ogni punto di un semplice con uno dei vertici del semplice stesso. Dunque, se vale la condizione in ipotesi, dati due punti qualsiasi di $|K|$ posso congiungerli con una sequenza di segmenti e quindi con una curva continua.

Viceversa, se $|K|$ è connesso per archi, dati due vertici P e Q , esiste una curva che li congiunge ed è tutta contenuta in $|K|$. Se i due vertici appartengono allo stesso semplice, Δ_0 , c'è un lato del semplice che li congiunge ed abbiamo finito. Altrimenti la curva uscirà verso un altro semplice, Δ_1 , attraversando la faccia comune. Sia quindi $P_0 = P$ e P_1 un vertice della faccia attraversata. Se Q appartiene a Δ_1 , abbiamo finito; altrimenti la curva uscirà dal semplice per andare verso un altro semplice, $\Delta_2 \notin \{\Delta_0, \Delta_1\}$, attraversando la faccia comune. Si fissa un punto P_2 di questa faccia e si prosegue analogamente. Dopo un numero finito di passi si arriva al semplice che contiene Q , perché K è un complesso finito. **CVD** \square

Corollario. Sia K un complesso simpliciale finito. Lo spazio topologico $|K|$ è connesso per archi se, e solo se, $H_0(K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Più in generale, $H_0(K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^r$ ove r è il numero di componenti connesse di $|K|$.

dim. Sia $|K|$ connesso per archi e consideriamo l'applicazione $\partial_1 : C_1(K, \mathbb{Z}) \rightarrow C_0(K, \mathbb{Z})$. Fissato un vertice P_0 di K , preso comunque un altro vertice, Q , esiste una sequenza di vertici P_0, \dots, P_r di K tale che $P_r = Q$

e, per ogni $i = 1, \dots, r$, $[P_{i-1}P_i]$ è in $C_1(K, \mathbb{Z})$. Allora $[Q] - [P_0] = \partial_1([P_0P_1] + [P_1P_2] + \dots + [P_{r-1}P_r]) \in B_0 = \text{im } \partial_1$. Dunque $C_0 = \langle [P_0] \rangle \oplus B_0$ e quindi $H_0(K, \mathbb{Z}) = C_0/B_0 \cong \langle [P_0] \rangle$.

Se K non è connesso per archi, sia P_1 un suo vertice e sia K_1 il sottocomplesso di K che ha come vertici i vertici di K “raggiungibili” a partire da P_1 , camminando lungo lati di K . Per la Proposizione precedente, $|K_1|$ è connesso per archi e, se prendiamo un vertice, P_2 , di K che non stia in K_1 , nessuno dei semplici che lo contiene può avere intersezione non vuota con un semplice di K_1 (altrimenti potrei raggiungere P_2 partendo da P_1 e camminando lungo lati di semplici di K). Quindi, considero il sottocomplesso K_2 che ha come vertici i vertici di K “raggiungibili” a partire da P_2 camminando lungo lati di K . Dopo un numero finito di passi, ho decomposto il complesso K nell’unione disgiunta di un numero finito di sottocomplessi, K_1, \dots, K_r , connessi per archi e a due a due disgiunti che danno quindi le componenti connesse di $|K|$. È evidente che $C_i(K, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{j=1}^r C_i(K_j, \mathbb{Z})$ per ogni i e che gli operatori di bordo sono la somma diretta degli

operatori di bordo dei singoli sottocomplessi. In particolare si ha $H_0(K, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{j=1}^r H_0(K_j, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^r$. **CVD**

□

Esercizio. Sia A un qualsiasi anello (commutativo con unità), cosa sarebbe cambiato nel corollario precedente, considerando $H_0(K, A)$ in luogo di $H_0(K, \mathbb{Z})$? □

Osserviamo quindi che per ogni complesso finito, K , $B_0(K, \mathbb{Z})$ è uno \mathbb{Z} -modulo libero finitamente generato e, dalla sequenza esatta di \mathbb{Z} -moduli $0 \rightarrow Z_1(K, \mathbb{Z}) \rightarrow C_1(K, \mathbb{Z}) \rightarrow B_0(K, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$, si conclude che $Z_1(K, \mathbb{Z})$ è addendo diretto di $C_1(K, \mathbb{Z})$. Dunque, $C_1/B_1 \cong F \oplus Z_1/B_1$ per un opportuno modulo libero F e ciò significa che le componenti di torsione di $H_1(K, \mathbb{Z}) = Z_1/B_1$ sono determinate dai fattori invarianti non nulli dell’omomorfismo $\partial_2 : C_2(K, \mathbb{Z}) \rightarrow C_1(K, \mathbb{Z})$. Più in generale, $Z_i(K, \mathbb{Z})$ è addendo diretto di $C_i(K, \mathbb{Z})$, per ogni indice i . Ciò significa che per un complesso di dimensione n , $H_n(K, \mathbb{Z}) = Z_n(K, \mathbb{Z})$ è uno \mathbb{Z} -modulo libero.

Faremo alcune ulteriori ipotesi per caratterizzare i complessi che ci interessano nel seguito (non sono certo che questa nomenclatura sia universalmente accettata)

Definizione. [dimensione pura] Diremo che un complesso K ha *puramente dimensione* $n > 0$ se ogni semplice di K è faccia di almeno un semplice di dimensione n di K .

Definizione. [complesso poliedrale] Diremo che un complesso K , puramente di dimensione $n > 0$, è *poliedrale* se ogni semplice $n - 1$ -dimensionale di K è faccia di al più due semplici di dimensione n di K . Inoltre, se due semplici n -dimensionali, E, F , hanno in comune una faccia di dimensione minore di $n - 1$, esiste una sequenza finita di semplici n -dimensionali $E = F_0, \dots, F_r = F$ tali che per ogni $i = 1, \dots, r$ F_i ed F_{i-1} abbiano in comune una faccia $(n - 1)$ -dimensionale (contenente la faccia comune ad E ed F). Chiameremo *bordo* del complesso poliedrale K il sottocomplesso formato dalle facce $n - 1$ -dimensionali che sono faccia di un unico semplice di dimensione n .

Definizione. [complesso orientabile] Sia K un complesso finito, poliedrale, puramente di dimensione n e senza bordo. Diremo che K è *orientabile* se è possibile fissare un orientamento sui semplici n -dimensionali di K in modo che ogni semplice di dimensione $n - 1$, che è faccia di esattamente due semplici, riceva orientamenti opposti dall’operatore di bordo.

Come esempio, possiamo considerare la superficie del tetraedro, di vertici P_0, P_1, P_2, P_3 , che è un complesso poliedrale puramente di dimensione 2. Possiamo identificare le sue facce 2-dimensionali con i semplici orientati $[P_0P_2P_1]$, $[P_0P_1P_3]$, $[P_0P_3P_2]$, $[P_1P_2P_3]$. Si ha, ad esempio,

$$\partial_2([P_0P_2P_1]) = [P_0P_2] - [P_0P_1] + [P_2P_1] \quad \text{e} \quad \partial_2([P_0P_1P_3]) = [P_0P_1] - [P_0P_3] + [P_1P_3]$$

e il semplice di vertici P_0, P_1 , che è la faccia comune dei due semplici dati ha segni opposti nei due casi. Si potrebbe verificare che ciò accade per tutte le facce 1-dimensionali e quindi che si tratta di un complesso orientabile.

Proposizione. Sia K un complesso finito, poliedrale, puramente di dimensione n , senza bordo. Allora K è orientabile se, e solo se, $H_n(K, \mathbb{Z}) \neq 0$.

dim. Se $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ sono i semplici n -dimensionali di K , allora $\partial_n(\sigma_1 + \dots + \sigma_k)$ è la somma di termini $m_j \tau_j$, ove τ_j varia tra tutti i semplici di dimensione $n-1$ ed i coefficienti m_j sono uguali a 0, -2 o 2 , a seconda che gli orientamenti indotti dall'operatore di bordo sulle facce $n-1$ dimensionali siano tra loro opposti, oppure entrambi discordi o entrambi concordi con l'orientamento fissato su tali semplici. Il complesso è orientabile se, e solo se è possibile fissare un orientamento sui semplici n -dimensionali di K in modo che ogni semplice di dimensione $n-1$ riceva orientamenti opposti dall'operatore di bordo, il che significa esattamente che esiste una scelta di segni $h_i \in \{\pm 1\}$, $i = 1, \dots, k$, tale che $\partial_n(h_1 \sigma_1 + \dots + h_k \sigma_k) = 0$. **CVD** \square

Esercizio. Nella Proposizione precedente, si potrebbe considerare l'omologia a coefficienti in un anello A , al posto dell'omologia intera? \square

Definizione. [superficie reale compatta] Chiameremo *superficie reale compatta* ogni spazio topologico di Hausdorff, X , che sia omeomorfo a $|K|$, ove K è un complesso finito, poliedrale, puramente di dimensione 2.

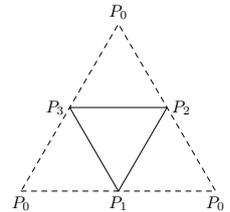
Si potrebbe dimostrare (ma non è facile) che sono superficie reali compatte le varietà differenziabili reali compatte di dimensione 2 o le curve algebriche in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ o le varietà analitiche complesse di dimensione 1 su \mathbb{C} .

Data una superficie reale compatta, X , l'omologia della superficie (a coefficienti in A) è l'omologia di una triangolazione (poliedrale) della superficie e scriveremo $H_i(X, \mathbb{Z})$ per indicare l'omologia intera, tralasciando di indicare la triangolazione. Diremo che la superficie è connessa se $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ e per una superficie senza bordo, diremo che è orientabile se $H_2(X, \mathbb{Z}) \neq 0$ (e quindi $H_2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, perché?).

Se una superficie, X , ha bordo (ad esempio, il disco, il cilindro, ...), alcuni lati di semplici di una triangolazione di X formano una triangolazione del bordo, ∂X . Diremo che la superficie X è *orientabile* se $H_2(X, \partial X, \mathbb{Z}) \neq 0$, cioè se è non nulla la coomologia relativa (non diamo una giustificazione "geometrica" di tale definizione; il lettore è invitato a cercarne una).

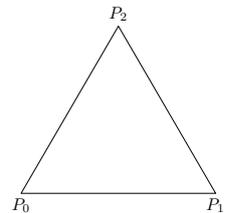
Sfera. Una triangolazione della (superficie di una) sfera, S , è data dal tetraedro (cavo) e può quindi essere rappresentata nel disegno qui a fianco, dove i lati omonimi, rappresentati con linee tratteggiate, vanno identificati. Le catene sono quindi generate dalle catene elementari, ovvero $C_2 = \langle [012], [013], [023], [123] \rangle$, $C_1 = \langle [01], [02], [03], [12], [13], [23] \rangle$, $C_0 = \langle [0], [1], [2], [3] \rangle$ (ove scriviamo $[ij]$ in luogo di $[P_i P_j]$, ecc.). Gli operatori di bordo, rispetto alle basi date hanno matrici

$$\partial_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \partial_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



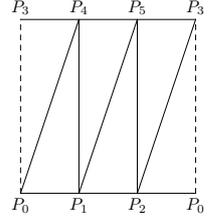
entrambo le matrici hanno rango 3 (ed i fattori invarianti non nulli uguali ad 1); quindi $H_2(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_1(S, \mathbb{Z}) = 0$ e $H_0(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ che ci dicono che la sfera è una superficie, connessa e orientabile e che ha caratteristica di Eulero 2.

Disco. Una triangolazione del disco, D , è data da un triangolo. Le catene sono generate dalle catene elementari, ovvero $C_2 = \langle [012] \rangle$, $C_1 = \langle [01], [02], [12] \rangle$, $C_0 = \langle [0], [1], [2] \rangle$, e gli operatori di bordo, rispetto alle basi date hanno matrici $\partial_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, e $\partial_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, che hanno rango 1 e 2, rispettivamente (ed i fattori invarianti non nulli uguali ad 1); quindi $H_2(D, \mathbb{Z}) = 0$, $H_1(D, \mathbb{Z}) = 0$ e $H_0(D, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ che ci dicono che il disco è una superficie, connessa ed ha caratteristica di Eulero 1. Per vedere se è orientabile dobbiamo considerare la triangolazione del bordo del disco, ovvero il sottocomplesso $D_0 = C_0 = \langle [0], [1], [2] \rangle$, $D_1 = C_1 = \langle [01], [02], [12] \rangle$ e, ovviamente, $D_2 = 0$. Si ha perciò $C_2/D_2 = C_2 = \langle [012] \rangle$ e $C_1/D_1 = 0$, per cui $H_2(D, \partial D, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ e quindi il disco è una superficie orientabile (come ben ci si doveva aspettare).



Cilindro. Possiamo ottenere il cilindro identificando due lati opposti di un rettangolo. Quindi una triangolazione del cilindro, C , è data nella figura a fianco, dove i lati tratteggiati vengono identificati e, come nel caso della sfera, si è usato lo stesso nome per gli estremi che si identificano. Le catene sono generate dalle catene elementari, ovvero

$$\begin{aligned} C_2 &= \langle [014], [023], [034], [125], [145], [235] \rangle, \\ C_1 &= \langle [01], [02], [03], [04], [12], [14], [15], [23], [25], [34], [35], [45] \rangle, \\ C_0 &= \langle [0], [1], [2], [3], [4], [5] \rangle, \end{aligned}$$



e gli operatori di bordo, rispetto alle basi date hanno matrici (di dimensioni già considerevoli)

$$\partial_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \partial_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

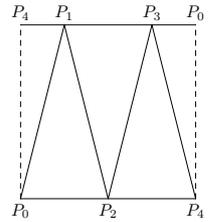
che hanno rango 6 e 5, rispettivamente (ed i fattori invarianti non nulli uguali ad 1); quindi $H_2(C, \mathbb{Z}) = 0$, $H_1(C, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ e $H_0(C, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ che ci dicono che il cilindro è una superficie, connessa ed ha caratteristica di Eulero 0. Per vedere se è orientabile dobbiamo considerare la triangolazione del bordo del cilindro, ovvero il sottocomplesso $D_0 = C_0$ e $D_1 = \langle [01], [02], [12], [34], [35], [45] \rangle$. Si ha quindi $C_2/D_2 = C_2$ e $C_1/D_1 = \langle [04], [12], [14], [15], [23], [25] \rangle$, per cui l'operatore di bordo $\bar{\partial}: C_2/D_2 \rightarrow C_1/D_1$ ha matrice

$$\bar{\partial} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

da cui si deduce che $H_2(C, \partial C, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, ed anche il cilindro è una superficie orientabile. Si può facilmente osservare che il cilindro è omeomorfo alla corona circolare e quindi possiamo applicare i risultati anche a questa superficie. Il lettore può facilmente verificare che il complesso di catene associato al bordo del cilindro è proprio la somma diretta di due copie del complesso associato al cerchio (bordo del disco), come si può intuire dal suo aspetto geometrico.

Nastro di Möbius. Possiamo ottenere anche il nastro di Möbius identificando due lati opposti di un rettangolo, ma invertendo l'orientamento dei lati che si identificano. Quindi una triangolazione del nastro di Möbius, M , è data nella figura a fianco, dove i lati tratteggiati vengono identificati e si è usato lo stesso nome per gli estremi che si identificano. Le catene sono generate dalle catene elementari, ovvero

$$\begin{aligned} C_2 &= \langle [012], [014], [034], [123], [234] \rangle, \\ C_1 &= \langle [01], [02], [03], [04], [12], [13], [14], [23], [24], [34] \rangle, \\ C_0 &= \langle [0], [1], [2], [3], [4] \rangle, \end{aligned}$$



e gli operatori di bordo, rispetto alle basi date hanno matrici (di dimensioni già considerevoli)

$$\partial_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \partial_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

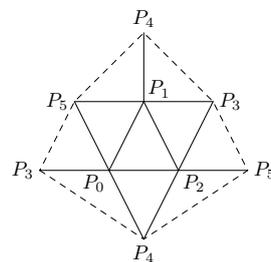
che hanno rango 5 e 4, rispettivamente (ed i fattori invarianti non nulli uguali ad 1); quindi $H_2(M, \mathbb{Z}) = 0$, $H_1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ e $H_0(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ che ci dicono che il nastro di Möbius è una superficie, connessa ed ha caratteristica di Eulero 0. Per vedere se è orientabile dobbiamo considerare la triangolazione del bordo, ovvero il sottocomplesso $D_0 = C_0$ e $D_1 = \langle [02], [03], [13], [14], [24] \rangle$. Si ha quindi $C_2/D_2 = C_2$ e $C_1/D_1 = \langle [01], [04], [12], [23], [34] \rangle$, per cui l'operatore di bordo $\bar{\partial} : C_2/D_2 \rightarrow C_1/D_1$ ha matrice

$$\bar{\partial} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

di rango 5, da cui si deduce che $H_2(M, \partial M, \mathbb{Z}) = 0$, ed il nastro di Möbius non è orientabile (come ben ci si doveva aspettare). Il lettore può facilmente verificare che il complesso di catene associato al bordo del nastro di Möbius ha la stessa omologia del complesso associato al bordo del disco ed infatti il bordo del nastro di Möbius è omeomorfo ad un cerchio.

Piano proiettivo reale. Una triangolazione del Piano proiettivo reale, P , è data nella figura qui sotto, dove i lati tratteggiati vengono identificati e si è usato lo stesso nome per gli estremi che si identificano (...si potrebbe trovare una triangolazione con un numero minore di elementi?). Le catene sono generate dalle catene elementari, ovvero

$$\begin{aligned} C_2 &= \langle [012], [015], [024], [034], [035], [123], [134], [145], [235], [245] \rangle, \\ C_1 &= \langle [01], [02], [03], [04], [05], [12], [13], [14], [15], [23], [24], [25], [34], [35], [45] \rangle, \\ C_0 &= \langle [0], [1], [2], [3], [4], [5] \rangle, \end{aligned}$$



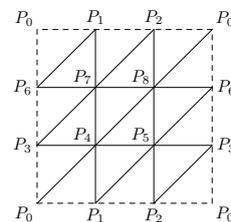
di ranghi 10, 15 e 6, rispettivamente; e gli operatori di bordo hanno matrici

$$\partial_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \partial_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

che hanno rango 10 e 5, rispettivamente^(*) (tutti i fattori invarianti non nulli di ∂_1 uguali ad 1, mentre uno dei fattori invarianti di ∂_2 è uguale a 2); quindi $H_2(P, \mathbb{Z}) = 0$, $H_1(P, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $H_0(P, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ che ci dicono che il piano proiettivo reale è una superficie non-orientabile, connessa con caratteristica di Eulero 1.

Toro. Si ottiene il toro identificando a due a due i lati opposti di un rettangolo. Una triangolazione del toro, T , è data nella figura a fianco, dove i lati tratteggiati vengono identificati e si è usato lo stesso nome per gli estremi che si identificano (...forse si potrebbe trovare una triangolazione con un numero minore di elementi). Le catene sono generate dalle catene elementari, ovvero

$$\begin{aligned} C_2 &= \langle [014], [016], [023], [028], [034], [068], [125], [127], [145], \\ &\quad [167], [235], [278], [347], [356], [367], [458], [478], [568] \rangle, \\ C_1 &= \langle [01], [02], [03], [04], [06], [08], [12], [14], [15], [16], [17], [23], [25], [27], \\ &\quad [28], [34], [35], [36], [37], [45], [47], [48], [56], [58], [67], [68], [78] \rangle, \\ C_0 &= \langle [0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8] \rangle, \end{aligned}$$



^(*) Per verificare il rango di ∂_2 , si possono considerare, nell'ordine, le righe $r_1, r_9, r_{11}, r_{13}, r_{14}, r_7, r_8, r_{15}, r_{12}$ e $r_2 + r_1 - r_9 - r_{11} - r_{15} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2)$.

A questo punto, risultano evidenti alcuni limiti di questa tecnica: triangolazioni di superficie producono moduli di catene di rango elevato e quindi matrici non facili da manipolare (quanto meno facendolo “a mano”); non è evidente il motivo per cui triangolazioni diverse di una stessa superficie debbano produrre gruppi di omologia uguali; non è ugualmente evidente come si possa associare ad un morfismo tra superficie degli omomorfismi tra i corrispondenti gruppi di omologia.

Alla prima domanda si può provare a rispondere osservando che, per quanto riguarda le superficie, le tecniche si possono semplificare. Se consideriamo solo superficie connesse (per archi), si ha $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$; inoltre, se si tratta di superficie senza bordo, si ha $H_2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ oppure $H_2(X, \mathbb{Z}) = 0$ a seconda che la superficie sia orientabile oppure no. Quindi l'unico elemento distintivo è il rango (e l'eventuale torsione) di $H_1(X, \mathbb{Z})$. D'ora in poi restringiamo il nostro interesse alle superficie reali compatte, connesse e senza bordo, e definiamo un invariante da associare a queste superficie.

Definizione. [genere topologico] Sia X una superficie reale, compatta, connessa e senza bordo. Il genere di X è l'intero $g = g(X)$ definito dalle seguenti identità

$$\begin{aligned}\chi(X) &= 2 - \text{rk } H_1(X, \mathbb{Z}) = 2 - 2g \quad \text{se } X \text{ è orientabile} \\ \chi(X) &= 1 - \text{rk } H_1(X, \mathbb{Z}) = 2 - g \quad \text{se } X \text{ non è orientabile}\end{aligned}$$

ove $\chi(X)$ è la caratteristica di Eulero-Poincaré della superficie (ovvero di una sua triangolazione).

Quindi, tra le superficie orientabili, la sfera ha genere 0 ed il toro ha genere 1; mentre, tra le non orientabili, il piano proiettivo reale ha genere 1 e la bottiglia di Klein ha genere 2^(*). Il calcolo della caratteristica di Eulero-Poincaré di un complesso è molto più semplice del calcolo dei vari gruppi di omologia, anche grazie alla seguente osservazione

Proposizione. Sia $C_\bullet = 0 \rightarrow C_r \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \rightarrow 0$ un complesso finito di spazi vettoriali. La caratteristica di Eulero-Poincaré di C_\bullet è uguale a $\sum_{i=0}^r (-1)^i \dim C_i$.

dim. In base alla definizione e ad un ben noto risultato di algebra lineare, si ha

$$\begin{aligned}\chi(C_\bullet) &= (-1)^r \dim \ker \partial_r + (-1)^{r-1} \dim \frac{\ker \partial_{r-1}}{\text{im } \partial_r} + \dots + \dim \frac{C_0}{\text{im } \partial_1} \\ &= (-1)^r (\dim \ker \partial_r + \dim \text{im } \partial_r) + (-1)^{r-1} (\dim \ker \partial_{r-1} + \dim \text{im } \partial_{r-1}) + \dots + \dim C_0 \\ &= (-1)^r \dim C_r + (-1)^{r-1} \dim C_{r-1} + \dots + \dim C_0.\end{aligned}$$

CVD

□

Quindi la caratteristica di Eulero-Poincaré di una superficie si può ottenere conoscendo solamente i ranghi dei moduli di catene, ovvero

$$\chi(X) = \text{rk } C_2(X, \mathbb{Z}) - \text{rk } C_1(X, \mathbb{Z}) + \text{rk } C_0(X, \mathbb{Z}) = f - e + v$$

ove f è il numero di facce nella triangolazione di X , e è il numero di lati nella triangolazione di X e v è il numero di vertici nella triangolazione di X ; che è la formula originaria di Eulero.

Il teorema fondamentale per la classificazione delle superficie è il seguente (cf. Theorem 5.1, p.10 di William S. Massey, *Algebraic Topology: an introduction*, GTM56, Springer 1984)

Teorema. [classificazione delle superficie] Ogni superficie reale compatta, connessa e senza bordo è omeomorfa o ad una sfera o ad una somma connessa di tori o ad una somma connessa di piani proiettivi reali.

Cominciamo con il definire la somma connessa di due superficie e a vedere come si possa calcolarne la caratteristica di Eulero-Poincaré.

(*) Si potrebbe definire il genere anche per le superficie con bordo ponendo uguale al genere della superficie che si ottiene incollando un disco su ogni componente connessa del bordo. Ad esempio, attaccando un disco su ciascuno dei bordi del cilindro si ottiene una sfera, mentre attaccando un disco sul bordo del nastro di Möbius si ottiene un piano proiettivo.

Definizione. [somma connessa] La somma connessa, $K_1 \# K_2$, di due complessi poliedrali, K_1 e K_2 , puramente di dimensione 2, si fa togliendo a ciascun complesso una faccia triangolare e fissando un'identificazione dei lati e dei vertici dei due bordi triangolari delle facce eliminate.

Il complesso $K_1 \# K_2$ ha le facce (bidimensionali) dei due complessi originari; i lati (ovvero semplici 1-dimensionali) dei due complessi originari, ma con tre lati del primo complesso identificati ordinatamente con tre del secondo; lo stesso accade per i vertici. Quindi, indicati con f_i, l_i e v_i , per $i = 1, 2$, le facce, i lati ed i vertici, rispettivamente, dei due complessi e con f, l e v , le facce, i lati ed i vertici della somma connessa, $K_1 \# K_2$, si ha

$$f = f_1 + f_2 - 2 \quad l = l_1 + l_2 - 3 \quad v = v_1 + v_2 - 3.$$

Dunque la relazione tra le caratteristiche di Eulero-Poincaré dei complessi è

$$\chi(K_1 \# K_2) = \chi(K_1) + \chi(K_2) - 2.$$

Risulta evidente che, se i due complessi sono connessi, lo stesso vale per la somma connessa e si potrebbe dimostrare che se entrambi i complessi sono orientabili, lo stesso vale per la somma connessa. Invece, se almeno uno dei due non è orientabile, allora tale è la somma connessa. Dunque, passando dalla caratteristica di Eulero-Poincaré al genere, possiamo dire che, date due superficie compatte e connesse, X_1 e X_2 , entrambi orientabili oppure non orientabili, si ha $g(X_1 \# X_2) = g(X_1) + g(X_2)$.

Torniamo ora al problema di una definizione più generale dell'omologia che associ ai morfismi tra le varietà dei morfismi tra i corrispondenti gruppi di omologia. La definizione sembra molto più generale dell'omologia simpliciale, ma quando si possono applicare entrambi, i gruppi che si ottengono coincidono.

Definizione. [omologia singolare] Sia X uno spazio topologico. Un n -simplello singolare in X è un'applicazione continua $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ ove $\Delta_n = [P_0 \cdots P_n]$ è un simplello n -dimensionale orientato nello spazio affine reale. Dato un anello A , si indica con $C_n(X, A)$ l' A -modulo libero generato dagli n -simplelli singolari di X e si chiamano n -catene singolari a coefficienti in A i suoi elementi. Si ha un operatore di bordo $\partial_n : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$ definito da

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{|[P_0 \cdots \widehat{P}_i \cdots P_n]}$$

ove σ è n -simplello singolare definito sul simplello $[P_0 \cdots P_n]$. Si può verificare che si ha $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ per ogni n (esercizio!) e si definiscono i cicli singolari $Z_n(X, A) = \ker \partial_n$ ed i bordi singolari, $B_n(X, A) = \text{im } \partial_{n+1}$. L' n -esimo gruppo di omologia singolare di X a coefficienti in A è

$$H_n(X, A) = \frac{Z_n(X, A)}{B_n(X, A)}.$$

È evidente dalla definizione che, data un'applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ tra spazi topologici, ad ogni simplello singolare, $\sigma : \Delta \rightarrow X$, si può associare il simplello singolare $f \circ \sigma : \Delta \rightarrow Y$ e quindi un omomorfismo di A -moduli $c_n(f) : C_n(X, A) \rightarrow C_n(Y, A)$ che commuta con l'operatore di bordo, ovvero $\partial_n^Y \circ c_n(f) = c_{n-1}(f) \circ \partial_n^X$. Resta quindi indotto un omomorfismo di A -moduli $H_n(f) : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, A)$. In particolare, se f è un omeomorfismo $c_n(f)$ (e quindi $H_n(f)$) è un isomorfismo per ogni indice n . Si potrebbe dimostrare che spazi omotopicamente equivalenti hanno gruppi di omologia isomorfi^(*) (cf. ad es. il Teorema 2.10 in Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge Univ Press). Non dimostreremo l'equivalenza tra l'omologia singolare e l'omologia simpliciale, rimandando al testo di Hatcher lo studente interessato. Ci limitiamo ad alcune facili conseguenze delle definizioni.

(*) Due applicazioni continue $f, g : X \rightarrow Y$ sono omotope se esiste un'applicazione continua $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che, per ogni $x \in X$, si abbia $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$. In tal caso, scriveremo $f \simeq g$. Un'applicazione continua $f : X \rightarrow Y$ è un'equivalenza omotopica se esiste un'applicazione continua $g : Y \rightarrow X$ tali che $g \circ f \simeq \text{id}_Y$ e $f \circ g \simeq \text{id}_X$. In tal caso, i due spazi X ed Y si diranno omotopicamente equivalenti

Proposizione. Sia X uno spazio topologico non vuoto.

(a) Se X è connesso per archi allora $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

(b) Se $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ è la decomposizione di X come unione delle sue componenti connesse per archi, allora

$$H_n(X, A) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} H_n(X_\alpha, A)$$

(c) Se X è un punto, allora $H_n(X, \mathbb{Z}) = 0$ per ogni $n > 0$ e $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

dim. (a) $C_0(X, \mathbb{Z})$ è il gruppo abeliano libero generato dalle applicazioni $\sigma : [P] \rightarrow X$ e consideriamo l'omomorfismo (suriiettivo) $\rho : C_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ definito da $\rho(\sum_j n_j \sigma_j) = \sum_j n_j$. Per ogni 1-simplesso $\tau : [P_0 P_1] \rightarrow X$ si ha $\rho(\partial_1(\tau)) = \rho(\tau(P_1) - \tau(P_0)) = 1 - 1 = 0$; quindi $\text{im } \partial_1 \subseteq \ker \rho$. Per vedere l'inclusione inversa, sia $\sigma = \sum_i n_i \sigma_i \in C_0$, con $\sum_i n_i = 0$. Fissato un arbitrario punto base X_0 in X , essendo X connesso per archi, esiste un cammino continuo $\tau_i : [P_0 P_1] \rightarrow X$ con $\tau_i(P_0) = X_0$ e $\tau_i(P_1) = \sigma_i(P)$ e quindi, posto $\tau = \sum_i n_i \tau_i$, si ha $\partial_1(\tau) = \sum_i n_i \sigma_i - \sum_i n_i X_0 = \sigma$.

(b) I simplessi dello spazio affine sono connessi per archi e quindi le loro immagini continue sono contenute all'interno delle componenti connesse di X . Il complesso di catene (ed i relativi operatori di bordo) si spezza perciò nella somma diretta dei complessi di catene relativi alle singole componenti connesse.

(c) Se X si riduce ad un unico punto, per ogni intero n esiste un unico simplesso singolare σ_n e quindi $C_n(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ per ogni $n \geq 0$ e $\partial_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{n-1}$, che è uguale a σ_{n-1} se n è pari, mentre è uguale a

0 se n è dispari. Il complesso di catene è quindi uguale a $\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$, ove l'identità parte dalle catene di grado pari e l'omomorfismo nullo da quelle di grado dispari. Dunque, tutti i gruppi di omologia sono triviali eccetto al grado 0. **CVD** \square

Il teorema di classificazione delle superficie reali compatte

Riportiamo qui una dimostrazione del Teorema di classificazione delle superficie citato in precedenza, seguendo il capitolo I del libro di W. Massey citato. Nel testo citato, una superficie (reale) è uno spazio topologico di Hausdorff, connesso, in cui ogni punto ha un intorno omeomorfo ad un disco di \mathbb{R}^2 e quindi sono escluse le superficie con bordo. Il teorema citato da una classificazione delle superficie reali compatte. Si potrebbe dimostrare che ogni superficie compatta è triangolabile^(*) e la sua triangolazione è un complesso poliedrale finito di dimensione pura 2. In questa sezione, quando parleremo di superficie reale compatta (e connessa), supporremo quindi di avere uno spazio topologico di Hausdorff, omeomorfo ad un complesso poliedrale finito, di dimensione pura 2 e soddisfacente alle due seguenti condizioni

- (i) ogni lato è faccia di esattamente due triangoli;
- (ii) Se P è un vertice della triangolazione, i triangoli che hanno P come vertice possono essere posti in ordine $F_0, \dots, F_r = F_0$ in modo che F_i abbia un lato in comune (contenente P) con F_{i+1} per ogni $i = 0, \dots, r$.

Il nostro obiettivo è quindi la dimostrazione del seguente

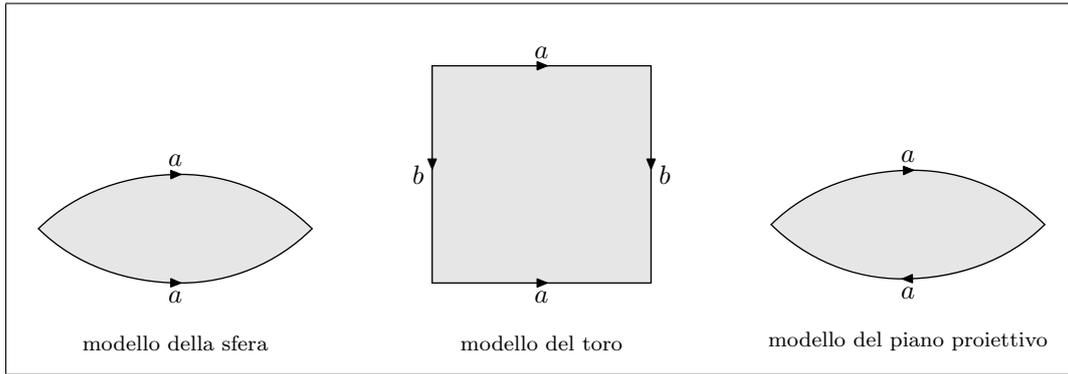
Teorema. [classificazione delle superficie] Ogni superficie reale compatta, connessa e senza bordo è omeomorfa o ad una sfera o ad una somma connessa di tori o ad una somma connessa di piani proiettivi reali.

Per prima cosa vogliamo dare una descrizione di come si possano costruire dei “modelli standard” delle superficie descritte nel Teorema e poi mostrare come ogni triangolazione con le proprietà dette risulti essere omeomorfa a qualcuno dei modelli standard.

Una sfera si ottiene dal disco identificando i punti del bordo o, dal “bigono” disegnato qui sotto, identificando i due lati secondo l'orientamento indicato. Il piano proiettivo si ottiene identificando i punti diametralmente opposti nel bordo di un disco e quindi identificando i due lati del bigono disegnato qui sotto secondo l'orientamento indicato. Un toro si ottiene da un rettangolo identificando i lati opposti orientati

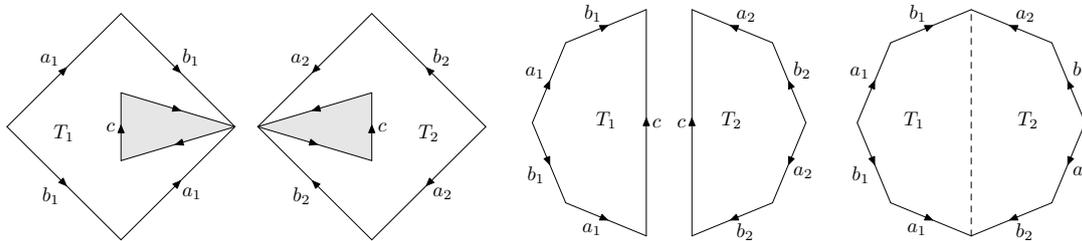
(*) Massey non lo fa e rimanda ad un articolo di Tibor Radó del 1925 (*Über den Begriff der Riemannschen Fläche*, Acta Univ. Szeged, vol. 2 (1924–1926) pp. 101–121.). Data la nostra definizione di superficie reale ci sentiamo esonerati dal farlo.

come nel disegno.



Possiamo indicare brevemente questi modelli indicando l'ordine con cui si presentano i lati percorrendo il bordo. Quindi scriveremo aa^{-1} per indicare la sfera; $aba^{-1}b^{-1}$ per indicare il toro; e infine $aa = a^2$ per indicare il piano proiettivo.

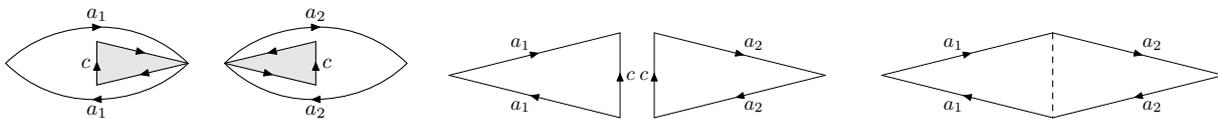
Proviamo a descrivere cosa succede facendo la somma connessa di costruzioni del tipo descritto sopra, cominciando dalla somma connessa di due tori.



Tagliamo un triangolo (o un disco) da ciascuno dei tori T_1 e T_2 disegnati sopra e apriamone il bordo, per ottenere i due pentagoni disegnati che incolliamo lungo il bordo tagliato. Quello che si ottiene in questo modo è un poligono che ha la somma connessa dei due tori come quoziente ottenuto dall'identificazione dei lati secondo gli orientamenti indicati nel disegno.

Più in generale, la somma connessa di n tori si otterrà come quoziente di un poligono di $4n$ lati da identificarsi a due a due e che si presenteranno nell'ordine come $a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1a_2^{-1}b_2^{-1}a_2b_2 \dots a_n^{-1}b_n^{-1}a_nb_n$, ove l'esponente -1 indica che si sta percorrendo il lato nel verso opposto rispetto a quello fissato per l'incollamento (ovviamente, sarebbe equivalente una qualunque permutazione ciclica dei lati indicati).

In modo perfettamente analogo, possiamo fare la somma di due piani proiettivi secondo il disegno qui sotto.

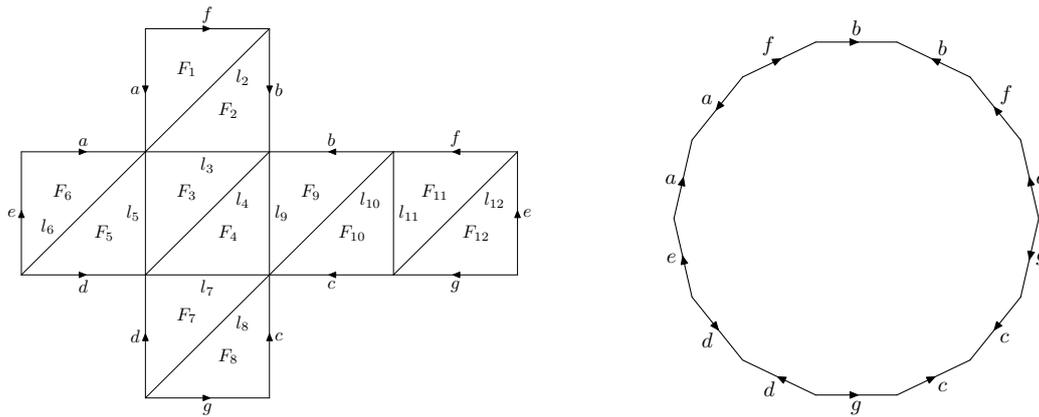


Più in generale, la somma connessa di n piani proiettivi si otterrà come quoziente di un poligono di $2n$ lati da identificarsi a due a due e che si presenteranno nell'ordine come $a_1^2a_2^2 \dots a_n^2$ (ovviamente, sarebbe equivalente una qualunque permutazione ciclica dei lati indicati).

Abbiamo quindi visto che la sfera, il toro, lo spazio proiettivo e le loro somme connesse, si possono rappresentare come spazi quozienti di poligoni piani di un numero pari di lati tramite opportune identificazioni dei lati corrispondenti. Resta da dimostrare che ogni superficie reale compatta, connessa e senza bordo è omeomorfa ad uno dei modelli descritti. Ciò verrà fatto mostrando come, a partire da una triangolazione poliedrale ci si possa riportare ai modelli descritti.

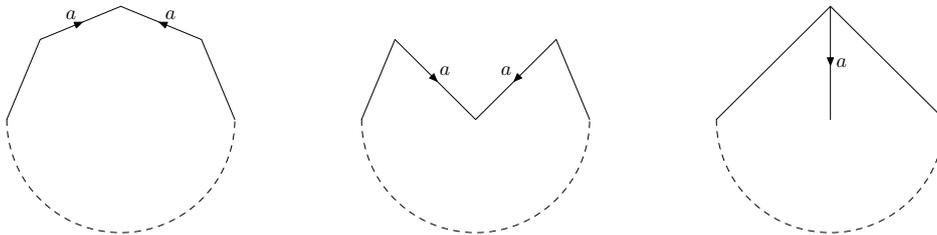
Passo 0. Ogni superficie reale compatta, connessa e senza bordo è omeomorfa ad un poligono piano con i lati opportunamente identificati. Sia quindi K un complesso poliedrale con le proprietà descritte sopra e osserviamo che possiamo numerare i suoi triangoli F_1, \dots, F_k di modo che, per ogni $i > 1$, il triangolo F_i abbia un lato in comune, l_i , con almeno uno tra i triangoli precedenti F_1, \dots, F_{i-1} . Se così non fosse, avremmo due insiemi di triangoli $\{F_1, \dots, F_r\}$ ed $\{F_{r+1}, \dots, F_k\}$ tali che nessuno degli elementi del primo insieme abbia un lato in comune con un triangolo del secondo insieme, contro l'ipotesi che la superficie sia connessa. Si possono quindi disporre i triangoli F_1, \dots, F_k nel piano unendo ciascuno ai precedenti per il lato indicato e costruendo così un poligono i cui lati (che sono in numero pari, perché?) devono essere identificati opportunamente a due a due.

Ad esempio (oltre a quelli già mostrati nelle pagine precedenti) vediamo qui sotto la triangolazione della superficie di un cubo ed il poligono che se ne deduce.



Immaginando l'espressione dei lati consecutivi del poligono, $aa^{-1}fbb^{-1}f^{-1}e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}e$, come un'espressione algebrica, verrebbe spontaneo "semplificare" le coppie di lati opposti consecutivi (del tipo aa^{-1} o $b^{-1}b$) a meno che non si tratti dell'unica coppia presente (che ci dà la sfera). Questa "semplificazione" ha un senso dal punto di vista geometrico ed è il contenuto del successivo

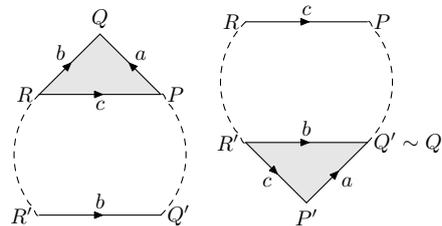
Passo 1. *Eliminazione di lati discordi adiacenti.* Se in un poligono di n lati ($n > 2$) due lati adiacenti vanno identificati e compaiono con verso discorde, allora possono essere eliminati trasformando il vertice comune in un punto interno al nuovo poligono che ha così due lati in meno (si veda il disegno qui sotto dove abbiamo rappresentato con un arco di circonferenza tratteggiato gli eventuali lati rimanenti del poligono).



Nell'esempio della superficie del cubo, con questa operazione possiamo eliminare tutte le coppie di lati fino ad ottenere un bigono aa^{-1} , ovvero la forma canonica della sfera (che è chiaramente omeomorfa alla superficie del cubo). Diversamente, se non si ottiene la sfera, dopo aver effettuato ripetutamente il passo 1 resterà un poligono (sempre con un numero pari di lati) privo di coppie di lati adiacenti discordi da identificare. Questo poligono potrebbe avere coppie di vertici che non si identificano dopo l'incollamento dei

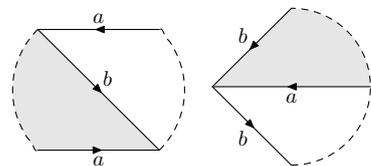
lati, mentre nei “modelli standard” diversi dalla sfera tutti i vertici del poligono si identificano in un unico punto del quoziente.

Passo 2. *Trasformazione in un poligono in cui tutti i vertici devono identificarsi in un singolo punto del quoziente.* Supponiamo quindi di avere un poligono privo di coppie di lati adiacenti da indentificare e discordi e diciamo *equivalenti* tra loro i vertici del poligono che hanno uguale immagine nel quoziente. Supponiamo che via sia più di una classe di equivalenza di vertici e vi sarà una coppia di vertici consecutivi, P e Q , che non sono tra loro equivalenti; sia poi R il vertice consecutivo e indichiamo con a il lato PQ , con b il lato QR e con c il lato PR (che è tagliato internamente al poligono). Possiamo dire con certezza che b non può essere uguale né ad a^{-1} né ad a . Nel primo caso avremmo eliminato la coppia tramite il passo 1, nel secondo l'estremo P verrebbe identificato con Q nel quoziente e questo lo abbiamo escluso. Tagliamo quindi il triangolo di lati abc ed andiamo ad incollarlo lungo il lato b nel bordo corrispondente del poligono. In questo modo otteniamo un poligono che ha lo stesso numero di lati del precedente, ma ha in più il vertice P' nella stessa classe di P ed ha identificato i vertici Q e Q' che stavano in una classe diversa da quella di P . Nel nuovo poligono, potremmo essere nelle condizioni di applicare di nuovo il passo 1 (ed eliminare il vertice Q' , ma non altri; perché?). Ciò fatto si può continuare ad iterare i due passi fino ad ottenere un poligono in cui tutti i vertici sono tra loro equivalenti e non vi sono lati adiacenti discordi da identificare.

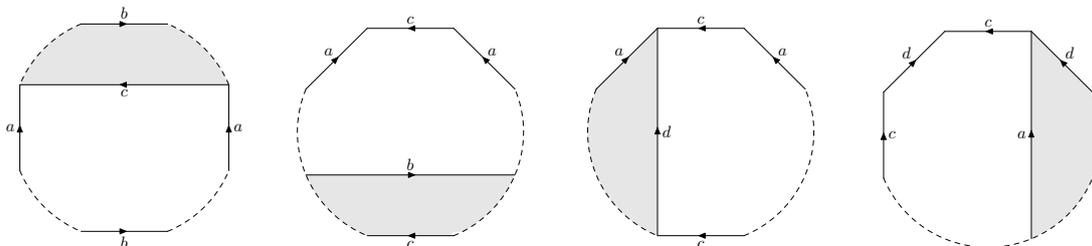


Il passo successivo consiste nel mostrare che si può modificare il poligono fino ad ottenerne uno in cui i lati da identificare si presentano a coppie consecutive concordi aa , o in quaterne del tipo $aba^{-1}b^{-1}$, ovvero una somma connessa di addendi uguali o a tori o a piani proiettivi. Se tutti gli addendi sono del tipo piani proiettivi o tutti del tipo tori, abbiamo finito; nel caso contrario, il passo finale consisterà nel mostrare che la somma connessa di un toro con un piano proiettivo è omeomorfa alla somma connessa di tre piani proiettivi e quindi ci si può riportare a fattori tutti dello stesso tipo. Proseguiamo quindi con i passi mancanti.

Passo 3. *Riduzione a somma connessa di addendi uguali a spazi proiettivi o a tori.* Se, percorrendo il bordo, due lati del poligono da identificare si presentano concordi, ma non consecutivi, possiamo cambiare il poligono in uno equivalente, con due lati concordi consecutivi. Indichiamo con a , come nel disegno, i lati in questione e tagliamo il poligono lungo un segmento orientato, b , che congiunge il punto finale di una copia di a con il punto finale dell'altra copia. Incolliamo il poligono lungo a ed otteniamo un poligono con gli stessi vertici e che ha due lati consecutivi e concordi, ovvero un addendo di somma connessa omeomorfo ad un piano proiettivo reale. Se tutte le coppie di lati da identificare sono concordi, possiamo in questo modo ridurci ad una somma connessa di piani proiettivi ed abbiamo finito.



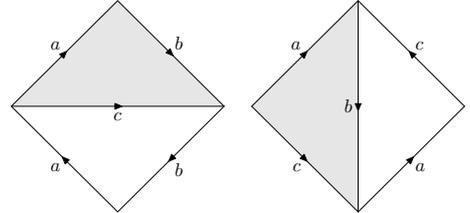
Supponiamo quindi che due lati da identificare si presentino discordi, ma non consecutivi (altrimenti possiamo eliminarli applicando il passo 1). Indichiamoli con a ed a^{-1} . Se ciò accade, esistono altri due lati discordi e non consecutivi da identificarsi –siano b e b^{-1} – e i quattro lati compaiono nell'ordine come $a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots$. Infatti, se così non fosse e tra a ed a^{-1} non comparisse nessun lato che si identifichi con un lato tra a^{-1} ed a avremmo una contraddizione con il fatto che l'estremo finale di a deve identificarsi con l'estremo iniziale avendo messo tutti i vertici nella stessa classe di equivalenza al passo 2.



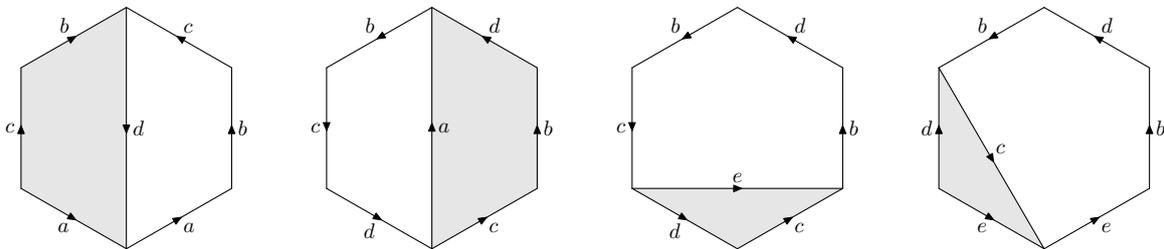
Il passaggio dalla forma $a \cdots b \cdots a^{-1} \cdots b^{-1} \cdots$ alla forma $\cdots cdc^{-1}d^{-1} \cdots$ del bordo del poligono è descritta nei disegni precedenti. Si taglia il poligono lungo un segmento, c , che congiunge gli estremi finali delle coppia di lati a , e si incolla lungo il lato b . Di nuovo, si taglia lungo un segmento, d , che congiunge gli estremi finali della coppia di lati c e si incolla lungo a . Il poligono così ottenuto ha la sequenza $cdc^{-1}d^{-1}$ nel bordo, e sono state eliminate le due coppie di lati discordi e non consecutivi.

La dimostrazione del Teorema è conclusa se verificiamo l'ultimo passo, ovvero

Passo 4. *la somma connessa di un toro e di un piano proiettivo è omeomorfa alla somma connessa di tre piani proiettivi.* Si tratta di applicare ancora la tecnica di “chirurgia delle superficie” che abbiamo usato finora. Facciamo vedere dapprima che la somma connessa di due piani proiettivi è omeomorfa alla bottiglia di Klein e poi che la somma connessa di un toro con un piano proiettivo è omeomorfa alla somma connessa della bottiglia di Klein con un piano proiettivo. Come illustrato nel disegno a fianco, per verificare che la somma connessa di due piani proiettivi è omeomorfa alla bottiglia di Klein basta tagliare il quadrato lungo c ed incollarlo lungo b .



Passiamo ora alla verifica che la somma connessa di un piano proiettivo con un toro è omeomorfa alla somma connessa di una bottiglia di Klein con un piano proiettivo. Facciamo il disegno qui sotto



L'operazione consiste prima nel tagliare lungo d ed incollare lungo a e poi nel tagliare lungo e ed incollare lungo c .