Maurizio Candilera

Esercizi e Complementi
per il Corso di Istituzioni di Matematiche

Corsi di Laurea in Chimica, Chimica Industriale, Scienza dei Materiali

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata - Via Belzoni, 7 - 35100 PADOVA

I
Numeri reali e complessi

1. Disequazioni.

Esercizio 1.1. *Trovare gli $x \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 > \frac{x-1}{x+1}.$$

Svolgimento. La condizione è verificata se, e solo se,

$$0 < \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{x-1}{x+1} = \frac{4x^2+3x+1}{x^2(x+1)}.$$

e ciò accade per $-1 < x \neq 0$, perchè il numeratore è un trinomio di secondo grado con discriminante negativo. □

Esercizio 1.2. *Trovare gli $x \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\log\left|\frac{x+1}{x-2}\right| < 0.$$

Svolgimento. La condizione è verificata se, e solo se,

$$0 < \left|\frac{x+1}{x-2}\right| < 1,$$

ovvero quando

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ (x+1)^2 < (x-2)^2 \end{cases}.$$

Dunque, deve aversi $-1 \neq x < \frac{1}{2}$. □

Lasciamo al lettore il compito di svolgere in modo analogo i seguenti esercizi.

Esercizio 1.3. Trovare gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $\log\left|\frac{x+2}{x-1}\right| < 0$. □

Esercizio 1.4. Trovare gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $\log\left|\frac{x-1}{x^2-1}\right| > 0$. □

Esercizio 1.5. Trovare gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $\log\left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\right| < 0$. □

Esercizio 1.6. Trovare gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $\log\left|\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\right| > 0$. □

2. Numeri complessi.

Esercizio 2.1. *Si determinino i numeri complessi z, soddisfacenti alla condizione*

$$z^2 - 3z + 3 + i = 0.$$

Svolgimento. Applichiamo la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado e quindi i due numeri complessi soddisfacenti alla condizione data sono

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm [9 - 4(3+i)]^{1/2}}{2},$$

ove $[9-4(3+i)]^{1/2}$ indica un qualsiasi numero complesso il cui quadrato si uguale a $9-4(3+i) = -3-4i$.

Sia $x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, un numero complesso; allora

$$(x + iy)^2 = -3 - 4i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \end{cases}.$$

Il sistema è equivalente ($xy \neq 0$) al sistema

$$\begin{cases} x^2 - \frac{4}{x^2} = -3 \\ y = \frac{-2}{x} \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \\ y = \frac{-2}{x} \end{cases}.$$

Posto $t = x^2$, si vede che le soluzioni reali della prima equazione devono soddisfare alla condizione $x^2 = 1$; quindi le due radici quadrate di $-3 - 4i$ sono $1 - 2i$ ed il suo opposto $2i - 1$.

Tornando all'equazione di partenza, si conclude che

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm [9 - 4(3+i)]^{1/2}}{2} = \frac{3 \pm (1 - 2i)}{2} = \begin{cases} 2 - i \\ 1 + i \end{cases}.$$

Si conclude quindi che $z^2 - 3z + 3 + i = (z - 2 + i)(z - 1 - i)$. □

Esercizio 2.2. Si determinino i numeri complessi z, soddisfacenti alla condizione $z^2 + (i-1)z + 6 + 2i = 0$. □

Esercizio 2.3. Si determinino i numeri complessi z, soddisfacenti alla condizione $z^3-(1+i)z^2+(1+4i)z-1-3i = 0$. (Si osservi che $z - 1$ divide il polinomio dato.) □

Esercizio 2.4. *Si disegni nel piano di Argand-Gauss l'insieme dei numeri complessi z, soddisfacenti alla condizione*

$$\left|\frac{2-z}{z-3}\right| > \left|\frac{z}{1-z}\right|.$$

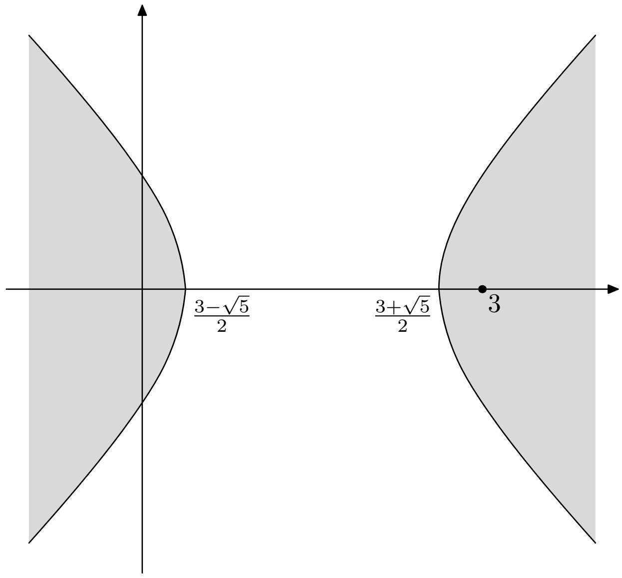
Svolgimento. Sia $1 \neq z \neq 3$, perchè altrimenti le espressioni scritte perdono di senso. Sotto tali ipotesi, la disuguaglianza è equivalente a $|2-z|\,|1-z| > |z|\,|z-3|$ e quindi, scrivendo $z = x+iy$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si ottiene la disuguaglianza equivalente

$$[(x-2)^2 + y^2][(x-1)^2 + y^2] > [x^2 + y^2][(x-3)^2 + y^2] \qquad \text{ovvero} \qquad x^2 - 3x + 1 > y^2.$$

Dunque, tale disuguaglianza è equivalente alle due condizioni

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 > 0 \\ -\sqrt{x^2 - 3x + 1} < y < \sqrt{x^2 - 3x + 1} \end{cases}$$

da cui si deduce il seguente disegno approssimativo



ove l'insieme cercato è rappresentato dalla zona ombreggiata, da cui è escluso il punto $z = 3$. □

Esercizio 2.5. Si disegni nel piano di Argand-Gauss l'insieme dei numeri complessi z, soddisfacenti alla condizione

$$\left|\frac{2i - z}{z - 3i}\right| > \left|\frac{z}{z - i}\right|,$$

ove i indica, come di consueto, l'unità immaginaria. □

Esercizio 2.6. Si disegni nel piano di Argand-Gauss l'insieme dei numeri complessi z, soddisfacenti alla condizione

$$|\frac{z}{z - 2i}| \geq \sqrt{2}\,.$$

□

Esercizio 2.7. Si disegni nel piano di Argand-Gauss il sottoinsieme

$$S = \left\{\, z \in \mathbb{C} \,|\, Im(i(z+1)^2) < 1 \right\}.$$

□

Esercizio 2.8. Si disegni nel piano di Argand-Gauss il sottoinsieme

$$S = \left\{\, z \in \mathbb{C} \,|\, Re(i(z-2)^2) > 2 \right\}.$$

□

Esercizio 2.9. *Si disegni nel piano di Argand-Gauss il sottoinsieme*

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \left|\frac{z + 2i}{z}\right| > 2 \right\}.$$

Svolgimento. Se $z \neq 0$, la disuguaglianza che definisce S è equivalente alla disuguaglianza $|z+2i| > 2|z|$.

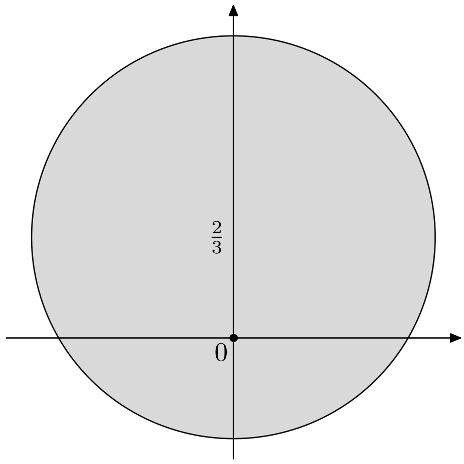
Quindi, posto $z = x + iy$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la disuguaglianza è equivalente a

$$\sqrt{x^2 + (y+2)^2} > 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

ovvero, dopo aver elevato al quadrato, alla disuguaglianza

$$x^2 + (y - \tfrac{2}{3})^2 < \tfrac{16}{9}.$$

Ciò significa che i punti di S sono i punti che distano da $(0, \frac{2}{3})$ meno di $\frac{4}{3}$, ovvero i punti interni alla circonferenza di centro $(0, \frac{2}{3})$ e raggio $\frac{4}{3}$, con l'esclusione del bordo, poichè deve valere la disuguaglianza stretta e con l'esclusione del punto $z = 0$.



Ciò conclude la discussione. □

Esercizio 2.10. Si disegni nel piano di Argand-Gauss il sottoinsieme

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{z-i}{z+2} \right| < 1 \right\}.$$

□

Esercizio 2.11. Si disegni nel piano di Argand-Gauss il sottoinsieme

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{2z-i}{z+2} \right| \leq \sqrt{3} \right\}.$$

Si determini inoltre l'intersezione tra S e l'asse reale. □

Esercizio 2.12. Si disegni nel piano di Argand-Gauss il sottoinsieme

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{z-2}{\bar{z}+2i} \right| \leq \sqrt{2} \right\}.$$

□

Esercizio 2.13. *Si consideri l'insieme I dei numeri complessi del tipo $m + in$ al variare di m ed n tra i numeri interi (i indica l'unità immaginaria). Si determini una retta passante per il punto $z_0 = 2 - i$ del piano di Argand-Gauss che intersechi l'insieme I nel solo punto z_0.*

Svolgimento. Si osservi che $z_0 \in I$ e che una retta per z_0 che contenga un altro punto di I deve avere un'equazione $a(x-2)+b(y+1) = 0$ con a e b numeri interi. Si conclude così che la retta $(x-2)+\sqrt{2}(y+1) = 0$ non contiene punti di I diversi da z_0, perchè altrimenti si concluderebbe che $\sqrt{2}$ è un numero razionale. □

Esercizio 2.14. Si consideri l'insieme I dei numeri complessi del tipo $m+in$ al variare di m ed n tra i numeri interi (i indica l'unità immaginaria). Si determini una retta passante per il punto $z_0 = 1+2i$ del piano di Argand-Gauss che intersechi l'insieme I nel solo punto z_0. □

Esercizio 2.15. *Nel piano complesso si considerino il semipiano superiore $\mathfrak{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid Imz > 0 \}$ e la trasformazione*

$$z \mapsto u = \frac{z-i}{z+i}$$

(a) *Si mostri che l'applicazione* $z \mapsto u$ *trasforma il semipiano* $\mathfrak{H}$ *nel disco* $D = \{ u \in \mathbb{C} \mid |u| < 1 \}$.
(b) *Si determini il punto* z_0 *che viene inviato da questa trasformazione nel centro del disco e si dia una formula esplicita per la trasformazione inversa.*
(c) *Si scrivano le relazioni tra l'immagine dell'asse reale* $\{ z \in \mathbb{C} \mid Im z = 0 \}$ *ed il bordo del disco* D.

Svolgimento. *(a)* Sia $z = x + iy$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e si osservi che

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |z-i| < |z+i| \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + (y-1)^2 < x^2 + (y+1)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y > 0,$$

che ci permette di concludere.
(b) Dalla relazione $u = \frac{z-i}{z+i}$, si deduce con un calcolo diretto che la trasformazione inversa è

$$u \mapsto z = i\frac{1+u}{1-u}$$

e quindi che il punto che viene mandato in $u = 0$ è $z_0 = i$.
(c) Se x è un numero reale allora il numero complesso $\frac{x-i}{x+i}$ ha modulo 1 e quindi i punti dell'asse reale vengono trasformati in punti del bordo del disco D. Si verifica facilmente che tutti i punti del bordo, con l'eccezione di $u = 1$, si possono scrivere nella forma $\frac{x-i}{x+i}$ per qualche valore di $x \in \mathbb{R}^{(\dagger)}$. □

Esercizio 2.16. Nel piano complesso si considerino il disco $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$ e la trasformazione

$$z \mapsto u = \frac{z+1}{iz-i}$$

(a) Si mostri che l'applicazione $z \mapsto u$ trasforma il disco D nel semipiano superiore $\mathfrak{H} = \{ u \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} u > 0 \}$.
(b) Si determini il punto z_0 che viene inviato da questa trasformazione nel punto $1 + 2i$ e si dia una formula esplicita per la trasformazione inversa.
(c) Si scrivano le relazioni tra l'immagine del bordo del disco D e l'asse reale $\{ u \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} u = 0 \}$. □

(†) Si potrebbe mostrare che $\lim_{x \to \infty} \frac{x-i}{x+i} = 1$.

3. Equazioni algebriche

Sia $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ un polinomio di grado $n > 0$. Risolvere l'equazione $f(X) = 0$ significa trovare quei numeri a tali che $f(a) = 0$. Tali numeri sono detti le *radici* del polinomio $f(X)$.

Anche se il polinomio $f(X)$ ha i coefficienti in un campo ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ nei casi che ci interessano) non è detto che le radici appartengano allo stesso campo: ad esempio, il polinomio $X^2 - 2$ ha i coefficienti nel campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, ma le sue radici $\pm\sqrt{2}$ non sono numeri razionali. Nel caso del corpo complesso, il Teorema Fondamentale dell'Algebra (C. F. Gauss, 1799), afferma che ogni polinomio $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ di grado positivo, ha almeno una radice in $\mathbb{C}$ (e quindi $f(X)$ ha tutte le sue radici in $\mathbb{C}$). Il teorema citato, però non dà una formula esplicita per determinare le radici di un polinomio, ma garantisce solo l'esistenza di radici in $\mathbb{C}$.

Il problema di determinare esplicitamente le radici di polinomi, attraverso formule che coinvolgano somme, prodotti ed estrazioni di radici(*) ha interessato gli studiosi fin dall'antichità. Formule esplicite per la risoluzione di equazioni di grado minore o uguale a 4, sono state determinate fin dal XVI Secolo (Cardano, Ferrari, Del Ferro).

In un periodo molto più vicino a noi, attorno al 1830, il matematico francese Evariste Galois, dimostrò che *non possono esistere* formule risolutive per l'equazione generale di grado $n \geq 5$, basate sulle operazioni di somma, prodotto ed estrazione di radici. L'influenza di questo risultato fu notevole, e può essere considerato come uno dei punti di partenza dell'algebra moderna.

Nel seguito di questa sezione, vogliamo descrivere le classiche formule risolutive per le equazioni di grado minore o uguale a quattro.

• *Equazioni di primo grado.*
L'equazione generale di primo grado ha la forma $aX + b = 0$, con $a \neq 0$, ed ha come unica soluzione il numero $-\frac{b}{a}$. In particolare osserviamo che, se i coefficienti a e b appartengono ad un dato campo (ad esempio a $\mathbb{Q}$), anche la radice $-\frac{b}{a}$ appartiene allo stesso campo.

• *Equazioni di secondo grado.*
L'equazione generale di secondo grado ha la forma $aX^2 + bX + c = 0$, con $a \neq 0$, e la sua risoluzione, si basa sul metodo di "completamento dei quadrati". Moltiplicando per $4a$ e sommando da entrambo i lati dell'uguale il termine b^2, l'equazione assume la forma

$$(2aX + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Dunque, se esiste un numero $u = (b^2 - 4ac)^{1/2}$ tale che $u^2 = b^2 - 4ac$, l'equazione di partenza diventa equivalente a due equazioni (indipendenti) di primo grado, ovvero

$$2aX + b = u \qquad \text{e} \qquad 2aX + b = -u;$$

da cui si deduce la ben nota formula risolutiva

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}.$$

L'esistenza delle radici dell'equazione generale è quindi legata alla possibilità di estrarre radici quadrate del numero $\Delta = b^2 - 4ac$, che viene detto il *discriminante* dell'equazione. Si osservi che $\Delta = 4a^2(z_1 - z_2)^2$, ove z_1 e z_2 sono le radici dell'equazione e inoltre, dall'uguaglianza $aX^2 + bX + c = a(X - z_1)(X - z_2)$, si deducono le relazioni fondamentali tra le radici ed i coefficienti dell'equazione

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

(*) Ricordiamo che, utilizzando le Formule di De Moivre l'operazione di estrarre radici n-esime nel campo complesso si basa essenzialmente sull'utilizzo delle funzioni trigonometriche, dell'esponenziale e del logaritmo reali, cioè delle cosiddette funzioni elementari.

• *Equazioni di terzo grado.*
L'equazione generale di terzo grado ha la forma $aX^3+bX^2+cX+d=0$, con $a \neq 0$. Si osservi che, posto $X = Y - \frac{b}{3a}$, si ha

$$aX^3+bX^2+cX+d = a(Y^3+pY+q), \qquad \text{ove } p = \frac{3ac-b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{27a^2d-9abc+2b^3}{27a^3}.$$

Quindi, è sufficiente saper risolvere un'equazione della forma

$$Y^3+pY+q=0 \tag{1}$$

per risolvere l'equazione generale di terzo grado. La risoluzione di (1) si basa sulla Sostituzione di Vieta, ovvero sulla posizione

$$Y = W - \frac{p}{3W}$$

tramite la quale si ottiene l'equazione

$$W^3 - \frac{p^3}{27W^3} + q + 0, \tag{2}$$

da cui, moltiplicando per W^3 e ponendo $T = W^3$, si ottiene l'equazione di secondo grado

$$T^2 + qT - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Dunque, per determinare W (e quindi Y ed X) è sufficiente risolvere le equazioni

$$W^3 = \frac{-q \pm [q^2 - (4p^3/27)]^{1/2}}{2},$$

ovvero estrarre delle radici terze. Dunque, con questo procedimento otteniamo sei radici per queste due equazioni che, sostituite nella formula di Vieta, producono tre valori distinti[(†)] e permettono così di determinare le radici di (1).

Si osservi infine che, se z_1, z_2, z_3 sono le radici di (1), dalla relazione $Y^3+pY+q = (Y-z_1)(Y-z_2)(Y-z_3)$, si deducono le identità

$$z_1+z_2+z_3=0, \qquad z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=p, \qquad z_1z_2z_3=-q,$$

che esprimono le relazioni tra i coefficienti del polinomio e le sue radici. Infine, si definisce il *discriminante* di (1) ponendo

$$D = \prod_{1\le i<j\le 3} (z_i-z_j)^2 = (z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2(z_2-z_3)^2 = -4p^3-27q^2.$$

• *Equazioni di quarto grado.*
L'equazione generale di quarto grado ha la forma $aX^4+bX^3+cX^2+dX+e=0$, con $a \neq 0$ e, con sostituzioni analoghe al caso delle equazioni di terzo grado (precisamente, dividendo per a ed effettuando la sostituzione $X = Y - \frac{b}{4a}$), si mostra che è sufficiente risolvere equazioni della forma

$$Y^4+pY^2+qY+r=0. \tag{3}$$

(†) Si osservi che l'equazione $y = W - \frac{p^3}{3W}$, nell'incognita W, ha due soluzioni w_1 e w_2 per ogni valore fissato di y. Le due soluzioni sono legate dalla relazione $w_1w_2 = -\frac{p}{3}$ ed è facile verificare che, se w_1 è una radice di (2), anche w_2 lo è.

L'idea fondamentale è quella di introdurre una variabile ausiliaria U e di considerare il polinomio
$$Y^4 + UY^2 + \frac{U^2}{4} - UY^2 - \frac{U^2}{4} + pY^2 + qY + r = \left(Y^2 + \frac{U}{2}\right)^2 - \left[(U-p)Y^2 - qY + (\tfrac{U^2}{4} - r)\right].$$
Ad U si attribuisce un valore affinchè il polinomio (nella variabile Y) diventi la differenza tra due quadrati e quindi l'equazione di partenza risulti equivalente a due equazioni di secondo grado nella Y. Il valore di U deve essere scelto in modo da annullare il discriminante del polinomio scritto tra parentesi quadre, ovvero deve aversi
$$q^2 - (U^2 - 4r)(U - p) = 0 \tag{4}$$
e quindi un tale valore di U può essere determinato risolvendo un'equazione di terzo grado. Dunque, se u è una radice di (4), l'equazione (3) è uguale al prodotto
$$\left[Y^2 + \frac{u}{2} + (u-p)^{1/2}\left(Y - \frac{q}{2(u-p)}\right)\right]\left[Y^2 + \frac{u}{2} - (u-p)^{1/2}\left(Y - \frac{q}{2(u-p)}\right)\right],$$
ove $(u-p)^{1/2}$ è un qualunque numero il cui quadrato è uguale ad $u - p$.

Esercizio 3.1. Si risolva l'equazione $X^3 + 3iX = 1 + i$. □

Esercizio 3.2. Si risolva l'equazione $X^3 + 3iX^2 = 10i$. □

Esercizio 3.3. Si risolva l'equazione $X^4 - 4X^3 + (1+i)X = 3i$. □

4. Successioni e serie

Richiamiamo la definizione di successione convergente.

Definizione. Sia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione numerica (reale o complessa); si scrive $\lim_{n\to\infty} z_n = \ell$ per indicare che, comunque si fissi un numero reale positivo $\varepsilon > 0$, esiste un indice n_0 (dipendente da ε) tale che, per ogni $n \geq n_0$, si abbia $|z_n - \ell| < \varepsilon$.

Esercizio 4.1. Sia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri complessi e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ponga $z_n = x_n + iy_n$, ove $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$. Si verifichi che la successione è convergente ad un numero complesso $z = x + iy$ se, e solo se, le due successioni reali $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergono rispettivamente ad x ed y (in $\mathbb{R}$). □

Esercizio 4.2. *Utilizzando la definizione di limite si mostri che*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 1}{2n^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$
Svolgimento. Bisogna mostrare che, fissato un numero reale positivo ε, arbitrariamente piccolo, esiste un numero naturale n_0, tale che l'insieme $\{\, n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq n_0 \,\}$ sia contenuto nell'insieme delle soluzioni della disequazione
$$\left|\frac{n^2 - 1}{2n^2 + 1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$
Si ha quindi
$$\left|\frac{n^2 - 1}{2n^2 + 1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-3}{2(2n^2 + 1)}\right| < \varepsilon \qquad \text{se, e solo se,} \qquad 4n^2 > \frac{3}{\varepsilon} - 2.$$
Dunque, l'insieme delle soluzioni della disequazione contiene tutti i numeri naturali maggiori di $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - 2}$ ed è quindi sufficiente prendere, ad esempio, $n_0 = [r] + 1$(†) perchè sia soddisfatta la condizione imposta dalla definizione di limite. □

Lasciamo al lettore il compito di discutere il caso analogo descritto nel seguente

(†) Come di consueto, il simbolo $[u]$ sta ad indicare la parte intera del numero reale u; ovvero il più grande tra i numeri interi minori o uguali ad u. In simboli, $[u] = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq u \,\}$.

Esercizio 4.3. Utilizzando la definizione di limite si mostri che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4}{2n^2+1} = \frac{3}{2}.$$

$\square$

Esercizio 4.4. *Si dica se converge la successione di termine generale*

$$b_n = \frac{3n\cos(3n\pi - 4\sqrt{2} + n)}{2n^2+5}$$

e se ne calcoli l'eventuale limite.

Svolgimento. Poichè il coseno è una funzione limitata, i cui valori sono compresi tra -1 ed 1, si ha

$$-\frac{3n}{2n^2+5} \le \frac{3n\cos(3n\pi - 4\sqrt{2} + n)}{2n^2+5} \le \frac{3n}{2n^2+5}$$

i due termini agli estremi convergono entrambo a zero. Quindi, per il principio del confronto, si ha $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. $\square$

Esercizio 4.5. *Si calcoli* $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-4n^2}\log[n(\cos n+4)]$.

Svolgimento. Si ha

$$0 \le e^{-4n^2}\log[n(\cos n+4)] = \frac{n}{e^{4n^2}}\,\frac{\log[n(\cos n+4)]}{n} \le \frac{n}{e^{4n^2}}\,\frac{\log(5n)}{n}$$

ed è facile verificare che i due fattori della successione maggiorante convergono entrambo a zero. Quindi, per il principio del confronto, si ha $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-4n^2}\log[n(\cos n+4)] = 0$. $\square$

Esercizio 4.6. *Si dica per quali* $x \in \mathbb{R}$ *converge la successione di termine generale*

$$a_n = \frac{n^3(x-1)^n}{3^{n+3}}.$$

Svolgimento. Si osservi che

$$a_n = \frac{n^3}{3^3}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n$$

e quindi, per $|x-1|<3$, si ha che $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ è proporzionale ad una successione del tipo $\frac{n^p}{q^n}$ con p e q costanti e $q>1$. In tal caso, se ne deduce che $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$ e perciò la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a zero per $-2<x<4$.

Se invece $|x-1|\ge 3$, allora, si ha $|a_n| \ge \frac{n^3}{3^3}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, e quindi la successione non può convergere. $\square$

Esercizio 4.7. *Si consideri la successione* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *definita in modo ricorsivo ponendo*

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{\pi}{2} \\ a_{n+1} = \frac{2n^n}{(n+1)^n}a_n \end{cases}.$$

Si dica se la successione converge ed in caso affermativo, se ne calcoli il limite.

Svolgimento. Si osservi che, in base alla definizione ricorsiva, si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n},$$

e quest'ultimo è un numero positivo e non superiore ad 1, essendo $2 \leq (1+\frac{1}{n})^n < 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque, la successione in questione è tutta composta da numeri dello stesso segno di a_1 (e quindi negativi) ed è crescente (perchè decresce in valore assoluto). Dunque, si tratta di una successione convergente, cioè esiste in $\mathbb{R}$ il numero $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Se fosse $a \neq 0$, si avrebbe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{a} = 1$; ma, con un calcolo diretto, si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e} < 1,$$

e perciò deve aversi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Lasciamo al lettore il compito di discutere il caso analogo descritto nel seguente

Esercizio 4.8. Si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita in modo ricorsivo ponendo

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt[3]{17} \\ a_{n+1} = \frac{(n+1)^n}{2n^n} a_n \end{cases}.$$

Si dica se la successione converge e se ne calcoli il limite. □

Esercizio 4.9. *Si provi che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita ricorsivamente ponendo*

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \end{cases},$$

è decrescente e limitata e se ne calcoli il limite.

Senza far uso di espressioni approssimate del limite, si verifichi che il termine x_3 differisce dal limite per un numero minore di $\frac{1}{100}$.

Svolgimento. Si osservi che, in base alla definizione ricorsiva, se x_n è un numero positivo, lo stesso vale per x_{n+1}, in quanto somma di due numeri positivi. Dunque, poichè $x_1 > 0$, possiamo concludere con un ragionamento per induzione che $x_n > 0$ per ogni numero naturale n.

Dunque la successione data è decrescente se, e solo se, $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Utilizzando la relazione ricorsiva, si verifica che

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x_n^2} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_n^2 > 2;$$

quindi, essendo $x_1^2 = 4 > 2$ vogliamo dimostrare che $x_n^2 > 2 \Rightarrow x_{n+1}^2 > 2$, in modo da poter concludere per induzione che $x_n^2 > 2$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ e, quindi che la successione data è decrescente ed inferiormente limitata. Si osservi che

$$x_{n+1}^2 = \left(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}\right)^2 > 2 \qquad \text{se, e solo se,} \qquad x_n^4 - 4x_n^2 + 4 > 0;$$

e ciò accade perchè, per ipotesi induttiva, $x_n^2 > 2$.

Dunque la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente ed inferiormente limitata da 1 e perciò converge ad un limite non nullo. Sia dunque $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dalla relazione ricorsiva, per l'unicità del limite, si deduce che x deve soddisfare alla relazione

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x},$$

ovvero $x^2 = 2$. Essendo $x \geq 1$, si conclude che $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

Per quanto riguarda l'ultima asserzione, si osservi che $x_3 = \frac{17}{12}$ e dunque, osservando che

$$\frac{1}{144} = x_3^2 - 2 = (x_3 + \sqrt{2})(x_3 - \sqrt{2}) > 2(x_3 - \sqrt{2}),$$

si conclude che $x_3 - \sqrt{2} < \frac{1}{288} < \frac{1}{100}$, come si doveva verificare. □

Esercizio 4.10. *Si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita ricorsivamente ponendo*

$$\begin{cases} a_1 = \frac{3}{4} \\ a_{n+1} = \frac{1}{\frac{4}{3}+a_n} \end{cases},$$

(i) Si verifichi che la successione è limitata.
(ii) si verifichi che la sottosuccessione $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente
(iii) si verifichi che la sottosuccessione $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ è decrescente
(iv) si verifichi che le due sottosuccessioni convergono ad uno stesso numero reale x e si deduca che $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

Svolgimento. Discutiamo, più in generale, del carattere della successione così definita

$$\begin{cases} a_1 = \alpha^{-1} \\ a_{n+1} = \frac{1}{\alpha+a_n} \end{cases},$$

ove α è un numero reale maggiore di 0.
(i). Per prima cosa osserviamo che $a_1 > 0$ e, in base alla relazione ricorsiva, si ha $a_n > 0 \implies a_{n+1} > 0$. Si deduce, per induzione, che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, dalla disuguaglianza $a_n > 0$ si deduce $\alpha + a_n > \alpha > 0$ e quindi $a_{n+1} = \frac{1}{\alpha+a_n} \leq \frac{1}{\alpha}$, qualunque sia $n \in \mathbb{N}$. Mettendo insieme le due disuguaglianze, si ha $a_n \in [0, \frac{1}{\alpha}]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi la successione data è limitata.
(ii), (iii). Dovendo studiare le sottosuccessioni formate dai termini di indice pari e di indice dispari, rendiamo esplicite le relazioni esistenti tra il termine a_n ed a_{n+2}. Si ha

$$a_{n+2} = \frac{1}{\alpha + a_{n+1}} = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{\alpha+a_n}} = \frac{\alpha + a_n}{a_n\alpha + 1 + \alpha^2};$$

e quindi

$$a_{n+2} - a_n = \frac{\alpha + a_n}{a_n\alpha + 1 + \alpha^2} - a_n = \frac{\alpha(1 - a_n\alpha - a_n^2)}{a_n\alpha + 1 + \alpha^2}.$$

Per le ipotesi fatte e per quanto visto nel numero precedente, il denominatore è un numero positivo, quindi il segno della differenza dipende unicamente dal segno del numeratore, ovvero dal segno di $1 - a_n\alpha - a_n^2$.

Considerando quindi il segno del trinomio $1 - t\alpha - t^2$ e ricordando che tutti i termini della successione sono positivi, si ha

$$(*)\qquad \begin{aligned} &a_{n+2} - a_n > 0 \quad \text{se} \quad a_n \in (0, \frac{\sqrt{\alpha^2+4}-\alpha}{2}) \\ &a_{n+2} - a_n < 0 \quad \text{se} \quad a_n \in (\frac{\sqrt{\alpha^2+4}-\alpha}{2}, +\infty) \end{aligned}$$

Si osservi ora che

$$a_1 = \frac{1}{\alpha} > \frac{\sqrt{\alpha^2+4}-\alpha}{2} \qquad \text{e} \qquad a_2 = \frac{\alpha}{\alpha^2+1} < \frac{\sqrt{\alpha^2+4}-\alpha}{2}.$$

Quindi, se mostriamo che

$$(**)\qquad \begin{aligned} &a_n < \frac{\sqrt{\alpha^2+4}-\alpha}{2} \quad \Longrightarrow \quad a_{n+2} < \frac{\sqrt{\alpha^2+4}-\alpha}{2} \\ &a_n > \frac{\sqrt{\alpha^2+4}-\alpha}{2} \quad \Longrightarrow \quad a_{n+2} > \frac{\sqrt{\alpha^2+4}-\alpha}{2} \end{aligned}$$

in base a $(*)$, si ottiene per induzione che la sottosuccessione $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ è decrescente, mentre la sottosuccessione $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente.

Per quanto riguarda la prima delle implicazioni $(**)$, si osservi che con calcoli diretti si ottiene

$$a_{n+2} = \frac{\alpha + a_n}{a_n\alpha + 1 + \alpha^2} < \frac{\sqrt{\alpha^2+4}-\alpha}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n < -\alpha + \frac{\sqrt{\alpha^2+4}-\alpha}{2 - \alpha(\sqrt{\alpha^2+4}-\alpha)} = \frac{\sqrt{\alpha^2+4}-\alpha}{2}.$$

In modo analogo si ragiona per la seconda disuguaglianza di $(**)$ e ciò conclude la dimostrazione dei punti *(ii)*, *(iii)*.

(iv). Dunque, le sottosuccessioni dei termini pari e dei termini dispari della successione data convergono entrambe. Posto $b = \lim_{k\to\infty} a_{2k}$, passando al limite nei due termini della relazione ricorsiva

$$a_{n+2} = \frac{\alpha + a_n}{a_n\alpha + 1 + \alpha^2};$$

si ottiene per b la relazione $b = \frac{\alpha+b}{b\alpha+1+\alpha^2}$ ovvero $\alpha(b^2 + b\alpha - 1) = 0$; da cui si deduce che b è uguale all'unica radice positiva di questa equazione, ovvero $b = \dfrac{\sqrt{\alpha^2+4}-\alpha}{2}$. Poichè esiste anche $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = c \geq 0$ e per la successione dei termini di posto dispari vale la stessa relazione ricorsiva discussa in precedenza, si ha

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \frac{\sqrt{\alpha^2+4}-\alpha}{2} = \lim_{k\to\infty} a_{2k-1}.$$

Quindi, fissato comunque un numero reale $\varepsilon > 0$, esistono due indici k_0 e k_1 tali che per $k > k_0$ si abbia $|b - a_{2k}| < \varepsilon$ e per $k > k_1$ si abbia $|b - a_{2k-1}| < \varepsilon$. Fissato un intero $K > \max k_0, k_1$ e posto $n_0 = 2K$, allora, per $n > n_0$ si ha $|b - a_n| < \varepsilon$ e, per l'arbitrarietà del numero reale ε, si conclude che $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\sqrt{\alpha^2+4}-\alpha}{2}$. □

Osserviamo a margine che, seguendo una notazione tradizionale, potevamo scrivere la successione studiata nel punto precedente sotto forma di *frazione continua*, ovvero l'esercizio svolto è una dimostrazione dell'identità

$$\frac{\sqrt{\alpha^2+4}-\alpha}{2} = \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\alpha + \dots}}}}.$$

Lasciamo al lettore un esercizio analogo a quello proposto

Esercizio 4.11. Si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita ricorsivamente ponendo

$$\begin{cases} a_1 = \frac{4}{5} \\ a_{n+1} = \frac{1}{\frac{5}{4}+a_n} \end{cases},$$

(i) Si verifichi che la successione è limitata.
(ii) si verifichi che la sottosuccessione $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente
(iii) si verifichi che la sottosuccessione $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ è decrescente
(iv) si verifichi che le due sottosuccessioni convergono ad uno stesso numero reale x e si deduca che $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

□

Esercizio 4.12. *Dato un numero intero n, si definisce l'intero $S(n)$ come la somma delle cifre che compaiono nella scrittura decimale di n*[(†)]*.*

(i) Si dimostri che la successione $(S(n))_{n\in\mathbb{N}}$ è illimitata.
(ii) Si verifichi che per ogni intero n vale la disuguaglianza

$$0 \leq S(n) \leq 9(\log_{10}(n) + 1).$$

(iii) Si calcoli $\lim_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n}$.

Svolgimento. Si osservi che $S(10^k - 1) = 9k$ e la successione $(9k)_{k\in\mathbb{N}}$ è divergente; quindi la successione $(S(n))_{n\in\mathbb{N}}$ è illimitata.

Dato un numero intero positivo n, esiste un numero intero non negativo m tale che $10^m \leq n < 10^{m+1}$ e, in particolare ciò significa che

- si ha $m \leq \log_{10}(n) < m + 1$, perchè il logaritmo è una funzione crescente;
- vi sono esattamente $m + 1$ cifre nella scrittura decimale di n.

Poichè le cifre decimali sono numeri compresi tra 0 e 9, se ne deduce che

$$0 \leq S(n) \leq 9(m + 1) \leq 9(\log_{10}(n) + 1).$$

Infine, dividendo per n la disuguaglianza testè dimostrata, si ottiene

$$0 \leq \frac{S(n)}{n} \leq 9\frac{\log_{10}(n) + 1}{n},$$

che, per il principio dei Carabinieri, permette di concludere $\lim_{n\to\infty} \frac{S(n)}{n} = 0$. □

Esercizio 4.13. *Sia $\alpha \geq 0$ un numero reale e si consideri la successione $(y_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ di termine generale*

$$y_n(\alpha) = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \sqrt{\cdots\cdots + \sqrt{\alpha}}}} \qquad [n \text{ addendi}]$$

(i) Si dimostri che la successione è crescente e superiormente limitata e se ne calcoli il limite in funzione del numero reale α.

(†) Ad esempio si ha: $S(15) = 1 + 5 = 6$, $S(21) = 3$, $S(125) = 8$, $S(99) = 18$, $S(100) = 1$, ecc.

(ii) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata di numeri reali non negativi. Si dimostri che la successione di termine generale

$$x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{\cdots\cdots + \sqrt{a_n}}}}$$

è crescente e superiormente limitata e quindi convergente.

Svolgimento. (i). Si osservi che $y_n(\alpha) = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \sqrt{\cdots\cdots + \sqrt{\alpha}}}}$, ove nella somma compaiono n-addendi e quindi il termine successivo $y_{n+1}(\alpha)$ si ottiene da $y_n(\alpha)$ sostituendo nella radice più interna il numero $\alpha + \sqrt{\alpha}$ in luogo di α. Poichè $\alpha + \sqrt{\alpha} \geq \alpha$, ne consegue che $y_{n+1}(\alpha) \geq y_n(\alpha)$ ovvero che la successione data è crescente (debolmente).

Osserviamo che, dalla definizione dei termini della successione, discende la relazione $y_{n+1}(\alpha)^2 = \alpha + y_n(\alpha)$. Inoltre, dal fatto che $y_{n+1}(\alpha) \geq y_n(\alpha)$, si ottiene che tutti i termini della successione data devono soddisfare alla disuguaglianza

$$y_n(\alpha)^2 \leq \alpha + y_n(\alpha).$$

Dunque, osservando che si ha $y^2 - \alpha - y \leq 0$ solo se $\frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2} \leq y \leq \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$, si conclude che deve aversi

$$0 \leq y_n(\alpha) \leq \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2},$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque la successione data è crescente e superiormente limitata, e perciò convergente. Indicato con $y(\alpha)$ il suo limite, deve essere $y(\alpha) \geq 0$ e, dalla relazione ricorsiva $y_{n+1}(\alpha)^2 = \alpha + y_n(\alpha)$, si deduce, passando al limite, che $y(\alpha)$ deve soddisfare alla relazione

$$y(\alpha)^2 - \alpha - y(\alpha) = 0,$$

e quindi che $y(\alpha) = \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$.

(ii). Poichè $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata di numeri reali non negativi, deve esistere una costante $M > 0$ tale che $0 \leq a_n \leq M$, qualunque sia il numero naturale n. Ragionando come nel punto precedente si ha che il termine x_{n+1} si ottiene dal termine x_n) sostituendo nella radice più interna il numero $a_n + \sqrt{a_{n+1}}$ in luogo di a_n. Poichè $a_n + \sqrt{a_{n+1}} \geq a_n$, ne consegue che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente (debolmente).

Si osservi poi che, essendo $0 \leq a_n \leq M$, per ogni indice n, possiamo dedurre che $x_n \leq y_n(M) \leq y(M)$, sempre per ogni indice. Dunque la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e superiormente limitata e quindi convergente. □

Osservazione. [*limite superiore e limite inferiore*] È ben noto che esistono successioni numeriche che non hanno limite né finito né infinito: la successione delle potenze di -1 può essere presa come esempio di questa situazione. Vogliamo introdurre le nozioni di *limite inferiore* e *limite superiore* di una successione di numeri reali, ed illustrare le loro relazioni con il limite della successione stessa, quando questi esiste.

Cominciamo considerando un caso particolare. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata di numeri reali. Ciò significa che esiste un numero reale M tale che $-M < a_n < M$ per ogni n e quindi, fissato un qualunque indice k, l'insieme

$$S_k = \{\, a_n \,|\, n \geq k \,\}$$

ha sia un estremo superiore M_k che un estremo inferiore m_k. Facendo variare k tra i numeri naturali, si costruiscono due successioni di numeri reali

$$m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq \dots \qquad \text{ed} \qquad M_1 \geq M_2 \geq M_3 \geq \dots$$

monotone (perchè $S_{k+1} \subset S_k$) e limitate e perciò convergenti. Si pone quindi

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} m_k = m \qquad \text{e} \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} M_k = M$$

ed essendo $m_k \le a_k \le M_k$, per ogni indice k, si conclude che $m \le M$. Inoltre, per il 'principio dei carabinieri', se $m = M$ tale valore è anche il limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vogliamo mostrare

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \ell = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Abbiamo già visto che la condizione è sufficiente; per vedere che è necessaria, basta osservare che, in corrispondenza ad ogni numero reale positivo ε, esiste un indice n_0 tale che per $n \ge n_0$ si abbia $|a_n - \ell| < \varepsilon$ ovvero, $S_k \subset [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ per $k \ge n_0$ e quindi $\ell - \varepsilon \le m_k \le M_k \le \ell + \varepsilon$ per $k \ge n_0$. Ciò permette di concludere.

Le definizioni di limite inferiore e limite superiore possono essere estese ad una successione qualsiasi di numeri reali, ponendo le convenzioni

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{se } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ non è limitata inferiormente}$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{se } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ non è limitata superiormente.}$$

Anche in questo caso

$$\lim_{n\to\infty} a_n \text{ esiste} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Per rendere più familiari al lettore questi concetti, osserviamo ad esempio che $\limsup_{n\to\infty} a_n < 1$ se esiste un numero reale $c < 1$ ed un indice n_0 tali che, per $n \ge n_0$, si abbia $a_n < c$ ed analogamente $\liminf_{n\to\infty} a_n > 1$ se esiste un numero reale $d > 1$ ed un indice n_0, tali che per $n \ge n_0$ si abbia $a_n > d$.

Esercizio 4.14. Si dica se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\log n] + 2n}{\sqrt{n^5}},$$

ove $[\log n]$ indica la parte intera del numero reale $\log n$. □

Esercizio 4.15. *Si calcoli*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(\sqrt{11^{3n}})}{n!}.$$

Svolgimento. Si osservi che $\dfrac{\log(\sqrt{11^{3n}})}{n!} = \dfrac{3\log(11)}{2(n-1)!}$, quindi cambiando l'indice di somma in $k = n - 1$, la serie in questione è uguale alla serie $\dfrac{3\log(11)}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ che converge a $\dfrac{3e\log(11)}{2}$. □

Esercizio 4.16. *Si mostri che la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{3} + n\frac{\pi}{2})}{\sqrt{3^n}}$$

converge assolutamente e se ne calcoli la somma.

Svolgimento. Si osservi che, per ogni intero n, si ha

$$\frac{|\sin(\sqrt{3}+n\frac{\pi}{2})|}{\sqrt{3^n}} \leq \frac{1}{(\sqrt{3})^n}$$

e la serie geometrica di ragione $\frac{1}{\sqrt{3}}$ converge. Dunque, per il criterio del confronto, la serie proposta converge assolutamente. Per calcolarne la somma riordiniamo i termini della serie tenendo conto del fatto che il numeratore può assumere solo quattro valori distinti al variare di n. Tali operazioni di riordino e raggruppamento dei termini della serie sono lecite perchè la serie proposta converge assolutamente.

Possiamo quindi osservare che

$$\sin(\sqrt{3}+n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} \sin\sqrt{3} & \text{se } n = 4k \\ \cos\sqrt{3} & \text{se } n = 1+4k \\ -\sin\sqrt{3} & \text{se } n = 2+4k \\ -\cos\sqrt{3} & \text{se } n = 3+4k \end{cases}$$

e quindi possiamo scrivere che la somma della serie in questione è uguale a

$$\sin\sqrt{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{3})^{4k}} + \cos\sqrt{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{3})^{1+4k}} - \sin\sqrt{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{3})^{2+4k}} - \cos\sqrt{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{3})^{3+4k}} =$$
$$= \left(\sin\sqrt{3} + \frac{\cos\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\sin\sqrt{3}}{3} - \frac{\cos\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{3})^{4k}}$$

ed osservando che

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{3})^{4k}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{9^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8},$$

si conclude il calcolo. □

Esercizio 4.17. Si mostri che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(\sqrt{5}+n\frac{\pi}{2})}{\sqrt{5^n}}$$

converge assolutamente e se ne calcoli la somma. □

Esercizio 4.18. *Si determinino i numeri reali a, b per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)^n}{e^{2n}n!}$$

converge per ogni $x \in (a,b)$ e diverge se $x \notin [a,b]$.

Svolgimento. Applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti e consideriamo quindi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}|x|^{n+1}}{e^{2(n+1)}(n+1)!}\,\frac{e^{2n}n!}{n^n|x|^n} = \frac{|x|}{e^2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{|x|}{e}.$$

Dunque, la serie proposta converge se $\frac{|x|}{e} < 1$, ovvero se $|x| < e$, e diverge per $|x| > e$. Ciò risponde completamente alla domanda posta. □

Esercizio 4.19. *Si consideri la funzione di variabile reale*

$$f(x) = \frac{2e^{\frac{-1}{(x-[x])^2}}}{(x-[x])^3},$$

ove, come di consueto, $[x]$ indica la parte intera del numero reale x. Si calcoli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n n} \int_n^{n+1} f(x)\,dx.$$

Svolgimento. Consideriamo l'integrale

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_n^{n+1} \frac{2e^{\frac{-1}{(x-n)^2}}}{(x-n)^3}\,dx,$$

perchè $[x] = n$ per ogni $x \in [n, n+1)$. Si verifica facilmente che $e^{\frac{-1}{(x-n)^2}}$ è una primitiva della funzione integranda e tramite questa si può calcolare l'integrale, al variare di n. Altrimenti, con il cambiamento di variabile $y = x - n$, si vede che, qualunque sia n, l'integrale è uguale a

$$\int_0^1 \frac{2e^{\frac{-1}{y^2}}}{y^3}\,dx = \lim_{a\to 0^+} [e^{-1} - e^{\frac{-1}{a^2}}] = \frac{1}{e}.$$

Dunque la serie proposta è

$$\frac{1}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1/2)^n}{n}$$

e ricordando che, per $|x| < 1$, si ha $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, si conclude che la somma della serie in questione è $\frac{1}{e}\log(3/2)$. □

Esercizio 4.20. Si dica se converge la serie $\sum_{n\geq 2} \frac{3-n}{n^3-n}$ e se ne calcoli la somma. □

Esercizio 4.21. Si dica per quali valori di α converge la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(1/n)}{(1+n)^\alpha}.$$

□

Svolgimento. Osserviamo che la serie in questione ha tutti i termini positivi, e che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin(1/n)}{(1+n)^\alpha}}{\frac{1}{n^{\alpha+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} \frac{n^\alpha}{(1+n)^\alpha} = 1.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie proposta converge se, e solo se, converge la serie armonica generalizzata di esponente $\alpha + 1$. Deve quindi aversi $\alpha > 0$. □

Esercizio 4.22. Si dica per quali valori di α converge la serie

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(1+n^2)^\alpha}\cos\Big(\frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{n})\Big).$$

$\square$

Esercizio 4.23. *Si enunci il cosiddetto criterio della radice sulla convergenza di serie a termini non negativi e se ne illustri l'applicazione allo scopo di determinare i numeri reali α per cui la serie*

$$\sum_{n\geq 1} e^{\frac{n^2\alpha}{n+\alpha(\alpha-1)}}$$

converge.

Svolgimento. Possiamo enunciare la seguente[†]

Proposizione. *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini reali non negativi. Allora:*

(i) se $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=c<1$, la serie converge;

(ii) se $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=c>1$ la serie diverge.

Nel caso della serie proposta, la radice n-esima del termine generale è uguale a

$$e^{\frac{n\alpha}{n+\alpha(\alpha-1)}}.$$

Essendo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\alpha}{n+\alpha(\alpha-1)}=\alpha,$$

possiamo concludere che la serie proposta converge se $e^\alpha<1$, ovvero se $\alpha<0$, e diverge se $e^\alpha>1$. Infine, è facile verificare che anche per $\alpha=0$ la serie diverge perchè il suo termine generale diventa costantemente uguale ad 1. $\square$

Complementi sui criteri di convergenza assoluta. Abbiamo già osservato che i concetti di $\limsup$ e $\liminf$ permettono di enunciare in modo più generale i criteri del rapporto e della radice. In realtà, si può affermare che, *data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, a termini non-negativi, la serie converge se $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=c<1$, ovvero se esiste un indice n_0 tale che, per $n\geq n_0$, si abbia $\sqrt[n]{a_n}<c<1$.* Infatti, sotto tali ipotesi, si ha $a_n<c^n$ per ogni $n\geq n_0$ e quindi, per il criterio del confronto la serie converge perchè è definitivamente maggiorata dalla serie geometrica di ragione c, con $0<c<1$. Inoltre, si può affermare che *la serie diverge se esiste un indice n_0 tale che, per $n\geq n_0$, si abbia $\sqrt[n]{a_n}\geq 1$;* perchè, in tal caso, il termine generale della serie non tende a zero; in particolare ciò accade se $\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=c>1$.

Analogamente, il criterio del rapporto può essere formulato nel modo seguente. *Data una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, a termini reali positivi. La serie converge se $\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=c<1$, mentre la serie diverge se esiste un indice n_0 tale che, per $n\geq n_0$, si abbia $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$; in particolare, ciò accade se $\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=c>1$.*

In questa sezione, vogliamo mettere in evidenza le relazioni che ci sono tra i limiti superiore ed inferiore dei rapporti e delle radici dei termini di una successione. Precisamente vale questo fatto:

[†] Si vedano le osservazioni della sezione successiva per una formulazione più generale di questo criterio.

Osservazione. *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali positivi. Allora*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

dim. Supponiamo che la successione dei quozienti $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sia limitata. Fissato un indice m, consideriamo i due numeri (non-negativi)

$$\lambda_m = \inf\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid n \geq m \right\} \qquad \text{e} \qquad \mu_m = \sup\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid n \geq m \right\}.$$

Scelto comunque un intero $n > m$, si ha

$$\frac{a_n}{a_m} = \frac{a_{m+1}}{a_m}\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{m+(n-m-1)}};$$

da cui si deduce che

$$\lambda_m^{n-m} \leq \frac{a_n}{a_m} \leq \mu_m^{n-m}$$

qualunque sia l'intero $n > m$. Poichè tutti i termini della successione sono positivi, da queste disuguaglianze si deduce che

$$\frac{a_m}{\lambda_m^m}\lambda_m^n \leq a_n \leq \frac{a_m}{\mu_m^m}\mu_m^n \qquad \text{e quindi che} \qquad \sqrt[n]{\frac{a_m}{\lambda_m^m}}\lambda_m \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{a_m}{\mu_m^m}}\mu_m$$

qualunque sia l'intero $n > m$. Considerando i limiti superiori ed inferiori per $n \to \infty$ si ottengono le disuguaglianze

$$(*) \qquad \lambda_m \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \mu_m$$

perchè, essendo m un intero fissato, si ha[(†)]

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_m}{\lambda_m^m}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_m}{\lambda_m^m}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_m}{\lambda_m^m}} = 1.$$

Poichè le disuguaglianze valgono qualunque sia m, si conclude che

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \sup_m \lambda_m \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \inf_m \mu_m = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Lasciamo al lettore il compito di adattare la dimostrazione al caso in cui la successione dei rapporti $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ non sia limitata. □

Lasciamo al lettore il compito di dedurre le conseguenze di queste disuguaglianze sull'utilizzo dei due criteri. Concludiamo invece questa breve sezione introducendo un nuovo criterio per la convergenza assoluta di una serie.

(†) Il lettore più attento avrà notato che quanto scritto qui sotto perde di senso se $\lambda_m = 0$, ma restano ovviamente vere anche in quel caso le disuguaglianze $(*)$.

Proposizione. [Criterio di Raabe] *Sia* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri reali positivi. La serie* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *converge se esistono un numero* $\alpha > 1$ *ed un opportuno indice* n_0*, tali che*

$$n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) \geq \alpha \qquad \textit{per ogni } n \geq n_0.$$

dim. Sia $\beta = \alpha - 1$ ed n un qualsiasi indice maggiore di n_0. Allora si ha

$$n(b_n - b_{n+1}) \geq (\beta + 1)b_{n+1} \qquad \text{e quindi} \qquad \frac{nb_n - (n+1)b_{n+1})}{\beta} \geq b_{n+1}$$

per ogni $n \geq n_0$. Dunque, qualunque sia l'intero positivo k, si hanno quindi le disuguaglianze

$$\begin{aligned}
b_{n_0+1} &\leq \frac{n_0}{\beta}b_{n_0} - \frac{(n_0+1)}{\beta}b_{n_0+1} \\
b_{n_0+2} &\leq \frac{n_0+1}{\beta}b_{n_0+1} - \frac{(n_0+2)}{\beta}b_{n_0+2} \\
&\vdots \\
b_{n_0+k} &\leq \frac{n_0+(k-1)}{\beta}b_{n_0+(k-1)} - \frac{(n_0+k)}{\beta}b_{n_0+k}
\end{aligned}$$

da cui si deduce che

$$b_{n_0+1} + b_{n_0+2} + \cdots + b_{n_0+k} \leq \frac{n_0}{\beta}b_{n_0} - \frac{(n_0+k)}{\beta}b_{n_0+k} \leq \frac{n_0}{\beta}b_{n_0},$$

perchè i termini della successione b_n sono tutti positivi. Dunque tutte le somme parziali della serie di termine generale b_n sono maggiorate da una stessa costante e questo è sufficiente perchè una serie a termini positivi converga. □

II
Calcolo

1. Funzioni di variabile reale.

Esercizio 1.1. *Si consideri la funzione $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$, definita ponendo*

$$f(x) = \begin{cases} r - \sqrt{-2rx - x^2} & \text{per } x \in [-r, 0] \\ r - \sqrt{2rx - x^2} & \text{per } x \in (0, r] \end{cases}.$$

(i) Si dica per quali valori di x la funzione f è continua e derivabile.
(ii) Si determinino i punti di massimo e minimo relativo ed assoluto per la funzione f.
(iii) Si tracci un grafico approssimativo della funzione proposta.

Svolgimento. Si osservi che f è definita in tutti i punti dell'insieme di definizione, in quanto

$$-2rx - x^2 \geq 0 \iff -2r \leq x \leq 0 \qquad \text{e} \qquad 2rx - x^2 \geq 0 \iff 0 \leq x \leq 2r.$$

Essendo composizione di funzioni continue e derivabili, anche f è tale per $x \in (-r, 0) \cup (0, r)$. Si osservi che

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x),$$

e quindi f è continua in tutto l'insieme di definizione (compresi gli estremi).

Per quanto riguarda la derivabilità, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x + r}{\sqrt{-2rx - x^2}} & \text{per } x \in (-r, 0) \\ \dfrac{x - r}{\sqrt{2rx - x^2}} & \text{per } x \in (0, r) \end{cases}$$

e dunque $f(x)$ è crescente per $x \in (-r, 0)$ ed è decrescente per $x \in (0, r)$.

Infine, si osservi che

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = +\infty = \lim_{x \to 0^+} f(x),$$

e quindi f non è derivabile per $x = 0^{(*)}$. Possiamo quindi rispondere alla questione posta in *(i)* affermando che f è continua in $[-r, r]$ e derivabile in $(-r, 0) \cup (0, r)$.

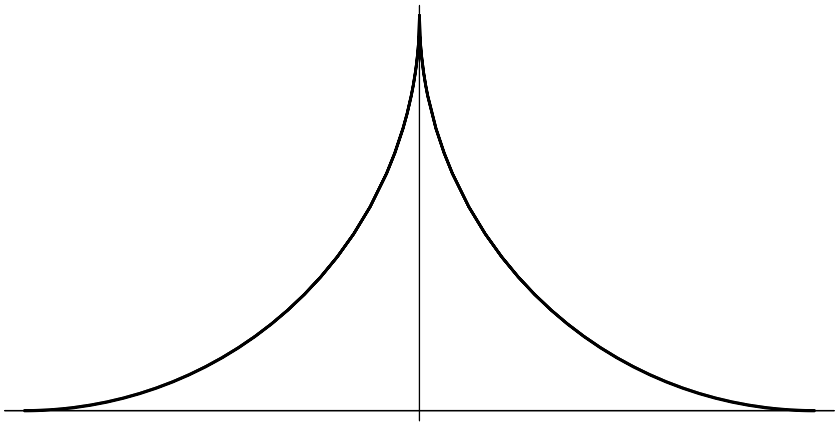
Osserviamo da ultimo che ai bordi dell'insieme di definizione, si ha $f'_+(-r) = 0 = f'_-(r)$.

(ii) Per quanto già osservato sulla crescenza di f, si ha che $x = 0$ è un punto di massimo relativo ed assoluto per la funzione f, mentre gli estremi dell'intervallo $[-r, r]$ sono punti di minimo assoluto.

(iii) Un grafico approssimativo per la funzione proposta è il seguente

---

(*) Si osservi che, se una funzione $f(x)$ è continua nel punto x_0 ed è derivabile in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, per qualche $\delta > 0$, allora il rapporto incrementale $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ soddisfa alle ipotesi del Teorema di de L'Hôpital e quindi, se esiste $\lim_{x \to x_0} f'(x)$, questo coincide con il limite del rapporto incrementale.



e ciò conclude la discussione. □

Lasciamo al lettore la discussione dell'analogo problema, posto nel seguente

Esercizio 1.2. Si consideri la funzione $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$, definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2} & \text{per } x \in [-r, 0] \\ r - \sqrt{2rx - x^2} & \text{per } x \in (0, r] \end{cases}.$$

(i) Si dica per quali valori di x la funzione f è continua e derivabile.
(ii) Si determinino i punti di massimo e minimo relativo ed assoluto per la funzione f.
(iii) Si tracci un grafico approssimativo della funzione proposta. □

Esercizio 1.3. Si determini, se esiste, il cilindro di volume massimo tra quelli inscritti nella sfera di raggio r. □

Esercizio 1.4. Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{|x| - 1}{x^2 - |x| + 1}$$

e si tracci un grafico indicativo del suo andamento. □

Esercizio 1.5. *Si determinino i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$, per cui la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x < -1 \\ \sqrt{|x|} & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile nel punto $x = -1$.

Svolgimento. La funzione $f(x)$ è continua e derivabile nel punto $x = -1$ se, e solo se, la retta di equazione $y = ax + b$ è la tangente al grafico di $g(x) = \sqrt{|x|}$ nel punto $x = -1$. La retta tangente ha equazione $y - 1 = g'(-1)(x + 1)$ (g è derivabile per $x \neq 0$), e quindi, essendo $g'(-1) = -\frac{1}{2}$, deve aversi $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$. □

Esercizio 1.6. *Sia D l'insieme di definizione della funzione*

$$f(x) = \log\left(e^{1-x^2} - \frac{x+1}{2x^2 - 3}\right).$$

(i) Si determini l'insieme $A = D \cap (-1, 2]$.

(ii) Si dica quante soluzioni ha l'equazione

$$e^{1-x^2} = \frac{x+1}{2x^2-3}$$

sulla semiretta $(-\infty, -1]$.

Svolgimento. Si considerino le funzioni

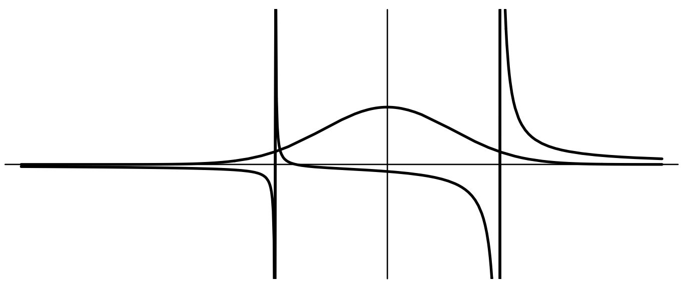
$$\phi(x) = e^{1-x^2} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{x+1}{2x^2-3};$$

ove la ϕ è definita (continua e derivabile) su ogni punto della retta reale, mentre $g(x)$ è definita per $x \neq \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Dunque, D è l'insieme

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq \pm\sqrt{\frac{3}{2}},\ \phi(x) > g(x) \right\}.$$

Per determinare l'insieme $A = D \cap (-1, 2]$, studiamo rapidamente i grafici delle funzioni $\phi(x)$ e $g(x)$.

- La funzione $\phi(x)$ è sempre positiva, ed è crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$, come si può verificare facilmente, osservando che $\phi'(x) = -2xe^{1-x^2}$. Il suo valore massimo (assoluto e relativo) è $\phi(0) = e$ e si ha
$$\lim_{x\to-\infty} \phi(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} \phi(x).$$
- La funzione $g(x)$ è continua e derivabile nel suo insieme di definizione e si ha
$$\begin{cases} g(x) > 0 & \text{se } x \in (-\sqrt{\frac{3}{2}}, -1) \cup (\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty) \\ g(x) < 0 & \text{se } x \in (\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}) \cup (-1, \sqrt{\frac{3}{2}}) \end{cases},$$
e
$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\sqrt{\frac{3}{2}}^{\pm}} g(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to\sqrt{\frac{3}{2}}^{\pm}} g(x) = \pm\infty.$$
Inoltre, essendo
$$g'(x) = -\frac{2x^2+4x+3}{(2x^2-3)^2}, \qquad \text{per ogni } x \neq \pm\sqrt{\frac{3}{2}},$$
si deduce che $g(x)$ è decrescente nei tratti di retta ove è continua. Infine, si ha $g(-1) = 0$, e $g(2) = \frac{3}{5} > e^{-3} = \phi(2)$, perchè $e^3 > 2^3 = 8 > \frac{5}{3}$.
Dunque possiamo tracciare i seguenti grafici per le due funzioni



In base a ciò si osservi che l'unico punto di intersezione tra i due grafici nella semiretta negativa, deve avere un'ascissa $\alpha < -1$, perchè, come abbiamo osservato, $g(-1) = 0$ e g è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$.

Dunque si può concludere che

$$A = D \cap (-1, 2] = (-1, \sqrt{\frac{3}{2}}).$$

Inoltre, per $x < -\sqrt{\frac{3}{2}}$, si ha $g(x) < 0 < \phi(x)$ e quindi sulla semiretta $(-\infty, 1]$ non vi possono essere delle soluzioni diverse da α dell'equazione $\phi(x) = g(x)$. □

Lasciamo al lettore il compito di discutere i seguenti esercizi

Esercizio 1.7. Si determini l'insieme D di definizione della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2+1}{\cos x}\right)$$

e si calcoli il limite della derivata prima di f nei punti del bordo di D.

Si dica inoltre, se la funzione $f'(x)$ si annulla in qualche punto dell'insieme $D \cap (0, \pi)$ □

Esercizio 1.8. Si studi la funzione $f(x) = \log(\sqrt{1+e^{2x}} - e^x)$. □

Esercizio 1.9. *Si studi la funzione* $f(x) = \dfrac{e^{\frac{x+1}{x-2}}}{x-2}$.

Svolgimento. La funzione è definita, continua e derivabile per $x \neq 2$, e si ha

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0,$$

ove il primo dei due limiti è di immediata verifica, mentre il secondo si presenta in una forma indeterminata $(\frac{0}{0})$ e può essere calcolato nel modo seguente: dopo la sostituzione $t = \frac{x+1}{x-2}$, il limite proposto risulta uguale al limite $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \frac{(t-1)e^t}{3} = 0$.

Inoltre,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

perchè in entrambo i casi il numeratore della frazione che definisce $f(x)$, tende ad un limite finito, mentre il denominatore diverge.

Possiamo quindi passare ad occuparci della derivata prima, che è uguale a

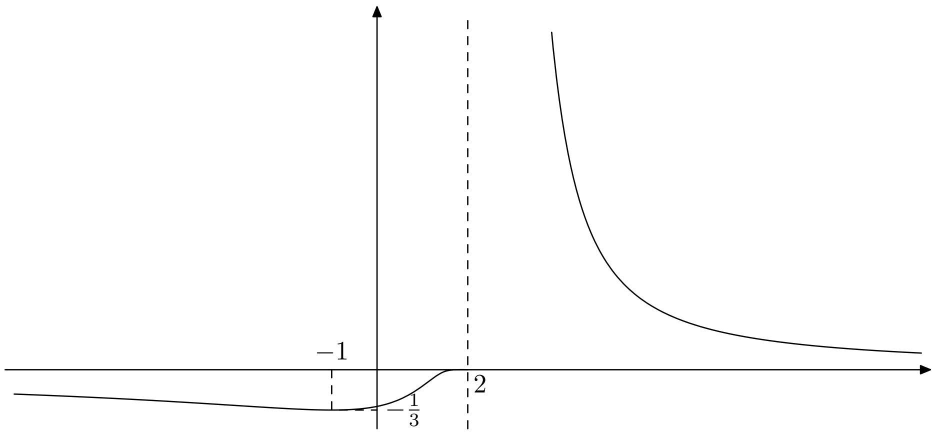
$$f'(x) = -\frac{x+1}{x-2}\frac{e^{\frac{x+1}{x-2}}}{(x-2)^2},$$

e quindi il segno di $f'(x)$ dipende solo dal primo fattore e perciò si ha che

- $f(x)$ è decrescente per $x < -1$ e per $x > 2$, mentre
- $f(x)$ è crescente per $-1 < x < 2$.

Dunque, $x = -1$ è un punto di minimo relativo (ed assoluto) per $f(x)$, mentre, per quanto già visto, f è illimitata superiormente. In particolare, $f(-1) = -\frac{1}{3}$.

In base ai dati raccolti possiamo già tracciare il seguente grafico indicativo dell'andamento della funzione f.



Invitiamo comunque il lettore a studiare anche il segno della derivata seconda della funzione proposta, onde ottenere un risultato più preciso. □

Proponiamo al lettore i seguenti esercizi

Esercizio 1.10. Si determini il sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}$ ove la funzione

$$f(x) = \frac{2(\cosh x + 1)}{e^{-x} - 2}$$

è continua e crescente e si determinino gli eventuali punti di massimo e minimo relativo per la funzione f.
Si tracci un grafico approssimativo della funzione. □

Suggerimento. Nello svolgimento dell'esercizio soprastante può essere utile ricordare che $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ e che, dopo tale osservazione, si verifica facilmente che la funzione proposta è una funzione composta, ovvero

$$f(x) = g(h(x)) \qquad \text{ove} \quad h(x) = e^x \quad \text{e} \quad g(y) = \frac{y^2 + 2y + 1}{1 - 2y}.$$

Esercizio 1.11. Si determini il sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}$ ove la funzione

$$f(x) = \frac{5 - 2\sinh x}{e^x - 1}$$

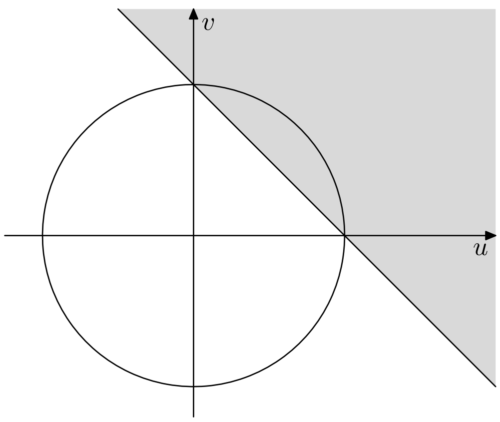
è continua e crescente e si determinino gli eventuali punti di massimo e minimo relativo per la funzione f.
Si tracci un grafico approssimativo della funzione. □

Esercizio 1.12. *Si studi la funzione* $f(x) = \log(\log(\cos x + \sin x))$.

Svolgimento. La funzione data è definita nell'insieme

$$D = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \cos x + \sin x > 1 \,\},$$

ovvero i valori di x, per cui i punti $(\cos x, \sin x)$ della circonferenza unitaria $u^2 + v^2 = 1$ del piano u, v stanno nel semipiano $u + v > 1$; ovvero, guardando allo schizzo sottostante, ci interessa l'arco di circonferenza contenuto nel semipiano ombreggiato, privato del bordo.



Si può quindi concludere che l'insieme di definizione della funzione proposta è

$$D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi, \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi);$$

e, ricordando che le funzioni trigonometriche sono funzioni periodiche di periodo 2π, possiamo limitarci a studiare la funzione nel sottoinsieme

$$D_0 := D \cap [0, 2\pi] = (0, \tfrac{\pi}{2}).$$

Nell'insieme D_0, $f(x)$ è una funzione continua e derivabile in quanto composizione di funzioni continue e derivabili.

Nell'insieme D_0, $f(x)$ è una funzione continua e derivabile in quanto composizione di funzioni continue e derivabili. Il comportamento al bordo di tale insieme si determina, osservando che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{t\to 1^+} \log(\log t) = -\infty \qquad \text{ed, analogamente} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} = -\infty.$$

La derivata della funzione proposta è uguale a

$$f'(x) = \frac{1}{\log(\cos x + \sin x)} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}, \qquad \text{per ogni } x \in D.$$

Osservando che, nei punti di D si ha $\cos x + \sin x > 1$, si può affermare che il segno del primo fattore è positivo e che perciò, il segno di $f'(x)$ è determinato dal segno del secondo fattore, ovvero dal segno del suo numeratore, visto che il denominatore è sempre maggiore di 1.

Possiamo restringerci a considerare $f'(x)$ nel sottoinsieme D_0 e ricordare che

$$\cos x > \sin x \text{ per } 0 < x < \tfrac{\pi}{4}, \qquad \text{e} \qquad \cos x < \sin x \text{ per } \tfrac{\pi}{4} < x < \tfrac{\pi}{2}.$$

Si conclude quindi che, nell'intervallo D_0,
- la funzione è crescente per $0 < x < \frac{\pi}{4}$
- la funzione è decrescente per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$
- il punto $x = \frac{\pi}{4}$ è un punto di massimo (relativo ed assoluto) per la funzione $f(x)$.

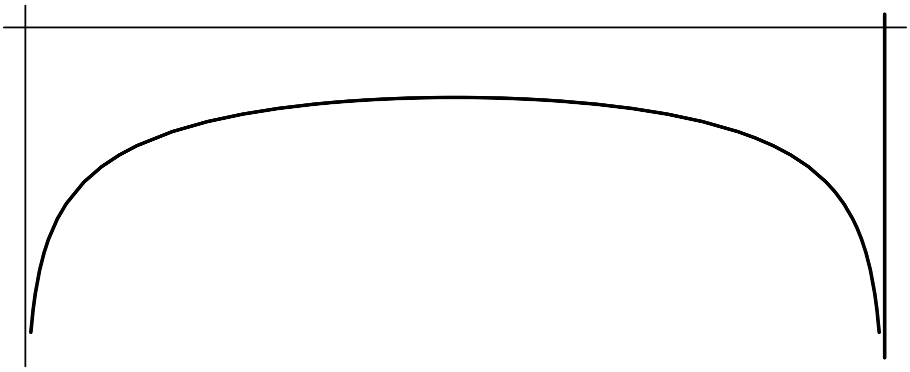
Si osservi inoltre che $f(\frac{\pi}{4}) = \log(\log\sqrt{2}) < 0$.

Le informazioni sin qui raccolte potrebbero già essere sufficienti per tracciare un grafico indicativo del comportamento della funzione f; per una maggior precisione, possiamo osservare che la derivata seconda della funzione proposta è

$$f''(x) = -\frac{1}{[\log(\cos x + \sin x)]^2} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)^2 - \frac{2}{(\cos x + \sin x)^2 \log(\cos x + \sin x)},$$

che è minore di zero in ogni punto di D, quindi $f(x)$ è concava (convessa verso l'alto) in ogni punto di D.

Raccogliendo quindi le informazioni sin qui ottenute, possiamo tracciare il seguente grafico, indicativo del comportamento della funzione proposta sul sottoinsieme D_0.



Ciò conclude la discussione. □

Proponiamo al lettore di svolgere i seguenti esercizi.

Esercizio 1.13. Si studi la funzione $f(x) = \log(\log(\cos x - \sin x))$. □

Esercizio 1.14. Si studi la funzione $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$. □

Esercizio 1.15. Si studi la funzione $f(x) = \log|\operatorname{tg} x|$. □

Esercizio 1.16. Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(x\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\right).$$

(i) Si determini il sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}$ ove la funzione è definita e si dica per quali punti di D la funzione è continua e derivabile.
(ii) Si determini il sottoinsieme di D ove f è crescente e si dica quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 0$ nell'insieme $D \cap [0, 2\pi]$.
(iii) Si tracci un grafico approssimativo della funzione.
(iv) Si calcoli (se esiste) $\lim_{x\to 0^+} xf(x)$. □

Passiamo ora ad un altro problema.

Esercizio 1.17. *Si dica quante soluzioni ha l'equazione* $a^x = x^{3\log x}$ *al variare di* a *nella semiretta* $(0, +\infty)$.

Svolgimento. Osserviamo che, affinchè il secondo membro dell'uguaglianza abbia senso, deve essere $x > 0$; inoltre, poichè

$$a^x = e^{x\log a} \qquad \text{ed} \qquad x^{3\log x} = e^{3(\log x)^2},$$

l'equazione $a^x = x^{3\log x}$ è equivalente all'equazione $x\log a = 3(\log x)^2$, ovvero

$$\log a = \frac{3(\log x)^2}{x}.$$

Si tratta quindi di studiare, al variare di a nella semiretta $(0, +\infty)$, quante intersezioni vi sono tra la retta orizzontale $y = \log a$ ed il grafico della funzione $\phi(x) = \dfrac{3(\log x)^2}{x}$.

La funzione $\phi(x)$ è definita per $x \in (0, +\infty)$ ed in tale insieme è continua e derivabile (un numero qualsiasi di volte). Inoltre,

$$\lim_{x\to 0^+} \phi(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0.$$

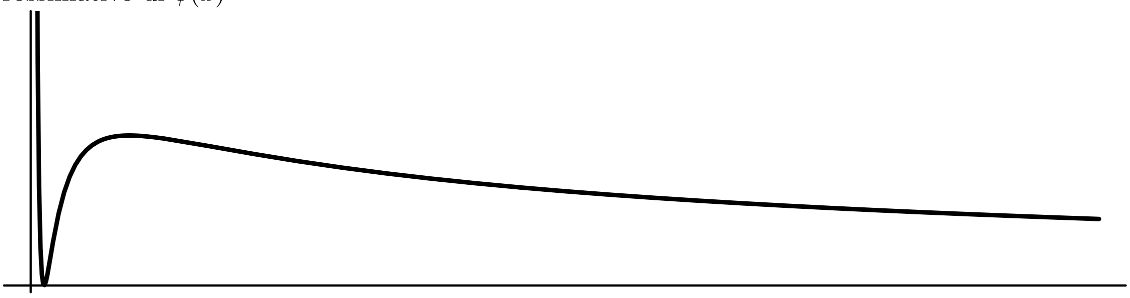
Si ha

$$\phi'(x) = \frac{6\log x - 3(\log x)^2}{x^2},$$

e quindi possiamo scrivere la seguente tabella in cui è schematizzata la variazione di segno della derivata.

$0 < x < 1$	si ha $\log x < 0$	e quindi $\phi'(x) < 0$
$1 < x < e^2$	si ha $0 < \log x < 2$	e quindi $\phi'(x) > 0$
$e^2 < x$	si ha $\log x > 2$	e quindi $\phi'(x) < 0$

Da ciò discende che $\phi(x)$ ha un minimo relativo ed assoluto per $x = 1$ e si ha $\phi(1) = 0$ ed ha un massimo relativo per $x = e^2$ con $\phi(e^2) = 12e^{-2}$; tale valore non è un massimo assoluto perchè $\phi(x)$ è illimitata superiormente come si è visto calcolando $\lim_{x\to 0^+} \phi(x)$. Possiamo quindi disegnare un grafico approssimativo di $\phi(x)$



e siamo in grado di rispondere alla domanda iniziale:

$0 < a < 1$	$\log a < 0$	non vi sono soluzioni all'equazione
$a = 1$	$\log a = 0$	vi è 1 soluzione all'equazione
$1 < a < e^{12e^{-2}}$	$0 < \log a < 12e^{-2}$	vi sono 3 soluzioni all'equazione
$a = e^{12e^{-2}}$	$\log a = 12e^{-2}$	vi sono 2 soluzioni all'equazione
$e^{12e^{-2}} < a$	$12e^{-2} < \log a$	vi è 1 soluzione all'equazione

Ciò risponde completamente alla questione posta. □

Esercizio 1.18. Si dica quante soluzioni ha l'equazione $x^a = e^x$ al variare di $a \in \mathbb{R}$. □

Esercizio 1.19. *Sia $n \geq 2$ un numero intero e si consideri la funzione reale, di variabile reale*

$$\phi_n(x) = x^n e^{-|x|} .$$

(i) Si determini, al variare di n, l'insieme D_n dei punti di $\mathbb{R}$ ove ϕ_n è continua e derivabile.
(ii) Si determinino, al variare di n, gli eventuali punti di massimo e minimo relativo ed assoluto per la funzione ϕ_n.
(iii) Si determini, al variare di n il sottoinsieme dell'insieme D_n ove ϕ_n è convessa verso l'alto e gli eventuali punti di flesso.
(iv) Si tracci un grafico approssimativo di tali funzioni.

Svolgimento. *(i)* La funzione $\phi_n(x)$ è prodotto di funzioni continue su tutta la retta reale e quindi è anch'essa una funzione continua. Inoltre, per $x \neq 0$ tutte le funzioni componenti sono derivabili e perciò lo stesso vale per ϕ_n. Per quanto riguarda la derivata di ϕ_n nel punto $x = 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\phi_n(x) - \phi_n(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\phi_n(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x^{n-1}e^{-|x|} = 0,$$

perchè $n \geq 2$. Si conclude perciò che $D_n = \mathbb{R}$ per ogni intero $n \geq 2$.

Osserviamo inoltre che

$$(*) \qquad \lim_{x\to+\infty}\phi_n(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty}\phi_n(x),$$

in quanto il fattore $e^{-|x|}$ decide del comportamento del limite(*)
(ii) La derivata della funzione $\phi_n(x)$ è uguale a

$$\phi_n'(x) = (n-|x|)x^{n-1}e^{-|x|} = \begin{cases} (nx^{n-1}-x^n)e^{-x} & \text{per } x \geq 0 \\ (nx^{n-1}+x^n)e^{x} & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$

Da ciò si deduce che la derivata prima si annulla per $x = -n, 0, n$ e, inoltre il segno della derivata prima dipende dalla parità di n nel modo descritto nella seguente tabella.

	$x < -n$	$-n < x < 0$	$0 < x < n$	$n < x$
n pari	$\phi_n'(x) > 0$	$\phi_n'(x) < 0$	$\phi_n'(x) > 0$	$\phi_n'(x) < 0$
n dispari	$\phi_n'(x) < 0$	$\phi_n'(x) > 0$	$\phi_n'(x) > 0$	$\phi_n'(x) < 0$

Possiamo quindi concludere distinguendo i due casi.

Se n *è pari*, allora $\phi_n(x)$ è crescente in $(-\infty,-n)\cup(0,n)$ ed è decrescente in $(-n,0)\cup(n,+\infty)$. Dunque i punti $x = \pm n$ sono *punti di massimo relativo*, mentre $x = 0$ è un *punto di minimo relativo*. Ora $\phi_n(0) = 0$ e $\phi_n(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; quindi $x = 0$ è anche un *punto di minimo assoluto* per $\phi_n(x)$. Inoltre, per quanto visto in $(*)$, i punti $x = \pm n$ sono *punti di massimo assoluto* e si ha $\phi_n(\pm n) = n^n e^{-n}$.

Se n *è dispari*, allora $\phi_n(x)$ è crescente in $(-n,n)$ ed è decrescente in $(-\infty,-n)\cup(n,+\infty)$. Dunque il punto $x = n$ è un *punto di massimo relativo*, mentre $x = -n$ è un *punto di minimo relativo*. Inoltre, per quanto visto in $(*)$, il punto $x = n$ è un *punto di massimo assoluto* mentre $x = -n$ è un *punto di minimo assoluto* e si ha $\phi_n(\pm n) = \pm n^n e^{-n}$.

(iii) Per quanto riguarda la convessità delle funzioni ϕ_n, possiamo studiare il segno della derivata seconda. Si ha

$$\phi_n''(x) = [n(n-1)-2n|x|+x^2]x^{n-2}e^{-|x|} = \begin{cases} [n(n-1)x^{n-2}-2nx^{n-1}+x^n]e^{-x} & \text{per } x \geq 0 \\ [n(n-1)x^{n-2}+2nx^{n-1}+x^n]e^{x} & \text{per } x < 0 \end{cases},$$

ove la derivabilità in $x = 0$ si deduce osservando che ϕ_n' è continua in tal punto e

$$\lim_{x\to0^+}\phi_n''(x) = \lim_{x\to0^-}\phi_n''(x), \qquad \text{per ogni } \; n \geq 2.$$

Si considerino quindi i punti

$$x_1 = -n-\sqrt{n}, \quad x_2 = -n+\sqrt{n}, \quad x_3 = n-\sqrt{n}, \quad x_4 = n+\sqrt{n},$$

ove si annulla la derivata seconda. Possiamo riassumere le conclusioni sul segno della derivata seconda nella seguente tabella, ove il segno + indica che $\phi_n''(x)$ è positiva, mentre il segno - indica che la derivata seconda è negativa nell'intervallo sopra indicato.

(*) Ad esempio, considerando il primo dei due limiti, la verifica è immediata, se si osserva che

$$\lim_{x\to+\infty}\phi_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}$$

e si applica la regola di de L'Hôpital. In modo analogo si ragiona per l'altro.

	$x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x_2 < x < 0$	$0 < x < x_3$	$x_3 < x < x_4$	$x_4 < x$
n pari	+	-	+	+	-	+
n dispari	-	+	-	+	-	+

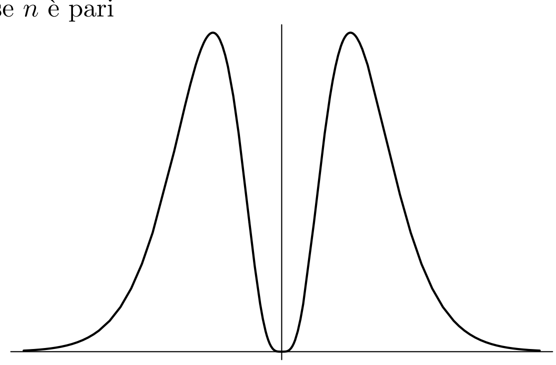
Possiamo quindi concludere distinguendo i due casi.

Se n *è pari*, allora $\phi_n(x)$ è convessa (verso il basso) in $(-\infty, -n-\sqrt{n}) \cup (-n+\sqrt{n}, n-\sqrt{n}) \cup (n+\sqrt{n}, +\infty)$ ed è concava (convessa verso l'alto) in $(-n-\sqrt{n}, -n+\sqrt{n}) \cup (n-\sqrt{n}, n+\sqrt{n})$. Dunque i punti di flesso sono x_1, x_2, x_3, x_4.

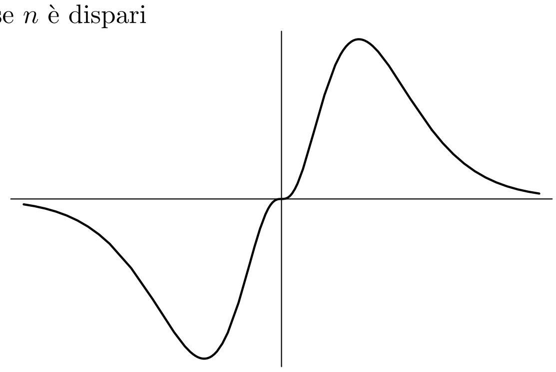
Se n *è dispari*, allora $\phi_n(x)$ è convessa (verso il basso) in $(-\infty, -n-\sqrt{n}) \cup (-n+\sqrt{n}, 0) \cup (n-\sqrt{n}, n+\sqrt{n})$ ed è concava (convessa verso l'alto) in $(-n-\sqrt{n}, -n+\sqrt{n}) \cup (n-\sqrt{n}, n+\sqrt{n})$. Dunque i punti di flesso sono x_1, x_2, x_3, x_4 ed inoltre il punto $x_0 = 0$ che è un punto di flesso con tangente orizzontale.

(iv) Riassumendo le considerazioni sin qui fatte, possiamo concludere che il grafico di $\phi_n(x)$ è, approssimativamente

se n è pari



se n è dispari



Ciò conclude la discussione. □

Lasciamo al lettore diligente la discussione del seguente problema.

Esercizio 1.20. Si considerino, al variare di n tra i numeri interi positivi, le seguenti funzioni reali di variabile reale

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^n \sin(\log x) & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \psi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^n \cos(\log x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(i) Si dimostri che, fissato comunque un intero $k \geq 0$, vale l'implicazione

$$\phi_n, \psi_n \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; \phi_{n+1}, \psi_{n+1} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}).$$

Si dica inoltre, per quali valori di n si ha $\phi_n, \psi_n \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$.

(ii) Sia $n \geq 1$ un numero intero fissato. Si dimostri che, per $x \to 0^+$, la funzione ϕ_n è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad x^α, per $0 < \alpha < n$, ma non è confrontabile con x^α, per $\alpha \geq n$.

(iii) Si dica per quali valori di x si ha $\psi_n(x) = 0$. □

Passiamo ora a considerare un altro problema e, prima di esporlo richiamiamo la definizione di alcune funzioni, che utilizzeremo nel seguito.

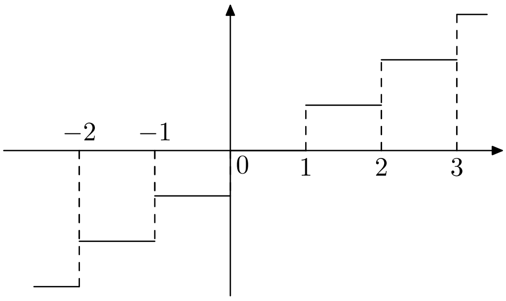
La prima tra queste è la funzione che ad ogni numero reale x associa la sua *parte intera* $[x] \in \mathbb{Z}$, ovvero

$$[x] := \max\{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \,\}.$$

Si ha quindi $[\sqrt{2}] = 1$, $[\pi] = 3$, $[-e] = -3$, $[7] = 7$ ed inoltre valgono le seguenti proprietà

$$[x+1] = [x] + 1, \qquad [x] \le x < [x] + 1, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R};$$

proprietà che discendono facilmente dalla definizione. Si può tracciare un grafico indicativo dell'andamento della funzione nel modo seguente

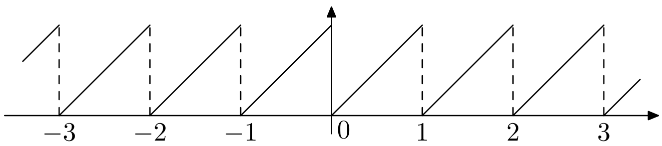


Si osservi che, se $n \in \mathbb{Z}$, allora $[n] = n$, e quindi ognuno dei 'gradini' che compongono il grafico di $[x]$ contiene il punto iniziale, ma è privo del punto finale.

Una funzione collegata alla parte intera è la cosiddetta *parte frazionaria*, ovvero la funzione $\{x\} = x - [x]$, che associa ad ogni numero reale la sua differenza dal massimo intero che lo precede. Si han quindi le proprietà fondamentali

$$0 \le \{x\} < 1, \qquad \{x+1\} = \{x\} \qquad \text{valide per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Ovvero, la funzione $\{x\}$ è una funzione limitata e periodica, di periodo 1 ed è continua e derivabile nei punti $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Un grafico indicativo dell'andamento di $\{x\}$ è il seguente.



Passiamo quindi ad un nuovo esercizio

Esercizio 1.21. *Si consideri il polinomio* $P(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$ *e la funzione composta* $\psi(x) = P(x - [x])$, *ove, come di consueto,* $[x]$ *indica la parte intera del numero reale* x.

(i) Si determini il sottoinsieme della retta reale ove ψ *è continua e derivabile e se ne calcoli la derivata prima.*

(ii) Si tracci un grafico indicativo dell'andamento della funzione $\psi(x)$.

(iii) Si calcoli $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}$.

(iv) Si calcolino i numeri reali: $a_n = \int_0^{n+\frac{1}{3}} \psi(x)dx$, *al variare di* n *tra i numeri naturali, e* $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Svolgimento. (i),(ii) Poichè la funzione $\{x\} = x - [x]$ è una funzione periodica, di periodo 1, ne consegue che la funzione $\psi(x)$ ripete su ogni intervallo $(n, n+1)$ $(n \in \mathbb{Z})$, che abbia come estremi due interi successivi, il comportamento della funzione polinomiale $P(x)$ sull'intervallo $(0,1)$ e quindi, sui punti di tali intervalli aperti è una funzione continua e derivabile.

Inoltre, per ogni intero n, si ha

$$\lim_{x\to n^-} \psi(x) = \lim_{x\to 1^-} P(x) = P(1) = \frac{1}{6} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to n^+} \psi(x) = \lim_{x\to 0^+} P(x) = P(0) = \frac{1}{6};$$

e quindi $\psi(x)$ è una funzione continua su tutta la retta reale.

Applicando, ad esempio, il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ottiene

$$\psi'(x) = P'(x - [x]) = 2(x - [x]) - 1, \qquad \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z};$$

e, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ha

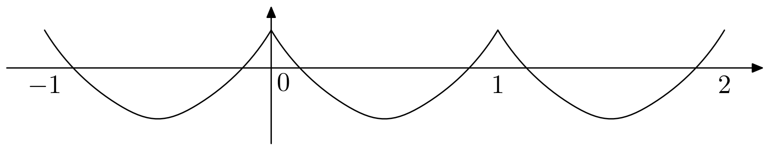
$$\lim_{x\to n^-} \psi'(x) = \lim_{x\to 1^-} P'(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to n^+} \psi'(x) = \lim_{x\to 0^+} P'(x) = -1.$$

Da ciò discende che $\psi(x)$ non è derivabile nei punti a coordinate intere.

Dall'espressione esplicita di $\psi'(x)$, discende che

- $\psi'(x) < 0$ se, e solo se, $x - [x] < \frac{1}{2}$ e quindi se $n < x < n + \frac{1}{2}$, al variare di $n \in \mathbb{Z}$;
- $\psi'(x) > 0$ se, e solo se, $x - [x] > \frac{1}{2}$ e quindi se $n + \frac{1}{2} < x < n + 1$, al variare di $n \in \mathbb{Z}$;

si conclude che i punti di coordinate intere sono punti di massimo (relativo ed assoluto) per ψ, mentre i punti di coordinate $\frac{1}{2} + n$, al variare di $n \in \mathbb{Z}$, sono punti di minimo (relativo ed assoluto) per ψ. In particolare, si ha $\psi(\frac{1}{2} + n) = P(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{12}$ e siamo in grado di tracciare il seguente grafico indicativo dell'andamento della funzione $\psi(x)$.



(iii) Nella discussione precedente, abbiamo osservato che $\psi(x)$ è una funzione limitata su tutta la retta reale ed abbiamo determinato il valore massimo ed il valore minimo di ψ; quindi si hanno le disuguaglianze

$$-\frac{1}{2x} \leq \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{1}{6x}$$

da cui si deduce, per il criterio di confronto che $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\psi(x)}{x} = 0$.

(iv) Abbiamo già osservato che ψ è una funzione periodica di periodo 1 e quindi

$$a_n = \int_0^{n+\frac{1}{3}} \psi(x)dx = n \int_0^1 \psi(x)\,dx + \int_0^{\frac{1}{3}} \psi(x)\,dx.$$

Per $0 \leq x < 1$, si ha $\psi(x) = P(x)$, e quindi si tratta di calcolare

$$\int_0^1 P(x)dx = \left[\frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{1}{6}X\right]_0^1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_0^{\frac{1}{3}} P(x)dx = \left[\frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{1}{6}X\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{81}.$$

Dunque, per ogni numero naturale n, si ha $a_n = \displaystyle\int_0^{n+\frac{1}{3}} \psi(x)dx = \frac{1}{81}$, e perciò $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{81}$. □

Esercizio 1.22. *Si consideri il polinomio $P(X) = X - X^2$ e la funzione*

$$f(x) = \frac{|\sin(\pi x)|}{P(x - [x])},$$

ove, come di consueto, $[x]$ indica la parte intera del numero reale x.

(i) Si determini l'insieme D ove f è definita e continua e si mettano in evidenza eventuali periodicità o simmetrie di tale funzione.

(ii) Si calcolino i limiti di f al bordo dell'insieme D e si dica se esiste una funzione continua, definita su tutta la retta reale, che coincida con f sull'insieme D.

(iii) Si determinino (se esistono) i sottoinsiemi di D ove f è crescente e si determinino eventuali punti di massimo o minimo relativo ed assoluto per f. Si tracci infine un grafico approssimativo della funzione f.

Svolgimento. (i) Il polinomio $P(X) = X - X^2$ si annulla in 0 ed 1, quindi, essendo $0 \leq x - [x] < 1$ per ogni numero reale x, si ha che il denominatore di $f(x)$ si annulla quando $x = [x]$, ovvero per $x \in \mathbb{Z}$. Dunque, f è definita in $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, ed è continua e derivabile in tutti i punti di D.

Inoltre, sia il numeratore che il denominatore sono funzioni periodiche, di periodo 1; quindi lo stesso si può dire per f. Ci limiteremo perciò a studiare l'andamento di f nell'insieme $[0, 1] \cap D = (0, 1)$ ed osserviamo che si ha

$$f(x) = g(x) := \frac{\sin(\pi x)}{x - x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = g(1 - x) \qquad \text{per ogni } x \in (0, 1).$$

(ii) Allora, per le considerazioni fatte sulla periodicità e la simmetria, si ha

$$\lim_{x\to n^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to n^+} f(x) \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z};$$

e inoltre,

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \frac{\pi}{1 - x} = \pi.$$

Dunque $f(x)$ è una funzione limitata, e coincide su D con la funzione $F(x)$, continua su tutta la retta reale, definita nel modo seguente

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{|\sin(\pi x)|}{P(x - [x])} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ \pi & \text{se } x \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

(iii) Abbiamo già detto che, in base alla periodicità, possiamo restringerci a studiare la restrizione di f all'intervallo $(0, 1)$, ovvero la funzione g sullo stesso intervallo. Inoltre, ricordando la simmetria del grafico di g rispetto alla retta verticale $x = \frac{1}{2}$, possiamo limitarci a considerare la restrizione di g all'intervallo $(0, \frac{1}{2})$.

Essendo

$$g'(x) = \frac{\pi\cos(\pi x)(x - x^2) - (1 - 2x)\sin(\pi x)}{(x - x^2)^2} \qquad \text{per ogni } x \in (0, 1),$$

dobbiamo studiare il segno del numeratore

$$u(x) = \pi\cos(\pi x)(x - x^2) - (1 - 2x)\sin(\pi x)$$

nell'intervallo $(0, \frac{1}{2})$. Osserviamo che $u(0) = 0 = u(\frac{1}{2})$ e che la derivata di $u(x)$ è uguale ad

$$u'(x) = \pi^2 \sin(\pi x)(\tfrac{2}{\pi^2} - x + x^2).$$

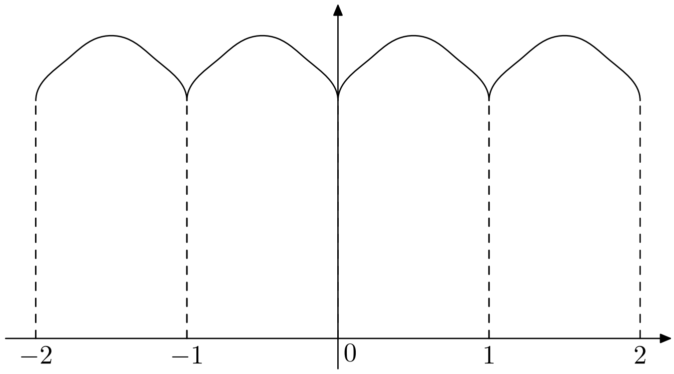
Quindi, se $x \in (0, \frac{1}{2})$, si ha

$$u'(x) > 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < \alpha_1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{\pi^2-8}}{2\pi} \qquad \text{e} \qquad u'(x) < 0 \quad \text{per} \quad \alpha_1 < x < \tfrac{1}{2}$$

e perciò, nei punti interni all'intervallo $(0, \frac{1}{2})$, la funzione $u(x)$ assume valori maggiori di $u(0) = 0 = u(\frac{1}{2})$ ed è perciò positiva.

In tal modo si conclude che $g(x)$ è crescente nell'intervallo $(0, \frac{1}{2})$ e, per simmetria, è decrescente nell'intervallo $(\frac{1}{2}, 1)$. Ricordando le relazioni esistenti tra f e g, si conclude che, $f(x)$ assume un valore massimo (relativo ed assoluto) in tutti i punti $x = \frac{1}{2} + n$, al variare di $n \in \mathbb{Z}$, e si ha $f(\frac{1}{2} + n) = 4$. Nei punti $x = n \in \mathbb{Z}$, la funzione $f(x)$ non è definita ed, al tendere della variabile verso tali punti, i valori di $f(x)$ tendono al loro estremo inferiore, uguale a $\pi^{(*)}$.

Siamo perciò in grado di tracciare un grafico indicativo dell'andamento di f



ove la linea tratteggiata ricorda che nei punti $x = n \in \mathbb{Z}$ la funzione f non è definita. □

Esercizio 1.23. Si consideri il polinomio $P(X) = X - X^2$ e la funzione

$$f(x) = \frac{|\cos(\pi(x + \frac{1}{2}))|}{P(x - [x])},$$

ove, come di consueto, $[x]$ indica la parte intera del numero reale x.

(a) Si determini l'insieme D ove f è definita e continua e si mettano in evidenza eventuali periodicità o simmetrie di tale funzione.

(b) Si calcolino i limiti di f alla frontiera dell'insieme D e si dica se esiste una funzione continua, definita su tutta la retta reale, che coincida con f sull'insieme D.

(c) Si determinino (se esistono) i sottoinsiemi di D ove f è crescente e si determinino eventuali punti di massimo o minimo relativo ed assoluto per f. Si tracci infine un grafico approssimativo della funzione f. □

Esercizio 1.24. *Si consideri la funzione composta $\phi(x) = g(h(x))$, ove $g(y) = \frac{y^2-y}{y^2-y-2}$ ed $h(x) = x - [x]$ e, come di consueto, $[x]$ indica la parte intera del numero reale x. Si dica se ϕ è continua e derivabile almeno 3 volte nel punto $x_0 = \frac{3}{2}$, ed in caso affermativo, si scriva il polinomio di Taylor di grado ≤ 3 associato alla funzione ϕ nel punto x_0.*

Svolgimento. Abbiamo già osservato che $h(x) = x - [x]$ è una funzione periodica, di periodo 1, e che è continua e derivabile (fino a qualsiasi ordine) in tutti i punti di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Inoltre, poichè l'insieme di definizione di g contiene l'intervallo $[0, 1]$, la funzione composta è continua e derivabile (fino a qualsiasi ordine) in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ e quindi, in particolare nel punto $x = \frac{3}{2}$.

Essendo $x - [x] = x - 1$ per $x \in (1, 2)$, si ha

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \phi(\tfrac{3}{2}) + \phi'(\tfrac{3}{2})(x - \tfrac{3}{2}) + \phi''(\tfrac{3}{2})\frac{(x - \frac{3}{2})^2}{2} + \phi'''(\tfrac{3}{2})\frac{(x - \frac{3}{2})^3}{3!} + o((x - \tfrac{3}{2})^3) \\
&= g(\tfrac{1}{2}) + g'(\tfrac{1}{2})(x - \tfrac{3}{2}) + g''(\tfrac{1}{2})\frac{(x - \frac{3}{2})^2}{2} + g'''(\tfrac{1}{2})\frac{(x - \frac{3}{2})^3}{3!} + o((x - \tfrac{3}{2})^3) \\
&= \tfrac{1}{9} - \tfrac{32}{81}(x - \tfrac{3}{2})^2 + o((x - \tfrac{3}{2})^3)
\end{aligned}$$

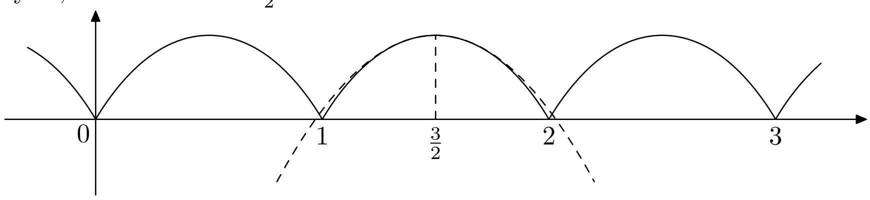
(*) Osserviamo che i punti $x = n \in \mathbb{Z}$ sono punti di minimo (relativo ed assoluto) per la funzione $F(x)$, ma F non è derivabile, come si vede facilmente considerando il limite sinistro del rapporto incrementale; infatti, si ha

$$\lim_{x \to n^+} \frac{F(x) - F(n)}{x - n} = \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(\pi x)}{x^2(1 - x)} = +\infty$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Ciò risponde completamente alla domanda posta.

Nella figura sottostante, mostriamo il grafico della funzione $\phi(x)$ nell'intervallo $(1, 2)$ e quello del suo polinomio di Taylor, centrato in $x = \frac{3}{2}$.



Si osservi che la funzione ϕ si annulla agli estremi dell'intervallo e poi ripete il suo comportamento in modo periodico, mentre il grafico del polinomio di Taylor è la parabola soprastante che compare tratteggiata. $\square$

2. Integrali

Esercizio 2.1. *Si calcoli*

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}.$$

Svolgimento. Si osservi che

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \sqrt{x+1}+\sqrt{x},$$

e quindi l'integrale proposto coincide con

$$\int_0^3 (\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\,dx = \left[\frac{2(x+1)^{3/2}}{3} + \frac{2x^{3/2}}{3}\right]_0^3 = .\frac{14}{3} + 2\sqrt{3}$$

e ciò conclude lo svolgimento dell'esercizio proposto. □

Esercizio 2.2. *Si calcoli il seguente integrale indefinito*

$$\int x^2 \ \cos(2x)\,dx$$

Svolgimento. Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int x^2 \ \cos(2x)\,dx &= \frac{1}{2}x^2\sin(2x) - \int x \ \sin(2x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\sin(2x) + \frac{1}{2}x\cos(2x) - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\sin(2x) + \frac{1}{2}x\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + c\end{aligned}$$

che è il risultato richiesto. □

Esercizio 2.3. Si calcoli il seguente integrale indefinito $\displaystyle\int x^2\sin(2x)\,dx$. □

Esercizio 2.4. Si calcoli $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} (4x^3\log x - 2x\sin x)dx$. □

Esercizio 2.5. Si calcoli $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} (3x^2\log x - 2x\cos x)dx$. □

Esercizio 2.6. Si calcoli $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^6}dx$. □

Esercizio 2.7. *Si calcolino i numeri reali*

$$c_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} ([\log x] - \log x + 1)dx,$$

al variare di n tra i numeri interi non–negativi, ove $[\log x]$ indica la parte intera del numero reale $\log x$.

Si calcoli la somma della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}$$

Svolgimento. Si osservi che, se $e^n \le x < e^{n+1}$, allora $n \le \log x < n+1$, e quindi $[\log x] = n$.

Una primitiva di $\log x$ sulla semiretta $(0, +\infty)$ è $x(\log x - 1)$, e quindi si ha

$$c_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} ([\log x] - \log x + 1)dx = [(n+2)x - x\log x]_{e^n}^{e^{n+1}} = e^n(e-2).$$

Si conclude che
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} = (e-2)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} = e^e(e-2),$$
perchè, per ogni numero reale x, si ha $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, ovvero e^x coincide con la somma della sua serie di Mc Laurin su tutta la retta reale. □

Esercizio 2.8. *Si consideri la funzione*
$$F(x) = \int_1^x \frac{2t^2 - \sqrt{t} - 1}{\sqrt{t} + 2} dt$$
al variare di x nella semiretta $[0, +\infty)$. Si determinino i coefficienti del polinomio $P(x) = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3$, tale che
$$\lim_{x\to 1} \frac{F(x) - P(x)}{(x-1)^3} = 0.$$

Svolgimento. Per definizione, $P(x)$ deve essere il polinomio di Taylor di $F(x)$, centrato nel punto $x = 1$. Dunque, si ha

$$\begin{aligned}
a_0 &= F(1) = \int_1^1 \frac{2t^2 - \sqrt{t} - 1}{\sqrt{t} + 2} dt = 0;\\
a_1 &= F'(1) = \left.\frac{2x^2 - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2}\right|_{x=1} = 0;\\
a_2 &= \frac{F''(1)}{2!} = \left.\frac{6x^2 + 16x\sqrt{x} - 1}{4(\sqrt{x}+2)^2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = \frac{7}{12};\\
a_3 &= \frac{F'''(1)}{3!} = \left.\frac{2 + 3\sqrt{x} + 64t\sqrt{x} + 36x^2 + 6x^2\sqrt{x}}{24(\sqrt{x}+2)^3 x\sqrt{x}}\right|_{x=1} = \frac{37}{216};
\end{aligned}$$

e quindi, il polinomio cercato è $P(X) = \frac{7}{12}(X-1)^2 + \frac{37}{216}(X-1)^3$. □

Esercizio 2.9. Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$. Si enunci la relazione fondamentale tra $f(x)$ e la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Si applichi tale relazione per calcolare la formula di Mc Laurin arrestata al terz'ordine della funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{3x^2 - 4x + 3}{x^2 + 2}\, dx.$$

□

Esercizio 2.10. *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{x+1}{x(x^2+1)} dx$$

Svolgimento. Si ha

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1-x}{x^2+1};$$

e inoltre

$$\int \frac{1-x}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + c.$$

Si conclude che l'integrale proposto è

$$\int \frac{x+1}{x(x^2+1)} dx = \operatorname{arctg} x + \log \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + c.$$

Ciò conclude la discussione. □

Esercizio 2.11. *Si calcoli* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 6}\, dx.$

Svolgimento. Posto $y = \operatorname{tg} x$, si ha $dy = (1 + \operatorname{tg}^2 x)dx$; e quindi osservando che, quando x varia tra 0 e $\frac{\pi}{4}$, la tangente è una funzione crescente che varia tra 0 ed 1, l'integrale proposto è uguale a

$$\int_0^1 \frac{dy}{y^2 - 5y + 6}.$$

Osservando che

$$\frac{1}{y^2 - 5y + 6} = \frac{-1}{y-2} + \frac{1}{y-3},$$

si conclude che

$$\int_0^1 \frac{dy}{y^2 - 5y + 6} = \left[\log \frac{y-3}{y-2}\right]_0^1 = \log \tfrac{4}{3}.$$

Ciò è quanto si doveva calcolare. □

Esercizio 2.12. Si calcoli

$$\int_2^e \frac{3x^2 - 4x + 3}{x^3 - x^2}\, dx.$$

□

Esercizio 2.13. *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{\sqrt{x-1} - 3}{\sqrt{x-1} + x}\, dx$$

Svolgimento. Si ha

$$\int \frac{\sqrt{x-1}-3}{\sqrt{x-1}+x}\,dx = 2\int \frac{\sqrt{x-1}-3}{2\sqrt{x-1}(1+\frac{x}{\sqrt{x-1}})}\,dx$$

e quindi, ponendo $y=\sqrt{x-1}$ e di conseguenza $dy=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx$, possiamo occuparci dell'integrale

$$2\int \frac{y-3}{1+\frac{y^2+1}{y}}\,dy = 2\int \frac{y^2-3y}{y^2+y+1}\,dy = 2y-2\int \frac{4y+1}{y^2+y+1}\,dy.$$

Si osservi che $y^2+y+1=(y+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ è un polinomio senza radici reali e quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\int \frac{4y+1}{y^2+y+1}\,dy &= 2\int \frac{2y+1}{(y+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dy - \int \frac{1}{(y+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dy\\ &= 2\log(y^2+y+1)-\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}(2y+1)+c.\end{aligned}$$

Ripercorrendo a ritroso i passi sin qui fatti e ricordando le relazioni esistenti tra y ed x, possiamo scrivere

$$\int \frac{\sqrt{x-1}-3}{\sqrt{x-1}+x}\,dx = 2\sqrt{x-1}-4\log(x+\sqrt{x-1})+\frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{x-1}+1)+c$$

e concludere questo lungo calcolo. □

Esercizio 2.14. *Si calcoli*

$$a_n=\int_0^{2\pi}(x^4-4\pi^2x^2)\cos(nx)\,dx,$$

e si dica se converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Svolgimento. Integrando per parti, si ottiene

$$\begin{aligned}\int (x^4-4\pi^2x^2)\cos(nx)\,dx &= \frac{(x^4-4\pi^2x^2)\sin(nx)}{n}+\frac{(4x^3-8\pi^2x)\cos(nx)}{n^2}-\\ &\quad -\frac{(12x^2-8\pi^2)\sin(nx)}{n^3}-\frac{(24x)\cos(nx)}{n^4}+\frac{24\sin(nx)}{n^5}+c;\end{aligned}$$

quindi, calcolando tra 0 e 2π, si ottiene

$$a_n=8\pi\left(\frac{\pi^2}{n^2}-\frac{6\pi}{n^4}\right).$$

Dunque la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ è 'essenzialmente' una serie soddisfacente al Criterio di convergenza di Leibniz(*). Si conclude da ciò che la serie proposta converge. □

(*) Precisamente, per un opportuno indice n_0, si ha $a_n>0$ per $n\ge n_0$ e quindi la serie proposta, dall'indice n_0 in poi, ha i termini di segno alterno ed il termine generale decresce in valore assoluto e converge a zero.

Esercizio 2.15. Determinare il valore del seguente integrale in funzione del parametro n:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\ dx$$

$\square$

Esercizio 2.16. *Si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{\sin^2(t)}{t}dt}{\displaystyle\int_0^x [1-\cos t + 2\log(1+t)]dt}.$$

Svolgimento. Si osservi che il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $(\frac{0}{0})$, perchè entrambe le funzioni integrande sono continue e limitate in prossimità di $x=0$. Inoltre, le funzioni soddisfano alle ipotesi del Teorema di de L'Hôpital, quindi possiamo occuparci del

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{x[1-\cos x + 2\log(1+x)]} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+o(x^2)}{x[\frac{x^2}{2}+2(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))]} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Dunque, poichè esiste il limite del rapporto tra le derivate, esiste anche il limite proposto e coincide con quest'ultimo. $\square$

Esercizio 2.17. Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^x [\operatorname{tg}^2 t + 2e^t - 2]dt}{\displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos t}{t}dt}.$$

$\square$

Esercizio 2.18. *Sia $f: R \to R$ una funzione continua. Dimostrare che*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx.$$

Utilizzare tale risultato per calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\cos x)\, dx$.

Svolgimento. Ricordiamo che, dalle formule di addizione per le funzioni trigonometriche, discende che $\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$ e quindi si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(\tfrac{\pi}{2}-x))\, dx$$

e quest'ultimo, dopo il cambiamento di variabile $y = \frac{\pi}{2} - x$, coincide con

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin y)\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin y)\, dy.$$

Ciò risponde alla prima domanda. Applicando questo risultato all'integrale proposto, si ottiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx = \frac{\pi^2}{8},$$

che conclude la discussione. □

Esercizio 2.19. *Si consideri la successione definita ponendo*

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \displaystyle\int_0^{a_n} xe^{-(1+x^2)}dx \end{cases}.$$

Si calcoli, se esiste, il $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Svolgimento. Si osservi che vale l'implicazione

$$0 < a_n \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < a_{n+1} \leq \frac{a_n}{e};$$

infatti, se $0 < a_n \leq 1$, allora, in base al Teorema della Media, si ha

$$\int_0^{a_n} xe^{-(1+x^2)}dx = a_n\xi e^{-(1+\xi^2)} \qquad \text{per un opportuno } \ \xi \in (0, a_n) \subseteq (0, 1),$$

ed osservando che $0 < \xi e^{-(1+\xi^2)} < e^{-1}$, si ottiene la tesi.

Poichè $0 < a_0 = 1$, per il Principio di Induzione, si conclude che $0 < a_{n+1} \leq \frac{a_n}{e}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi si ha la disuguaglianza

$$0 < a_n \leq \frac{a_{n-1}}{e} \leq \frac{a_0}{e^n} = \frac{1}{e^n}.$$

Applicando il Teorema di confronto (Principio dei Carabinieri), si conclude che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Esercizio 2.20. Si consideri la successione definita ponendo

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \displaystyle\int_0^{a_n} \frac{e^{-x^2}}{2}dx \end{cases}.$$

Si calcoli, se esiste, il $\lim_{n\to\infty} a_n$. □

Esercizio 2.21. *Per ogni intero* $n \geq 1$, *sia* $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \log x\,dx$. *Si calcolino*

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n$.
(b) $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n$.
(c) $\lim_{n\to\infty} (-n^2 a_n)^n$.

Svolgimento. Essendo $n \geq 1$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \log x = 0$$

e quindi la funzione integranda può essere prolungata ad una funzione continua su tutto l'intervallo $[0,1]$; perciò l'integrale proposto è ben definito per ogni intero positivo n. Si osservi inoltre che, integrando per parti, si ha

$$\int x^n \log x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log x - \frac{1}{n+1}\right) + c \qquad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Si conclude che

$$a_n = \int_0^1 x^n \log x\,dx = -\frac{1}{(n+1)^2};$$

e dunque

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{(n+1)^2} = 0 \\
\lim_{n\to\infty} n^2 a_n &= \lim_{n\to\infty} -\frac{n^2}{(n+1)^2} = -1 \\
\lim_{n\to\infty} (-n^2 a_n)^n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{(n+1)^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{2n}} = e^{-2}.
\end{aligned}$$

Fine dell'esercizio. □

Esercizio 2.22. *Si dica se esistono delle costanti $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = a\sin x + b\cos x + c$ soddisfi alle condizioni*

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = 0, \qquad \int_0^\pi x f(x)\,dx = 2, \qquad \int_0^\pi x^2 f(x)\,dx = \frac{\pi^3}{6}.$$

Svolgimento. Usando il fatto che l'integrale è compatibile con la somma di funzioni, le condizioni poste si possono scrivere nella forma

$$\begin{cases} a\int_0^\pi \sin x\,dx + b\int_0^\pi \cos x\,dx + c\int_0^\pi \,dx = 0 \\ a\int_0^\pi x\sin x\,dx + b\int_0^\pi x\cos x\,dx + c\int_0^\pi x\,dx = 2 \\ a\int_0^\pi x^2\sin x\,dx + b\int_0^\pi x^2\cos x\,dx + c\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{\pi^3}{6} \end{cases}$$

Quindi, dopo un calcolo diretto degli integrali che compaiono come coefficienti del sistema lineare, si può scrivere esplicitamente,

$$\begin{cases} 2a + \pi c = 0 \\ \pi a + 2b + \frac{\pi^2}{2}c = 2 \\ (\pi^2+4)a - 2\pi b + \frac{\pi^3}{3}c = \frac{\pi^3}{6} \end{cases}$$

e questo sistema ammette l'unica soluzione $(a,b,c) = (\frac{\pi}{2}, 1, -1)$. □

Esercizio 2.23. Si dica se esistono delle costanti $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che la funzione polinomiale $f(x) = ax^2 + bx + c$ soddisfi alle condizioni

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx = -\frac{5\pi^3}{3}, \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\sin x\,dx = 2\pi, \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\cos x\,dx = 0.$$

□

Esercizio 2.24. Calcolare l'integrale

$$\int_2^3 \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + 9x}\,dx.$$

Si mostri che la funzione $x \mapsto x - \log x$ è una funzione biiettiva dall'intervallo $[2,3]$ all'intervallo $[2-\log 2, 3-\log 3]$. Si deduca da ciò che esiste una funzione continua f tale che

$$f(x - \log x) = \frac{x^2+1}{x^2+9}, \qquad \text{per ogni } x \in [2,3].$$

Infine, si calcoli

$$\int_{2-\log 2}^{3-\log 3} f(x)\, dx$$

ove f è la funzione definita sopra.

(*Sugg. Si usi la formula di cambiamento di variabile senza cercare di determinare esplicitamente* f.) □

Esercizio 2.25. *Si calcoli il seguente integrale*

$$\int_1^2 x \ \log(x-1) \ dx$$

Svolgimento. La funzione integranda è continua sull'intervallo $(1,2]$, ma è illimitata, essendo

$$\lim_{x\to 1^+} x\log(x-1) = -\infty;$$

quindi si tratta di un integrale improprio, ovvero dobbiamo calcolare

$$\lim_{a\to 1^+} \int_a^2 x\log(x-1)\, dx.$$

Integrando per parti, si ha

$$\int x\log(x-1)\, dx = \frac{x^2\log(x-1)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x-1}\, dx = \frac{1}{2}[(x^2-1)\log(x-1) - \frac{x}{2}(x+2)] + c;$$

e quindi

$$\int_a^2 x\log(x-1)\, dx = \frac{1}{2}\left[(x^2-1)\log(x-1) - \frac{x}{2}(x+2)\right]_a^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{2}(a+2) - (a^2-1)\log(a-1)\right] - 2.$$

Infine, si ha

$$\lim_{a\to 1^+} \frac{1}{2}\left[\frac{a}{2}(a+2) - (a^2-1)\log(a-1)\right] - 2 = \frac{3}{4} - 2 = -\frac{5}{4};$$

e questi è il valore dell'integrale improprio proposto. □

Esercizio 2.26. Si calcoli il seguente integrale

$$\int_0^1 (x+1) \ \lg(x) \ dx$$

□

Esercizio 2.27. *Si calcoli*

$$\int_3^{+\infty} \frac{5x-2}{x^3 - x^2 - 4x + 4}\, dx.$$

Svolgimento. Decomponendo la funzione integranda come somma di funzioni razionali elementari, si ottiene

$$\frac{5x-2}{x^3-x^2-4x+4} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{-1}{x+2}$$

e quindi una primitiva della funzione $\frac{5x-2}{x^3-x^2-4x+4}$ è $\log\left(\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x+2)}\right)$; da cui si deduce che

$$\int_3^{+\infty} \frac{5x-2}{x^3-x^2-4x+4}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\log\left(\frac{(b-2)^2}{(b-1)(b+2)}\right) + \log(10)\right] = \log(10).$$

Ciò conclude la discussione. □

Osservazioni. (a). Si osservi che, per $x \in [1,+\infty)$, si ha $0 < \frac{1}{x} \le \frac{1}{[x]}$, ove $[x]$ denota, come di consueto, la parte intera del numero reale x. Inoltre, in ogni intervallo chiuso $[1,b]$, la funzione $\frac{1}{[x]}$ è limitata ed è continua su tale intervallo eccetto al più un numero finito di punti. Dunque esiste finito $\int_1^b \frac{1}{[x]}dx$ e si ha

$$\int_1^b \frac{1}{x}dx \quad\le\quad \int_1^b \frac{1}{[x]}dx \qquad \text{per ogni } b > 1.$$

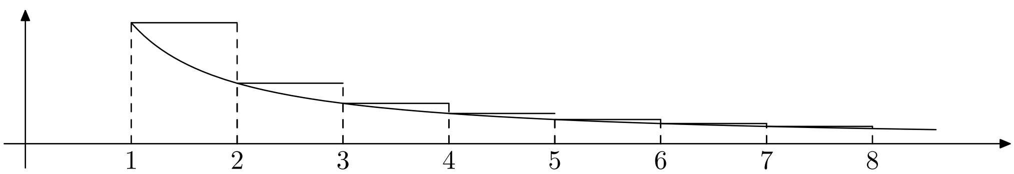
Osservando che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\log b = +\infty,$$

si conclude che entrambi gli integrali divergono. In particolare, ciò significa che

$$+\infty = \lim_{n\to+\infty}\int_1^n \frac{dx}{[x]} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right),$$

e quindi possiamo affermare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge(*). Possiamo quindi disegnare un grafico approssimativo delle due funzioni



(*) Si osservi che, con un ragionamento analogo a quanto appena esposto, si può mostrare che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ diverge se $s \le 1$. D'altro canto, per $x \in [1,+\infty)$ si ha $\frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x}$ e quindi

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{([x]+1)^s} \le \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^s}$$

e quest'ultimo integrale converge se $s > 1$. Se ne deduce che la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ converge se $s > 1$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ è detta la *serie armonica*, mentre la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ è detta la *serie armonica generalizzata* di esponente s.

Vogliamo mostrare che, nonostante gli integrali degli addendi siano entrambi divergenti,

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) dx \quad \text{converge.}$$

Poichè si tratta dell'integrale di una funzione non negativa sulla semiretta $[1, +\infty)$, è sufficiente mostrare che la funzione

$$b \mapsto \int_1^b \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) dx \quad \text{è superiormente limitata.}$$

a tale scopo, basta osservare che, se $b \leq n$, allora

$$\begin{aligned}\int_1^b \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) dx \leq \int_1^n \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) dx \leq \\ \leq \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) dx + \int_2^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) dx + \cdots + \int_{n-1}^n \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) dx = 1 - \frac{1}{n};\end{aligned}$$

da cui si deduce che l'integrale in questione è sempre minore di 1 e quindi l'integrale improprio converge e si pone

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) dx = \gamma \in (0, 1]$$

ed il numero reale γ è detto la *costante di Eulero-Mascheroni*.

(b). Il lettore avrà osservato che i criteri di convergenza degli integrali impropri su una semiretta, riguardano le funzioni non-negative. Se $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora, la funzione $|f(x)|$ è una funzione continua e non-negativa ed a quest'ultima si possono applicare i criteri di convergenza studiati. Vogliamo mostrare che, nell'ipotesi che $f(x)$ sia continua,

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx \quad \text{converge} \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \quad \text{converge.}$$

dim. Si considerino le funzioni $f^+(x)$ ed $f^-(x)$ così definite sulla semiretta $[a, +\infty)$

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

allora si ha

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \quad 0 \leq f^+(x) \leq |f(x)|, \quad 0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|, \quad \text{per ogni } x \in [a, +\infty).$$

Allora, per il criterio del confronto, dalla convergenza di $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ si deduce la convergenza di entrambi gli integrali $\int_a^{+\infty} f^=(x)\, dx$ e $\int_a^{+\infty} f^-(x)\, dx$. Quindi, per i noti risultati sul limite della differenza, si ottiene

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \int_a^{+\infty} f^+(x)\, dx - \int_a^{+\infty} f^-(x)\, dx$$

e quindi l'integrale converge. **CVD** □

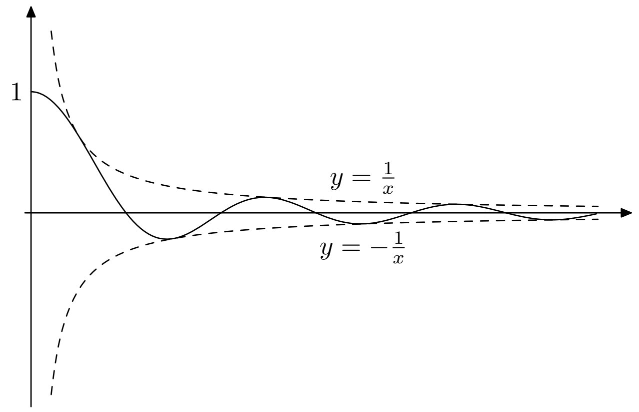
Il lettore tenga ben presente che non è vero il reciproco dell'affermazione appena dimostrata e, a tal proposito, vogliamo dare l'esempio di una funzione continua su una semiretta, il cui integrale improprio converge, ma non converge l'integrale del valore assoluto. Precisamente vogliamo mostrare che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x}\, dx \quad \text{converge} \qquad \text{mentre} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(\pi x)|}{x}\, dx \quad \text{diverge.}$$

Cominciamo con l'osservazione che, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x)}{x} = \pi$ e quindi la funzione in questione si estende ad una funzione continua (e quindi integrabile secondo Riemann) su ogni intervallo chiuso $[0, b]$, al variare di b tra i numeri positivi. Inoltre, per ogni $x > 0$, si ha

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin(\pi x)}{x} \le \frac{1}{x}$$

e perciò il grafico della funzione in questione è approssimativamente descritto nel seguente disegno



ove sono stati disegnati anche i grafici delle funzioni $-\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x}$.

Cominciamo la discussione osservando che, la funzione $\frac{\sin(\pi x)}{x}$ nell'intervallo $[0, 1]$ è positiva ed integrabile e perciò poniamo

$$0 < K = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x}\, dx.$$

Se poi consideriamo un intervallo $[n, n+1]$, con $n \ge 1$, si ha

$$\frac{|\sin(\pi x)|}{n+1} \le \frac{|\sin(\pi x)|}{x} \le \frac{|\sin(\pi x)|}{n} \qquad \text{per ogni } x \in [n, n+1];$$

e quindi un'analoga disuguaglianza vale per gli integrali su $[n, n+1]$ di tali funzioni. Ricordando poi che dalle formule di addizione si ottiene $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$, si conclude che

$$\int_n^{n+1} \sin(\pi x) dx = \int_0^1 \sin(\pi x) dx = 2/\pi.$$

Si ottengono perciò le disuguaglianze

$$(*) \qquad \frac{2/\pi}{n+1} \le \int_n^{n+1} \frac{|\sin(\pi x)|}{x}\, dx \le \frac{2/\pi}{n}$$

da cui si deduce che, se $n \le b$, con $n \in \mathbb{N}$, allora

$$\begin{aligned}
\int_0^b \frac{|\sin(\pi x)|}{x}\, dx \ge \int_0^n \frac{|\sin(\pi x)|}{x}\, dx &= \\
&= \int_0^1 \frac{|\sin(\pi x)|}{x}\, dx + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{|\sin(\pi x)|}{x}\, dx \ge \\
&= K + \frac{2/\pi}{2} + \cdots + \frac{2/\pi}{n} = K - \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Poichè l'integrale in questione maggiora le somme parziali della serie armonica che abbiamo visto essere divergente, si conclude che .

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(\pi x)|}{x}\,dx \quad \text{diverge.}$$

Per mostrare che l'altro integrale in questione converge, ragioniamo nel modo seguente. Sia

$$c_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{x}\,dx$$

ed osserviamo che i termini della successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hanno segno alterno, ovvero i termini di indice pari sono numeri reali positivi, mentre quelli di indice dispari sono negativi. Inoltre, dalle disuguaglianze $(*)$, si ottiene che

$$|c_1| \geq \frac{2/\pi}{2} \geq |c_2| \geq \frac{2/\pi}{3} \geq |c_3| \geq \cdots \geq \frac{2/\pi}{n} \geq |c_n| \geq \frac{2/\pi}{n+1} \geq |c_{n+1}| \geq \ldots$$

ovvero che la successione dei valori assoluti è decrescente e si ha

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

Dunque, per il criterio di Leibniz, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge e si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Ciò conclude la discussione[(†)].

Esercizio 2.28. Si studi la funzione

$$g(x) = \int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\,dt.$$

Si determinino i sottoinsiemi ove g è continua, derivabile e dove è crescente. Si dica se g è limitata superiormente o inferiormente e si tracci un grafico approssimativo dell'andamento della funzione. □

Esercizio 2.29. Si studi la funzione

$$F(x) = \int_0^x (t - [t])\,dt,$$

(†) Il lettore che non conosca questo criterio di convergenza delle serie può dedurre da $(*)$ e dal modo con cui $\sin(\pi x)$ cambia di segno, le disuguaglianze

$$\begin{cases} \frac{2/\pi}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{x}\,dx \leq \frac{2/\pi}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{2/\pi}{n} \leq \int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{x}\,dx - \leq \frac{2/\pi}{n+1} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

e da queste, dedurre che, per ogni numero reale b si ha

$$K - \frac{2}{\pi} \leq \int_0^b \frac{\sin(\pi x)}{x}\,dx \leq K = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x}\,dx.$$

Ciò mostra che l'integrale si mantiene limitato, ma non è sufficiente per mostrare la convergenza.

ove $[t]$ indica, come di consueto, la parte intera del numero reale t. Si determinino i sottoinsiemi ove F è continua, derivabile e si studi la convessità del grafico. Si tracci un grafico approssimativo dell'andamento della funzione. $\square$

Esercizio 2.30. *Si dica per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale*

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha \left(\frac{1 - e^{-1/x^2}}{\sin \sqrt{1/x}} \right) dx \ .$$

Svolgimento. Osserviamo che la funzione integranda è positiva sulla semiretta $[1, +\infty)$, perchè, su tale semiretta $1 - e^{-1/x^2} \geq 1 - e^{-1}$ e $0 < \sin \sqrt{1/x} \geq \sin(1)$. Quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico e cercare di determinare un esponente q tale che

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{1 - e^{-1/x^2}}{\sin \sqrt{1/x}}}{\dfrac{1}{x^q}} = c \neq 0$$

perchè, se un tale esponente esiste allora l'integrale in questione converge se, e solo se, converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha \frac{1}{x^q}\, dx.$$

Il limite proposto, dopo il cambiamento di variabile $y = \frac{1}{x}$, coincide con il

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{1 - e^{-y^2}}{y^q \sin \sqrt{y}};$$

e dalle formule di Mc Laurin per la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche, si ottiene

$$e^{-y^2} = 1 - y^2 + o(y^2), \qquad \text{e} \qquad \sin \sqrt{y} = \sqrt{y} + o(\sqrt{y}).$$

Si conclude che il limite in questione è finito e diverso da zero se, e solo se, $2 = q + \frac{1}{2}$, ovvero che deve aversi $q = \frac{3}{2}$.

Tornando al problema iniziale, si ha quindi che l'integrale proposto converge se, e solo se, converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha \frac{1}{x^{3/2}}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2-\alpha}}\, dx$$

e quest'ultimo converge se, e solo se, $3/2 - \alpha > 1$, ovvero $\alpha < 1/2$. $\square$

Esercizio 2.31. Per quali valori del parametro $\alpha \in R$ converge il seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + \log x}{(x + \cos x)^\alpha}\, dx$$

$\square$

Esercizio 2.32. Per quali valori del parametro α l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha (1-x)^\alpha}\, dx$$

converge? □

Esercizio 2.33. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x\ \log|1+x|}.$$

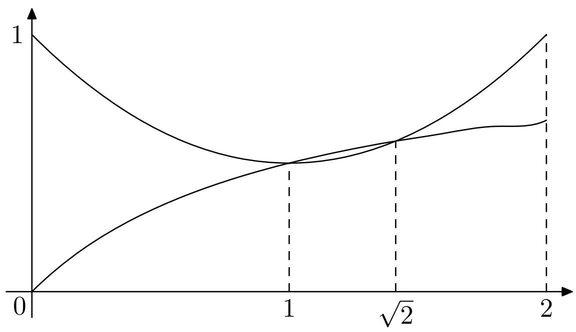
Si dica se esiste finito l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|f(x)|}{x} dx.$ □

Esercizio 2.34. *Si disegni nel piano cartesiano il sottoinsieme*

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 2,\ \tfrac{x}{1+x} \le y \le 1 - x + \tfrac{x^2}{2} \right\}.$$

Si calcolino l'area di S ed il volume del solido che si ottiene ruotando l'insieme S attorno all'asse delle ascisse.

Svolgimento. Cominciamo tracciando un grafico approssimativo delle due funzioni onde determinare S.



Posto $f(x) = \frac{x}{1+x}$ e $g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2}$, si ha

$$g(x) - f(x) = \frac{(x-1)(x^2-2)}{2(x+1)}$$

e quindi, studiando il segno della differenza, si verifica facilmente che l'insieme S è costituito dalle aree delimitate dai due grafici al di sopra degli intervalli $[0,1]$ e $[\sqrt{2}, 2]$.

Si tratta quindi di calcolare

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \int_0^1 (g(x) - f(x))dx + \int_{\sqrt{2}}^2 (g(x) - f(x))dx = \log\frac{6}{1+\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \\
\text{Volume} &= \pi \int_0^1 (g(x)^2 - f(x)^2)dx + \pi \int_{\sqrt{2}}^2 (g(x)^2 - f(x)^2)dx = \\
&= \pi \left[\frac{397}{30} - \frac{11\sqrt{2}}{5} - \frac{1}{1+\sqrt{2}} + 2\log\frac{6}{1+\sqrt{2}} \right]
\end{aligned} .$$

Ciò è quanto richiesto. □

3. Complementi

Formula di Wallis e Formula di Stirling. In questa sezione vogliamo dare due importanti applicazioni delle tecniche del calcolo, ovvero calcolare i due limiti notevoli

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!\,(2n+1)!} \qquad \text{(Formula di Wallis)}}$$

e

$$\boxed{\sqrt{2\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}} \qquad \text{(Formula di Stirling).}}$$

Per prima cosa, osserviamo che il numeratore della frazione $\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdots2n\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}$ è uguale a $2^{2n}(n!)^2$ e quindi, moltiplicando per questo stesso numero numeratore e denominatore, si ottiene la frazione $\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!\,(2n+1)!}$ e quindi l'uguaglianza dei termini delle due successioni che compaiono nella Formula di Wallis.

Osserviamo che, integrando per parti, si ha per $m > 1$,

$$\int \sin^m x\,dx = \int \sin^{m-1} x\, \sin x\,dx = -\sin^{m-1} x\, \cos x + (m-1)\int \sin^{m-2} x(1-\sin^2 x)\,dx;$$

da cui si ottiene la relazione

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\,dx, \qquad \text{per } m > 1.$$

Per $m = 2n$ oppure $m = 2n+1$, si deducono da questa relazione le identità

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n(2n-2)\cdots 2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}.$$

Quindi, ricordando che per $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ si ha $0 \le \sin x \le 1$, si hanno le disuguaglianze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx$$

ovvero

$$\frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} < \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n(2n-2)\cdots 2}\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 3};$$

e da ciò si deducono le disuguaglianze

$$\frac{2n\cdot 2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-2)\cdots 2\cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot(2n-1)\cdots 3\cdot 1} < \frac{\pi}{2} < \frac{2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-2)\cdots 2\cdot 2}{(2n-1)\cdot(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 3\cdot 1}.$$

Posto quindi,

$$a_n = \frac{2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-2)\cdots 2\cdot 2}{(2n-1)\cdot(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 3\cdot 1} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{2n\cdot 2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-2)\cdots 2\cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot(2n-1)\cdots 3\cdot 1} = a_n\frac{2n}{2n+1},$$

è sufficiente mostrare che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente (e quindi convergente), $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e che $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ per ottenere la Formula di Wallis, ovvero $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{2}$. Infatti, con un calcolo diretto si ottiene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n(2n+2)}{(2n+1)^2} < 1, \qquad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} > 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n\left(1 - \frac{2n}{2n+1}\right) = 0.$$

Passiamo ora alla dimostrazione della Formula di Stirling. Poniamo quindi $c_n = \frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}$ e mostriamo che la successione c_n è decrescente e che converge ad un limite $c > 0$; dedurremo poi dalla Formula di Wallis che il valore del limite c è quello atteso.

Osserviamo che

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} e = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}$$

e quindi la successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente se, e solo se,

$$(*) \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > e.$$

Supponiamo che ciò sia vero e poniamo $d_n = c_n e^{-\frac{1}{12n}}$; allora $\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} c_n$ e tale limite è certamente maggiore di zero se dimostriamo che la successione $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente; cioè se si ha

$$(**) \qquad \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{c_{n+1}}{c_n} e^{\frac{1}{12n(n+1)}} > 1 \qquad \text{ovvero} \qquad e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Le disuguaglianze $(*)$ e $(**)$ discendono dal seguente

Lemma. *Sia $0 < x < 1$, allora si ha*

$$1 < \frac{1}{2x}\log\frac{1+x}{1-x} < 1 + \frac{x^2}{3(1-x^2)}.$$

dim. Quando $0 < x < 1$, si ha

$$\begin{aligned}\log\frac{1+x}{1-x} &= \log(1+x) - \log(1-x) = \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\right) + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right) = 2x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots\right),\end{aligned}$$

da cui si deduce che $0 < 2x < \log\frac{1+x}{1-x}$ e inoltre,

$$\frac{1}{2x}\log\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots < 1 + \frac{x^2}{3}(1 + x^2 + x^4 + \dots) = 1 + \frac{x^2}{3(1-x^2)}.$$

e ciò conclude la dimostrazione del Lemma.

Infine, dal Lemma, per $x = \frac{1}{2n+1}$, si deducono le disuguaglianze

$$1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}$$

che sono equivalenti a $(*)$ e $(**)$. Quindi, per quanto visto, $\lim_{n\to\infty} c_n = c > 0$. Ora ricordiamo che, per definizione, $n! = c_n\, e^{-n} n^n \sqrt{n}$ ed osserviamo che

$$\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!\,(2n+1)!} = \frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n)!]^2\,(2n+1)} = \frac{2^{4n}e^{-4n}n^{4n}n^2c_n^4}{(2n)^{4n}e^{-4n}2nc_{2n}^2(2n+1)} = \frac{n^2c_n^4}{2n(2n+1)c_{2n}^2}.$$

Dunque, passando al limite, dalla Formula di Wallis si deduce l'identità

$$\frac{\pi}{2} = \frac{c^2}{4} \qquad \text{ovvero} \qquad c^2 = 2\pi,$$

che ci permette di concludere □

Riordinando i temini di una serie (semplicemente) convergente. Nelle somme finite l'ordine con cui si presentano gli addendi non ha alcuna influenza sul valore della somma. La cosa non è più vera quando si passa alle somme di serie; ovvero, per una serie semplicemente convergente, modificando l'ordine con cui si sommano i termini della serie si può modificarne la somma[(†)]. Daremo degli esempi di questo fatto usando una ben nota serie semplicemente convergente, ovvero $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, che converge (cf. ad esempio il Criterio di Leibniz), ma ha come serie dei valori assoluti la serie armonica, che è divergente.

Cominciamo ricordando un risultato che ci sarà utile nei successivi calcoli. Dato un intero $k \geq 1$, si consideri $\sigma_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$, e si osservi che si ha

$$\lim_{k\to+\infty}(\sigma_k - \log k) = \lim_{k\to+\infty}(\sigma_k - \log(k+1) - \log \frac{k}{k+1}) = \gamma$$

perchè

$$\lim_{k\to+\infty} \log \frac{k}{k+1} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{k\to+\infty}(\sigma_k - \log(k+1)) = \lim_{k\to+\infty} \int_1^{k+1} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) dx = \gamma,$$

ove $\gamma \in (0,1)$ è la costante di Eulero-Mascheroni.

Questa osservazione ci permette di calcolare esplicitamente la somma S; infatti, si osservi che, per ogni intero $k \geq 1$, si ha $S_{2k} = \sigma_{2k} - \sigma_k$, ovvero

$$\begin{array}{rcccccccc}
\sigma_{2k} & 1 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & +\frac{1}{6} & \dots & +\frac{1}{2k} \\
-\sigma_k & & -1 & & -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{3} & \dots & -\frac{1}{k} \\
= S_{2k} & 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & \dots & -\frac{1}{2k}
\end{array}$$

e da ciò si deduce che

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = \lim_{k\to\infty}(\sigma_{2k} - \sigma_k) = \lim_{k\to\infty}[(\sigma_{2k} - \log(2k)) - (\sigma_k - \log k) + \log 2] = \gamma - \gamma + \log 2.$$

Ciò è sufficiente per concludere che $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$[(*)].

Consideriamo ora la serie $S' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$. È chiaro che si tratta degli stessi termini della serie S, ma riordinati in modo che i termini dello stesso segno decrescano in valore assoluto e vi

[(†)] Ricordiamo che una serie si dice *semplicemente convergente* se converge, ma non è assolutamente convergente. Per le serie assolutamente convergenti, vale un **Teorema di Dirichlet** che afferma l'invarianza della loro somma dopo qualunque riordinamento dei termini della serie.

[(*)] Poichè sappiamo che la serie S converge, è chiaro che ogni sottosuccessione estratta dalla successione delle somme parziali di S converge alla stessa somma, ma più in generale, possiamo osservare che vale il seguente

Lemma. *Sia $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, allora, se esiste un intero $r \geq 1$ per cui la successione di somme $s_{rk} = \sum_{n=1}^{rk} a_n$, $k = 1, 2, \dots$ converge, allora la serie converge (alla stessa somma).*

La dimostrazione è lasciata come esercizio al lettore, osservando che il risultato viene utilizzato in ciascuno degli esempi successivi.

siano sempre due termini positivi che precedono un termine negativo. Per calcolare la somma di questa serie osserviamo che, per ogni intero $k \geq 1$, si ha $S'_{3k} = \sigma_{4k} - \frac{1}{2}\sigma_{2k} - \frac{1}{2}\sigma_k$, ovvero

$$\begin{array}{lcccccccc}
\sigma_{4k} & 1 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & +\frac{1}{6} & \dots & +\frac{1}{4k} \\
-\frac{1}{2}\sigma_{2k} & & -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & & -\frac{1}{6} & \dots & -\frac{1}{4k} \\
-\frac{1}{2}\sigma_k & & & & -\frac{1}{2} & & & \dots & -\frac{1}{2k} \\
= S'_{3k} & 1 & & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{5} & & \dots & -\frac{1}{2k}
\end{array}$$

e da ciò si deduce che

$$\lim_{k\to\infty} S'_{3k} = \lim_{k\to\infty} (\sigma_{4k} - \tfrac{1}{2}\sigma_{2k} - \tfrac{1}{2}\sigma_k) =$$
$$\lim_{k\to\infty} [(\sigma_{4k} - \log(4k)) - \tfrac{1}{2}(\sigma_{2k} - \log(2k)) - \tfrac{1}{2}(\sigma_k - \log k) + \log 4 - \tfrac{1}{2}\log 2] = \log(2\sqrt{2}).$$

Ciò è sufficiente per concludere che $S' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \log(2\sqrt{2})$. Analogamente, consideriamo la serie $S'' = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \dots$. È chiaro che si tratta degli stessi termini della serie S, ma riordinati in modo che i termini dello stesso segno decrescano in valore assoluto e vi siano sempre tre termini positivi che precedono un termine negativo. Per calcolare la somma di questa serie osserviamo che, per ogni intero $k \geq 1$, si ha $S''_{4k} = \sigma_{6k} - \frac{1}{2}\sigma_{3k} - \frac{1}{2}\sigma_k$, ovvero

$$\begin{array}{lcccccccc}
\sigma_{6k} & 1 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & +\frac{1}{6} & \dots & +\frac{1}{6k} \\
-\frac{1}{2}\sigma_{3k} & & -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & & -\frac{1}{6} & \dots & -\frac{1}{6k} \\
-\frac{1}{2}\sigma_k & & & & & & -\frac{1}{2} & \dots & -\frac{1}{2k} \\
= S'_{3k} & 1 & & +\frac{1}{3} & & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & \dots & -\frac{1}{2k}
\end{array}$$

e da ciò si deduce che

$$\lim_{k\to\infty} S''_{4k} = \lim_{k\to\infty} (\sigma_{6k} - \tfrac{1}{2}\sigma_{3k} - \tfrac{1}{2}\sigma_k) =$$
$$\lim_{k\to\infty} [(\sigma_{6k} - \log(6k)) - \tfrac{1}{2}(\sigma_{3k} - \log(3k)) - \tfrac{1}{2}(\sigma_k - \log k) + \log 6 - \tfrac{1}{2}\log 3] = \log(2\sqrt{3}).$$

Ciò è sufficiente per concludere che $S'' = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \cdots = \log(2\sqrt{3})$.

Il lettore più attento potrà trovare una generalizzazione delle osservazioni precedenti nel seguente

Esercizio 3.1. Si consideri un intero $r \geq 1$ e la serie $S^{(r)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2r+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2r+3} + \dots$, ovvero la serie avente gli stessi termini della serie S, ma riordinati in modo che i termini dello stesso segno decrescano in valore assoluto e vi siano sempre $r+1$ termini positivi che precedono un termine negativo. Si mostri che per ogni intero $k \geq 1$, si ha $S^{(r)}_{(r+2)k} = \sigma_{2(r+1)k} - \frac{1}{2}\sigma_{(r+1)k} - \frac{1}{2}\sigma_k$ e se ne deduca che $S^{(r)} = \log(2\sqrt{r+1})$. □

Da ultimo vogliamo mostrare che non solo si può modificare di una quantità finita la somma di una serie semplicemente convergente permutandone i termini, ma che si possono far crescere ad arbitrio le somme parziali. Consideriamo la serie $U = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \dots$. È chiaro che si tratta degli stessi termini della serie S, ma riordinati in modo che i termini dello stesso segno decrescano in valore assoluto e che tra l'n-esimo termine negativo e l'$(n+1)$-esimo vi esattamente $n+1$ termini positivi.

Al variare di k tra gli interi positivi, consideriamo il numero intero $S(k) = \sum_{j=1}^{k} j = \dfrac{k(k+1)}{2}$, ed osserviamo che $U_{k+S(k)} = \sigma_{2S(k)} - \frac{1}{2}\sigma_{S(k)} - \frac{1}{2}\sigma_k$, ovvero

$$\begin{array}{lcccccccc}
\sigma_{2S(k)} & 1 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & +\frac{1}{6} & \dots & +\frac{1}{2S(k)} \\
-\frac{1}{2}\sigma_{S(k)} & & -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & & -\frac{1}{6} & \dots & -\frac{1}{2S(k)} \\
-\frac{1}{2}\sigma_k & & -\frac{1}{2} & & & & -\frac{1}{4} & \dots & -\frac{1}{2k} \\
= U_{k+S(k)} & 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \dots & -\frac{1}{2k}
\end{array}$$

Da ciò si deduce che

$$\lim_{k\to\infty} U_{k+S(k)} = \lim_{k\to\infty} (\sigma_{2S(k)} - \tfrac{1}{2}\sigma_{S(k)} - \tfrac{1}{2}\sigma_k) =$$
$$\lim_{k\to\infty} [(\sigma_{2S(k)} - \log(2S(k))) - \tfrac{1}{2}(\sigma_{S(k)} - \log(S(k))) - \tfrac{1}{2}(\sigma_k - \log k) + \tfrac{1}{2}\log(k+1) + \tfrac{1}{2}\log 2] = +\infty.$$

Ciò è sufficiente per concludere che la successione delle somme parziali della serie U non è superiormente limitata.

Esercizio 3.2. Dimostrare che la serie U è divergente. □

III
Algebra Lineare e Geometria Elementare.

1. Sistemi di equazioni lineari.

Diamo alcuni esempi della tecnica di eliminazione di Gauss per la risoluzione di sistemi di equazioni lineari.

Esercizio 1.1. *Si determinino le soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases} .$$

Svolgimento. Applicando delle operazioni elementari sulle righe della matrice completa del sistema dato, otteniamo una matrice riga-equivalente a quella data e che perciò corrisponde ad un sistema lineare con le stesse soluzioni del sistema di partenza. Se A e B sono due matrici, aventi lo stesso numero di righe e di colonne, scriveremo $A \sim B$ per indicare il fatto che le due matrici sono riga-equivalenti, ovvero che una si può ottenere dall'altra con un numero finito di operazioni elementari sulle righe.

Il sistema dato ha matrice completa:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e si ha

$$\bar{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè la matrice completa e la matrice incompleta del sistema hanno lo stesso rango, il sistema ha soluzione e poichè tale rango è uguale a 3, le soluzioni del sistema dato sono della forma $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, ove λ varia in $\mathbb{R}$, $\mathbf{a}$ è una soluzione particolare del sistema e $\mathbf{b}$ è una soluzione non banale del sistema omogeneo associato. Con calcoli diretti si può ottenere

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e quindi si può scrivere che l'insieme S delle soluzioni del sistema di partenza è

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

e ciò risponde in modo completo alla domanda posta. □

Esercizio 1.2. Si determinino le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases} .$$

□

Esercizio 1.3. Si determinino le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_4 - 2x_5 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 3 \end{cases} .$$

□

Esercizio 1.4. *Si determinino, al variare del parametro t in $\mathbb{R}$, le soluzioni del sistema*

$$\Sigma_t : \begin{cases} (t+1)x_1 + 2x_2 - tx_4 = 1 \\ (2-t)x_2 + x_3 = 1 \\ (2-t)x_2 + 2tx_4 = 1 \\ (t+1)x_1 + 2x_2 + (2-t)x_3 = 1 \end{cases} .$$

Svolgimento. Il sistema dato ha matrice completa:

$$\bar{A}_t = \begin{pmatrix} t+1 & 2 & 0 & -t & 1 \\ 0 & 2-t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-t & 0 & 2t & 1 \\ t+1 & 2 & 2-t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e, tramite operazioni elementari sulle righe della matrice, si ha

$$\bar{A}_t \sim \begin{pmatrix} t+1 & 2 & 0 & -t & 1 \\ 0 & 2-t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t & t & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} t+1 & 2 & 0 & -t & 1 \\ 0 & 2-t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t(2t-5) & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice incompleta del sistema ha rango massimo (uguale al rango della matrice completa) se, e solo se, $t \notin \{-1, 0, 2, 5/2\}$ e dunque, per tali valori del parametro t il sistema Σ_t ammette un'unica soluzione, che si può scrivere nella forma

$$X_t = \begin{pmatrix} \frac{t}{(t+1)(t-2)} \\ \frac{1}{2-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 2, 5/2\}.$$

- Se $t = 0$ oppure $t = \frac{5}{2}$, le matrici completa ed incompleta del sistema hanno entrambe rango 3. Dunque, il sistema ha infinite soluzioni, della forma $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, ove λ varia in $\mathbb{R}$, $\mathbf{a}$ è una soluzione particolare del sistema e $\mathbf{b}$ è una soluzione non banale del sistema omogeneo associato. In particolare, si può scrivere

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } t = 0 \\ \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{10}{7} \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 45 \\ -70 \\ 35 \\ 7 \end{pmatrix} & \text{se } t = \frac{5}{2} \end{cases}.$$

- Infine, se $t = -1$ oppure $t = 2$, si ha

$$\bar{A}_{-1} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e

$$\bar{A}_2 \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

e quindi, in entrambi i casi, il sistema non ha soluzioni. □

Esercizio 1.5. *Si considerino i sistemi lineari omogenei:*

$$\begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & & -x_4 & = 0 \\ & 3x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & & & +x_4 & = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \lambda x_1 & +2x_2 & -3\lambda x_3 & & = 0 \\ (\lambda+1)x_1 & +2x_2 & -3\lambda x_3 & +x_4 & = 0 \\ & 2\lambda x_2 & -3x_3 & +2\lambda x_4 & = 0 \end{cases}.$$

Si determinino i valori di λ per cui i due sistemi ammettono soluzioni non banali in comune.

Svolgimento. Il primo tra i due sistemi è un sistema omogeneo di rango 3, come si verifica considerando la matrice (incompleta) del sistema ed osservando che

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dunque le soluzioni di tale sistema sono tutti e soli i multipli di $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Si verifica facilmente che $\mathbf{a}$ non è soluzione del secondo sistema, per nessun valore di λ, perchè sostituendo $\mathbf{a}$ nella terza equazione si ottiene la condizione $-3 = 0$, che non è mai verificata. Dunque i sistemi non hanno soluzioni non-banali in comune. □

Esercizio 1.6. *Si considerino, al variare di λ tra i numeri reali, i sistemi lineari omogenei*

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} (\lambda - 1)x + 2y - \lambda z = 0 \\ 2x - z = 0 \\ -(\lambda + 1)x - \lambda y + (\lambda + 2)z = 0 \end{cases}.$$

(a) *Si determini al variare di λ l'insieme S_λ delle soluzioni del sistema Σ_λ.*
(b) *Si dica se ogni elemento di $\mathbb{R}^3$ si può scrivere come somma di soluzioni dei sistemi Σ_λ.*

Svolgimento. (a) Indichiamo con A_λ la matrice dei coefficienti del sistema Σ_λ. Si ha

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 & -\lambda \\ 2 & 0 & -1 \\ -(\lambda+1) & -\lambda & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & \lambda+1 \\ 0 & 2\lambda & -3\lambda-5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & (\lambda+2)(\lambda-3) \end{pmatrix},$$

quindi il sistema ha soluzioni non-banali solo se $\lambda \in \{-2, 3\}$ e si ha

$$S_{-2} = \left\{ t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad S_3 = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad S_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ per } \lambda \notin \{-2, 3\}.$$

(b) Si chiede se ogni elemento di $\mathbb{R}^3$ si può scrivere come $a\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ per opportuni valori di a e b in $\mathbb{R}$. Si verifica facilmente che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non si può scrivere in questo modo, perchè il sistema lineare

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a + 2b = 0 \\ 4a + 2b = 1 \end{cases}$$

non ha soluzione, essendo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque non è vero che ogni elemento di $\mathbb{R}^3$ si scriva come somma di soluzioni dei sistemi Σ_λ(*). □

Esercizio 1.7. Si considerino, al variare di λ tra i numeri reali, i sistemi lineari:

$$\Sigma_\lambda = \begin{cases} (\lambda-1)x_1 & +2x_2 & -\lambda x_3 & +2\lambda x_4 & = 0 \\ 2x_1 & & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ -(\lambda+1)x_1 & -\lambda x_2 & +(\lambda+2)x_3 & -2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +(\lambda-2)x_2 & -2x_3 & & = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determini al variare di λ l'insieme S_λ delle soluzioni del sistema lineare Σ_λ.
(b) Si dica se ogni elemento di $\mathbb{R}^4$ si può scrivere come somma di soluzioni dei sistemi Σ_λ. □

Esercizio 1.8. Si considerino i sistemi lineari omogenei

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 - (\lambda+1)x_3 = 0 \\ 2\lambda x_2 + x_3 - \lambda x_4 = 0 \end{cases}.$$

Si determinino, se esistono, i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui i due sistemi ammettono soluzioni non banali in comune. □

Esercizio 1.9. Si considerino gli elementi di $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(*) Osservando che una delle equazioni che compaiono nei sistemi Σ_λ –precisamente $2x - z = 0$– è indipendente dal parametro, si può dedurre che ogni combinazione di soluzioni dei sistemi Σ_λ deve soddisfare a questa equazione, ma non è vero che un qualsiasi elemento di $\mathbb{R}^3$ sia soluzione di questa equazione.

Si scriva, in tutti i modi possibili, la colonna $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_4$. □

Osservazioni. Due matrici della stessa forma si possono sommare tra loro, sommando tra loro gli elementi che occupano uguali posizioni nelle due matrici, ovvero, se $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (matrici con m-righe ed n-colonne), si pone

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}}$$

Ad esempio, si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Oltre all'operazione di somma, si può definire il prodotto di una matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ per un vettore $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, che dà come risultato un vettore $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, definito dalla posizione

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j \quad \text{per } i = 1, \dots, m;$$

ovvero

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + \dots + a_{1n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + \dots + a_{mn}b_n \end{pmatrix}}$$

Ad esempio, si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Più in generale, si definisce il prodotto tra due matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} \in M_{n\times k}(\mathbb{R}),$$

che dà come risultato la matrice

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \in M_{m\times k}(\mathbb{R}),$$

definita dalla posizione

$$\boxed{c_{ih} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jh} \quad \text{per } i = 1, \dots, m \ h = 1, \dots, k;}$$

ovvero, C si ottiene scrivendo ordinatamente i prodotti della matrice A per le colonne della matrice B.

Ad esempio, si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

La somma ed il prodotto tra matrici godono delle usuali proprietà della somma e del prodotto tra numeri con l'esclusione della proprietà commutativa, come si vede bene nel seguente esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo descrivere ora un'altra particolarità del prodotto tra matrici. Consideriamo le matrici del tipo

$$\boxed{\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \qquad \text{[matrice identica di ordine } n\text{]}}$$

ovvero le matrici quadrate (con lo stesso numero di righe e di colonne) che hanno tutti gli elementi uguali a 0, eccetto che sulla diagonale principale dove tutti gli elementi sono uguali ad 1. Con un calcolo diretto, si verifica che, se $A \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, allora si ha

$$\mathbf{1}_n A = A = A\mathbf{1}_k;$$

ovvero si osserva che, quando il prodotto si può fare, le matrici identiche si comportano come il numero 1.

Come esiste l'inverso (moltiplicativo) di ogni numero reale diverso da zero, ci si può chiedere se, data una matrice $A \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, diversa dalla matrice nulla (quella che ha tutti gli elementi uguali a 0), esista una matrice B che, moltiplicata per A dia la matrice identica (di un qualche ordine).

Osserviamo che, se una tale matrice esiste, può non essere univocamente determinata; ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

si ha

$$A \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1}_2 = A \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed in realtà, esistono infinite matrici B tali che $AB = \mathbf{1}_2$(*), ma non può esistere una matrice $C \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$ tale che $CA = \mathbf{1}_4$; infatti, gli elementi x_{11}, x_{12} della prima riga di C, dovrebbero soddisfare alle condizioni

$$\begin{cases} 2x_{11} = 1 \\ x_{11} - x_{12} = 0 \\ x_{11} + 4x_{12} = 0 \end{cases},$$

(*) Come fare a trovarle tutte?

che sono tra loro incompatibili.

Non discutiamo più il problema di determinare le inverse per matrici generiche, ma ci concentriamo a studiare il problema nel caso di matrici quadrate, di ordine n. In tal caso, si ha il seguente risultato di unicità dell'inversa. *Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matrice non nulla, se esistono delle matrici C e B tali che $CA = \mathbf{1}_n = AB$, allora $C = B$.* Infatti, dalla proprietà associativa del prodotto, si deduce

$$C = C\mathbf{1}_n = C(AB) = (CA)B = \mathbf{1}_n B = B.$$

Si può dimostrare che, *data una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, esiste un'unica matrice A^{-1} tale che $AA^{-1} = \mathbf{1}_n = A^{-1}A$ se, e solo se, $\mathrm{rk}A = n$.* Non diamo una dimostrazione di questa affermazione, ma mostriamo su di un esempio, come si può determinare la matrice A^{-1} a partire da A.

Sia

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e poniamo} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Affinchè si abbia $BB^{-1} = \mathbf{1}_3$, le colonne della matrice B^{-1} devono essere soluzione dei sistemi lineari

$$B\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e si osservi che, se B ha rango 3, i tre sistemi ammettono tutti soluzione (Teorema di Rouché-Capelli) e le colonne di B^{-1} sono quindi univocamente determinate da queste condizioni. In particolare, possiamo determinarle esplicitamente tali applicando il procedimento di eliminazione simultaneamente ai tre sistemi, ovvero applicando operazioni elementari alle righe della matrice che si ottiene aggiungendo a B le tre colonne di termini noti. Si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

e si verifica con un calcolo diretto che $BB^{-1} = \mathbf{1}_3 = B^{-1}B$.

Concludiamo la discussione ricordando che, per una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, si ha $\mathrm{rk}\,A = n$ se, e solo se, $\det A \neq 0$. Quindi possiamo affermare che *Una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è invertibile se, e solo se, $\det A \neq 0$.*

Esercizio 1.10. *Al variare di t in $\mathbb{R}$, si determinino tutte le matrici X tali che $AXB = A$, ove*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento. È chiaro che, quando A è invertibile, deve aversi $XB = \mathbf{1}_2$, ovvero $X = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$; e quindi, quando $\det A = 2+t \neq 0$, ovvero per $t \neq -2$, $X = B^{-1}$ è l'unica soluzione al problema proposto.

Quando $t = -2$, B^{-1} resta una soluzione particolare del problema, ma le si devono sommare tutte le soluzioni del problema omogeneo associato, ovvero tutte le matrici Y, tali che $AYB = \mathbf{0}$. Poichè B è invertibile, la condizione è equivalente ad $AY = \mathbf{0}$ e ciò significa che le colonne della matrice Y devono essere ortogonali (nella dualità canonica) alle righe della matrice A (che sono tra loro proporzionali). Si conclude quindi che, per $t = -2$, si ha

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix},$$

al variare di $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. □

Esercizio 1.11. *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, si considerino i vettori*

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano tutte le matrici $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, soddisfacenti alle condizioni $A\mathbf{b}_i = \mathbf{c}_i$, per $i = 1, 2, 3$.

Svolgimento. I vettori $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ sono linearmente dipendenti, essendo $13\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2 - 5\mathbf{b}_3 = 0$; e quindi una matrice del tipo richiesto può esistere se, e solo se, anche i vettori $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ soddisfano alla stessa relazione e ciò accade, come si può verificare con un calcolo diretto.

Dunque si tratta di determinare tutte le matrici $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 3}$ tali che $A\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_1$ e $A\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_2$ e, calcolando i prodotti, si vede che ciò è equivalente a risolvere il sistema (di 6 equazioni in 9 incognite e di rango 6)

$$\begin{cases} 2a_{11} + a_{12} = 0 \\ -4a_{11} + 3a_{12} + 5a_{13} = 0 \\ 2a_{21} + a_{22} = 0 \\ -4a_{21} + 3a_{22} + 5a_{23} = 5 \\ 2a_{31} + a_{32} = 5 \\ -4a_{31} + 3a_{32} + 5a_{33} = 0 \end{cases}.$$

Osserviamo che, la prima riga della matrice compare solo nelle prime due equazioni, mentre la seconda riga compare nella terza e quarta equazione e la terza riga della matrice compare solo nelle ultime due equazioni. Quindi si potrebbero pensare come tre sistemi di due equazioni in tre incognite (gli elementi di una riga), aventi tutti e tre la stessa matrice incompleta, ovvero

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 ed il cui sistema omogeneo associato ha come soluzioni i multipli del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (che, forse, dovremmo scrivere in riga, visto che sarà la riga di una matrice).

Dunque le matrici cercate sono

$$\begin{pmatrix} a & -2a & 2a \\ b & -2b & 1+2b \\ c & 5-2c & 2c-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -2a & 2a \\ b & -2b & 2b \\ c & -2c & 2c \end{pmatrix},$$

al variare di $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, ove il primo addendo è una soluzione particolare del sistema, mentre il secondo è la soluzione generale del sistema omogeneo associato. □

2. Complementi

Determinante. Non abbiamo alcuna intenzione di esporre la teoria generale dei determinanti, ma ci limitiamo a raccogliere in questa sezione le proprietà fondamentali di questa operazione, proprietà che ci saranno utili nei calcoli e nelle applicazioni.

Definiremo il determinante, in modo ricorsivo, servendoci della *Regola di Laplace* e perciò introduciamo alcune notazioni che ci saranno utili nel seguito. Data una matrice quadrata A, di ordine n, indichiamo con A_{ij} la matrice (di ordine $n-1$) che si ottiene cancellando da A la i–esima riga e la j–esima colonna; ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{allora} \quad A_{1\,3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{3\,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi dare la seguente

Definizione. (Regola di Laplace) Data una matrice quadrata A, si definisce il *determinante* di A ponendo $\det(a) = a$, per una matrice quadrata di ordine 1, $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ per una matrice quadrata di ordine 2, e, più in generale,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n} =$$
$$= \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+1} a_{1h} \det A_{1h}.$$

per una generica matrice quadrata A, di ordine n.

Possiamo quindi applicare la definizione e calcolare

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 1 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 0 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 0 + 6 = 7.$$

Allo stesso modo possiamo ricavare la formula generale per il determinante delle matrici quadrate di ordine 3, ovvero

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Esercizio 2.1. Applicando la definizione di determinante si mostri che il determinante della matrice identica di qualsiasi ordine è uguale ad 1; ovvero che $\det \mathbf{1}_n = 1$ per ogni intero positivo n. □

Sempre applicando la definizione, il lettore può ricavare delle formule esplicite per il determinante di una generica matrice quadrata di ordine 4 o di ordine 5. Invece di far ciò, andiamo ad enunciare una serie di proprietà del determinante, la cui verifica è facile (e può essere fatta dal lettore) per matrici di ordine 2 o 3, ma di cui non daremo una dimostrazione generale.

Come prima cosa osserviamo che la Regola di Laplace può assumere una forma più generale, che non privilegia la prima riga della matrice (ed è in questa forma che viene usualmente enunciata); ovvero data una matrice quadrata A, di ordine n, e, fissato comunque un intero $1 \leq i \leq n$, si ha

$$\boxed{\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+i} a_{ih} \det A_{ih}.}$$

Inoltre, il calcolo del determinante non privilegia le righe sulle colonne[(†)], e, fissato comunque un intero $1 \le j \le n$, si ha

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{j+h} a_{hj} \det A_{hj}.$$

Un'altra importante proprietà, di cui non daremo dimostrazione, è la compatibilità del determinante con il prodotto di matrici; ovvero, date due matrici quadrate A e B, entrambe di ordine n, si ha[(*)]

$$\boxed{\det(AB) = (\det A)(\det B) \qquad [\textit{Teorema di Binet}].}$$

Andiamo ora ad enunciare le proprietà fondamentali del determinante che, come si vedrà, assumono una forma particolarmente significativa se si considera il determinante come una funzione delle colonne della matrice. Dunque, data una matrice quadrata A, di ordine n, indichiamo con $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ le sue colonne, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Servendoci di tali notazioni, scriveremo quindi d'ora in poi $\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ in luogo di $\det A$.

Le proprietà fondamentali del determinante, si possono riassumere dicendo che, per ogni intero positivo n, *il determinante è l'unica funzione multilineare, alternante delle colonne delle matrici quadrate di ordine n, che valga* 1 *sulla matrice identica.* Ciò significa precisamente

(D1) $$\boxed{\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{a}_n)}$$

per ogni $1 \le i \le n$; e inoltre

(D2) $$\boxed{\det(\mathbf{a}_1, \dots, \alpha\mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) = \alpha \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n)}$$

per ogni $1 \le i \le n$ e per ogni scalare α; e ancora

(D3) $$\boxed{\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_h, \dots, \mathbf{a}_n) = -\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_h, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n)}$$

per ogni coppia di indici $1 \le i < h \le n$. Infine, indicando come di consueto con $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ le colonne della matrice identica di ordine n (ovvero la base canonica di $\mathbb{R}^n$), si ha

(D4) $$\boxed{\det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1.}$$

Da queste quattro proprietà si possono ricavare tutte le proprietà del determinante: ad esempio, da $(D3)$ discende che se una matrice ha due colonne uguali, allora il suo determinante è nullo (perchè deve coincidere con il proprio opposto). È facile anche ricavare da tali proprietà le usuali formule per il determinante, come viene suggerito nei seguenti esercizi.

(†) La cosa si potrebbe dire in un altro modo, introducendo la nozione di *matrice trasposta* di una matrice data. Ad esempio, data la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, la sua matrice trasposta, ${}^tA$, è la matrice che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne, ovvero ${}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. La nozione di matrice trasposta non è limitata alle matrici quadrate, ma si può generalizzare a matrici rettangolari qualsiasi. Servendoci delle notazioni introdotte sopra, l'osservazione sul determinante si può enunciare affermando che, per ogni matrice quadrata B, si ha $\det {}^tB = \det B$.

(*) Nel caso di matrici di ordine 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ la dimostrazione si riduce alla verifica dell'identità

$$(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21});$$

che si ottiene con un calcolo diretto. Il lettore diligente è invitato a fare l'analoga verifica nel caso di matrici quadrate di ordine 3.

Esercizio 2.2. Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; osservando che $\mathbf{a}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{a}_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2$, si deduca dalle proprietà fondamentali l'usuale formula per il determinante della matrice A. □

Esercizio 2.3. Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Si mostri che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det A, \quad \det \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\det A, \quad \det \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det A.$$

Si deduca da ciò e dalle proprietà fondamentali del determinante lo sviluppo di Laplace (secondo la prima colonna) per il determinante di una matrice di ordine 3. □

Esercizio 2.4. Sia A una matrice quadrata di ordine n e siano $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ le sue colonne. Si mostri che se $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ sono linearmente dipendenti, allora $\det A = 0$. □

Esercizio 2.5. Sia A una matrice quadrata di ordine n. Si mostri che il determinante non cambia se si aggiunge ad una qualsiasi colonna della matrice A una combinazione lineare delle rimanenti colonne. □

Ora vogliamo ricavare un'importante conseguenza delle proprietà fondamentali del determinante.

Proposizione. *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Allora* $\det A \neq 0$ *se, e solo se, le colonne sono vettori linearmente indipendenti.*

dim. Osserviamo che, in base all'`Esercizio III.2.4`, se $\det A \neq 0$, allora le colonne $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ della matrice A non possono essere linearmente dipendenti. Mostriamo quindi che se $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ sono linearmente indipendenti non può aversi $\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = 0$. Infatti, se $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ sono linearmente indipendenti, allora sono una base di $\mathbb{R}^n$ e perciò possiamo scrivere i vettori della base canonica $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ come combinazione lineare di $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$; ovvero esistono delle costanti c_{ij} tali che

$$\mathbf{e}_1 = c_{11}\mathbf{a}_1 + \cdots + c_{n1}\mathbf{a}_n, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = c_{1n}\mathbf{a}_1 + \cdots + c_{nn}\mathbf{a}_n.$$

Da queste identità, applicando ripetutamente le proprietà $(D1)$ e $(D3)$, si ottiene la relazione

$$\det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = K \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n),$$

per un'opportuna costante K. È chiaro quindi che, in base a $(D4)$, non può aversi $\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = 0$.
CVD □

Dunque, in conseguenza della Proposizione appena dimostrata, possiamo affermare che condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice quadrata $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ abbia rango n è che si abbia $\det A \neq 0$.

In particolare, si può dimostrare che una matrice quadrata A, di ordine n, è invertibile (ovvero esiste una matrice A^{-1}, di ordine n, tale che $AA^{-1} = \mathbf{1}_n = A^{-1}A$) se, e solo se, $\det A \neq 0$. In particolare, si può verificare che la matrice inversa inversa $A^{-1} = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$, è determinata dalle posizioni

$$b_{ij} = (-1)^{i+j}\,\frac{\det A_{ji}}{\det A} \qquad \text{per } 1 \le i, j \le n.$$

Il lettore può facilmente verificare la formula nel caso particolare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Nel caso generale si può verificare la formula applicando la Regola di Laplace e l'osservazione che una matrice con due colonne uguali ha il determinante nullo.

Autovalori ed autovettori. Vogliamo discutere ora un altro problema. Data una matrice quadrata di ordine n,$A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, possiamo definire una funzione $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ponendo $\phi_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ per ogni vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$.

Ad esempio, se

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

allora

$$\phi_B(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Tornando al caso generale, osserviamo che, con un calcolo diretto, si verifica che la funzione ϕ_A soddisfa alle proprietà:

$$(1) \qquad \phi_A(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \phi_A(\mathbf{v}) + \phi_A(\mathbf{w}) \qquad \text{e} \qquad \phi_A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\phi_A(\mathbf{v}),$$

per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Perciò ϕ_A è detta un'*applicazione lineare* di $\mathbb{R}^n$ in sé, ovvero un *endomorfismo* di $\mathbb{R}^n$. Osserviamo che le entrate della matrice A sono legate alla funzione ϕ_A nel modo seguente. Indicando con $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ gli elementi della *base canonica* di $\mathbb{R}^n$, possiamo osservare che

$$\begin{aligned} \phi_A(\mathbf{e}_1) &= A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{e}_1 + \cdots + a_{n1}\mathbf{e}_n, \\ &\vdots \\ \phi_A(\mathbf{e}_n) &= A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = a_{1n}\mathbf{e}_1 + \cdots + a_{nn}\mathbf{e}_n; \end{aligned}$$

ovvero le colonne della matrice A corrispondono alle immagini degli elementi della base canonica tramite l'applicazione ϕ_A.

Nell'esempio precedente si ha quindi

$$\phi_B(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3, \quad \phi_B(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \quad \phi_B(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3.$$

Dato un endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, di matrice A rispetto alla base canonica, ci poniamo il seguente problema: *esistono una base* $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ *di* $\mathbb{R}^n$ *e delle costanti* $c_1, \dots, c_n$ *tali che*

$$\phi(\mathbf{v}_1) = c_1\mathbf{v}_1, \quad \dots, \quad \phi(\mathbf{v}_n) = c_n\mathbf{v}_n.$$

Quando ciò accade, diremo che ϕ è *diagonalizzabile*.

Non discuteremo il problema in astratto, ma tratteremo alcuni esempi significativi da cui il lettore potrà trarre facilmente le conclusioni generali. Facciamo precedere alla discussione una definizione e qualche facile osservazione.

Definizione. Sia $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Diremo che una costante c è un *autovalore* di ϕ, se esiste un vettore $\mathbf{v} \neq 0$, per cui si abbia $\phi(\mathbf{v}) = c\mathbf{v}$. Ogni vettore $\mathbf{w}$ tale che $\phi(\mathbf{w}) = c\mathbf{w}$ è detto un *autovettore* di ϕ, relativo all'autovalore c.

Dalle proprietà (1), discende facilmente che, dati due autovettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ relativi ad uno stesso autovalore c_0, anche la somma $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (e più in generale ogni combinazione lineare dei due) è ancora un autovettore per ϕ, relativo allo stesso autovalore c_0. Infatti, si ha

$$\phi(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha\phi(\mathbf{v}) + \beta\phi(\mathbf{w}) = \alpha c_0\mathbf{v} + \beta c_0\mathbf{w} = c_0(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}).$$

Ciò si riassume brevemente dicendo che gli autovettori relativi ad uno stesso autovalore formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Osserviamo inoltre che, affinchè una costante c sia un autovalore per un endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, di matrice A rispetto alla base canonica, deve esistere una soluzione non banale al sistema lineare omogeneo $(A - c\mathbf{1})\mathbf{x} = 0$, ove $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Per il teorema di Rouché-Capelli ciò può accadere se, e solo se, $\mathrm{rk}(A - c\mathbf{1}) < n$ ovvero se, e solo se, $\det(A - c\mathbf{1}) = 0$.

Si definisce quindi il *polinomio caratteristico* di ϕ come

$$\boxed{P_\phi(X) = \det(A - X\mathbf{1})}$$

e si conclude che gli autovalori di ϕ sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico.

Esempio 1. Se $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l'endomorfismo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

il suo polinomio caratteristico è

$$P_\phi(X) = \det(A - X\mathbf{1}) = \det \begin{pmatrix} 3-X & 1 & -1 \\ 1 & 3-X & -1 \\ 0 & 0 & 2-X \end{pmatrix} = (2-X)^2(4-X).$$

Dunque gli autovalori sono 2 (con molteplicità 2) e 4 (con molteplicità 1). I corrispondenti sottospazi di autovettori si determinano risolvendo i sistemi lineari omogenei $(A - 2\mathbf{1})\mathbf{x} = 0$ e $(A - 4\mathbf{1})\mathbf{x} = 0$, ovvero

$$\begin{cases} (3-2)x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + (3-2)x_2 - x_3 = 0 \\ (2-2)x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} (3-4)x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + (3-4)x_2 - x_3 = 0 \\ (2-4)x_3 = 0 \end{cases}.$$

Il primo dei due sistemi ha rango 1 e quindi il sottospazio delle soluzioni ha dimensione 2 ed è generato dai due autovettori (linearmente indipendenti) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il secondo sistema ha rango 2 e quindi il sottospazio degli autovettori relativi all'autovalore 4 ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

I tre vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ e quindi l'endomorfismo ϕ è diagonalizzabile.

Vediamo ora l'esempio di un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che non è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).

Esempio 2. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, di matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è

$$\det \begin{pmatrix} 2-X & 3 \\ -3 & -2-X \end{pmatrix} = X^2 + 5,$$

che non ha radici reali e quindi non ci sono autovalori reali per un tale ϕ. Dunque ϕ non è diagonalizzabile come endomorfismo di $\mathbb{R}^2$.

Se consideriamo invece l'endomorfismo $\phi_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ che ha la stessa matrice B, allora vi sono i due autovalori distinti $i\sqrt{5}$ e $-i\sqrt{5}$ a cui corrispondono i sottospazi di autovettori generati rispettivamente da $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 - i\sqrt{5} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 + i\sqrt{5} \end{pmatrix}$; e quindi $\phi_{\mathbb{C}}$ è diagonalizzabile.

Nell'esempio precedente, l'endomorfismo ϕ non era diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$) perchè gli autovalori non erano numeri reali, ma questa non è l'unica ragione perchè un endomorfismo non sia diagonalizzabile. Diamo ora un esempio di endomorfismo che non è diagonalizzabile perchè, pur avendo tutti gli autovalori reali, gli autovettori corrispondenti non sono sufficienti a generare tutto lo spazio vettoriale.

Esempio 3. Sia $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è

$$P_\psi(X) = \det \begin{pmatrix} -2-X & 4 & -2 \\ 3 & -1-X & -3 \\ -1 & 1 & -3-X \end{pmatrix} = 32 - 6X^2 - X^3 = (2-X)(4+X)^2,$$

e quindi gli autovalori di ψ sono $c_1 = 2$ (con molteplicità 1) e $c_2 = -4$ (con molteplicità 2). Gli spazi di autovettori corrispondenti si ottengono risolvendo i sistemi lineari omogenei

$$\begin{cases} -(2+2)x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - (1+2)x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - (3+2)x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} -(2-4)x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - (1-4)x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - (3-4)x_3 = 0 \end{cases}$$

che sono rispettivamente equivalenti ai sistemi

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Entrambo i sistemi hanno rango 2 e quindi gli spazi di autovettori corrispondenti hanno tutti e due dimensione 1. Dunque non può esistere una base di autovettori per ψ e quindi l'endomorfismo non è diagonalizzabile.

3. Prodotto scalare e prodotto vettoriale.

Ricordiamo che il *prodotto scalare* in $\mathbb{R}^3$ è definito ponendo

$$\langle \mathbf{v} , \mathbf{w} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \qquad \text{ove} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Questa operazione gode delle proprietà fondamentali:

- $\langle \mathbf{v} , \mathbf{v} \rangle \ge 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$ e $\langle \mathbf{v} , \mathbf{v} \rangle = 0 \iff v = 0$;
- $\langle \mathbf{v} , \mathbf{w} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{v} , \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v} , \mathbf{z} \rangle$;
- $\langle \mathbf{v} , \lambda\mathbf{w} \rangle = \lambda \langle \mathbf{v} , \mathbf{w} \rangle$;
- $\langle \mathbf{v} , \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w} , \mathbf{v} \rangle$;

qualunque siano $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Queste proprietà si riassumono brevemente dicendo che il prodotto scalare è un'applicazione bilineare, simmetrica, definita positiva.

A partire dal prodotto scalare (o, più in generale, da un'applicazione bilineare, simmetrica, definita positiva) si può definire la *norma* di un vettore in $\mathbb{R}^3$, ponendo

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v} , \mathbf{v} \rangle} \qquad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

La norma gode delle seguenti proprietà fondamentali

- $\|\mathbf{v}\| \ge 0$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = 0$;
- $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{v}\|$;
- $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ (disuguaglianza triangolare);

qualunque siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che le prime due proprietà sono una facile conseguenza delle proprietà del prodotto scalare, mentre la terza si può dedurre da un'importante disuguaglianza soddisfatta dal prodotto scalare, che è una conseguenza anch'essa delle proprietà del prodotto scalare, che abbiamo scritto all'inizio di questa sezione.

Teorema. [disuguaglianza di Schwarz] *Per ogni coppia di vettori* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, *si ha*

$$|\langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}\rangle| \leq \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|,$$

ove vale l'uguaglianza se, e solo se, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono linearmente dipendenti.*

dim. Siano fissati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ che supponiamo linearmente indipendenti. Per qualsiasi valore del parametro $t \in \mathbb{R}$, si ha $\langle \mathbf{v}+t\mathbf{w}\,,\,\mathbf{v}+t\mathbf{w}\rangle \geq 0$ e quindi, dalle proprietà del prodotto scalare si conclude che

$$\langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{v}\rangle + 2t\langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}\rangle + t^2\langle \mathbf{w}\,,\,\mathbf{w}\rangle \geq 0 \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Il discriminante di questo trinomio non può essere positivo e quindi deve aversi

$$0 \geq \langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}\rangle^2 - \langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{v}\rangle\langle \mathbf{w}\,,\,\mathbf{w}\rangle \qquad \text{ovvero} \qquad \langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}\rangle^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2;$$

da cui si deduce la tesi.

Resta quindi da dimostrare l'ultima affermazione sulla dipendenza lineare. Se $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\|\mathbf{w}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{v}\|$ e si ha

$$|\langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}\rangle| = |\lambda\langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{v}\rangle| = |\lambda|\,\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|.$$

Viceversa, se $|\langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}\rangle| = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|$, ovvero $\langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}\rangle^2 = \langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{v}\rangle\langle \mathbf{w}\,,\,\mathbf{w}\rangle$; allora, posto $\tau = -\frac{\langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}\rangle}{\langle \mathbf{w}\,,\,\mathbf{w}\rangle}$, si ha

$$\langle \mathbf{v}+\tau\mathbf{w}\,,\,\mathbf{v}+\tau\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{v}\rangle + 2\tau\langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}\rangle + \tau^2\langle \mathbf{w}\,,\,\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{v}\rangle - 2\frac{\langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}\rangle^2}{\langle \mathbf{w}\,,\,\mathbf{w}\rangle} + \frac{\langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}\rangle^2}{\langle \mathbf{w}\,,\,\mathbf{w}\rangle} = 0$$

da cui si deduce che $\mathbf{v} + \tau\mathbf{w} = 0$ e quindi che $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti. **CVD** □

Dalla disuguaglianza di Schwarz si deduce facilmente la disuguaglianza triangolare, osservando che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|$ e $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ sono due numeri reali maggiori o uguali a zero e

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \langle \mathbf{v}+\mathbf{w}\,,\,\mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{v}\rangle + 2\langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{w}\,,\,\mathbf{w}\rangle \leq \langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{v}\rangle + 2|\langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}\rangle| + \langle \mathbf{w}\,,\,\mathbf{w}\rangle \leq \\ \leq \|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| + \|\mathbf{w}\|^2 = (\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|)^2\end{aligned}$$

ove la disuguaglianza tra le due righe qui sopra è conseguenza della disuguaglianza di Schwarz.

Un'osservazione geometrica legata alla disuguaglianza di Schwarz si può enunciare nel modo seguente. Dati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, si ha

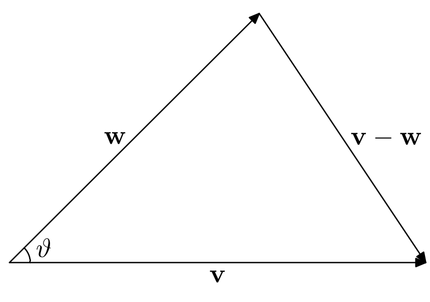
$$\frac{\langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}\rangle}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|} = \cos\vartheta, \qquad \text{ove } \vartheta \in [0, \pi] \text{ è l'angolo tra i due vettori.}$$

Si veda infatti il disegno a fianco e si osservi che, per le proprietà del prodotto scalare, si ha

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 - 2\langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}\rangle.$$

D'altra parte, applicando il cosiddetto 'Teorema dei Coseni' al triangolo in questione, si ha

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 - 2\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\cos\vartheta.$$



Quindi, confrontando le due espressioni, si ottiene l'uguaglianza enunciata sopra e perciò possiamo concludere che il prodotto scalare è uno strumento per calcolare la distanza tra punti(*) e l'angolo (non-orientato) tra vettori. Ad esempio, due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono *ortogonali* se, e solo se, $\langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}\rangle = 0$.

(*) La distanza tra due punti P e Q, è uguale a $\|\overrightarrow{PQ}\|$.

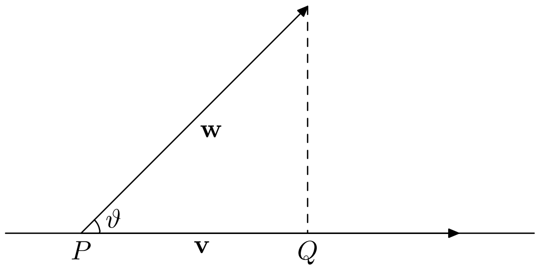
Esercizio 3.1. Si determini l'angolo tra i vettori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 3.2. Si determini l'insieme dei vettori ortogonali a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ □

Esercizio 3.3. Si determini l'insieme dei vettori ortogonali sia a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ che a $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. □

Il lettore è invitato a verificare che, dati due vettori $\mathbf{v} \neq 0 \neq \mathbf{w}$, il numero $\frac{|\langle \mathbf{v}\, ,\, \mathbf{w}\rangle|}{\|\mathbf{v}\|}$ è uguale alla lunghezza della proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{w}$ su una retta parallela a $\mathbf{v}$ (ovvero la lunghezza del segmento PQ nel disegno qui a fianco). Se ne deduca che, dato un vettore $\mathbf{v}$ ed indicata con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ la base canonica (ortonormale), si ha

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}\, ,\, \mathbf{e}_1\rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{v}\, ,\, \mathbf{e}_2\rangle \mathbf{e}_2 + \langle \mathbf{v}\, ,\, \mathbf{e}_3\rangle \mathbf{e}_3.$$



Osservazione/Esercizio. Si consideri l'insieme $\mathcal{C}^0[a,b]$ formato da tutte le funzioni continue a valori reali definite sull'intervallo $[a,b] \neq \emptyset$. Anche per le funzioni di $\mathcal{C}^0[a,b]$, come per i vettori di $\mathbb{R}^3$, si possono fare le usuali operazioni di somma e prodotto per costanti. Inoltre, si può introdurre il "prodotto scalare"

$$\langle f(x)\, ,\, g(x)\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx \qquad \text{ove } f(x), g(x) \in \mathcal{C}^0[a,b],$$

e lasciamo al lettore il compito di verificare che anche per questo prodotto scalare valgono le proprietà scritte all'inizio di questa sezione.

Un altro strumento utile nello studio della geometria dello spazio tridimensionale è il *prodotto vettoriale*, così definito.

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \qquad \text{ove} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Le proprietà fondamentali del prodotto vettoriale[(†)] sono le seguenti

- $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -(\mathbf{w} \times \mathbf{v})$;
- $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{z} = \mathbf{v} \times \mathbf{z} + \mathbf{w} \times \mathbf{z}$
- $(\lambda \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \lambda(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times (\lambda \mathbf{w})$;
- $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$ se, e solo se, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono proporzionali;
- $\langle \mathbf{v} \times \mathbf{w}\, ,\, \mathbf{v}\rangle = 0 = \langle \mathbf{v} \times \mathbf{w}\, ,\, \mathbf{w}\rangle$;
- $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 - \langle \mathbf{v}\, ,\, \mathbf{w}\rangle^2$ (identità di Lagrange);

qualunque siano $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dimostriamo le proprietà del prodotto vettoriale. Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ ed applicando la definizione, si ottiene

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} y_2x_3 - y_3x_2 \\ y_3x_1 - y_1x_3 \\ y_1x_2 - y_2x_1 \end{pmatrix} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

(†) In alcuni testi si trova la notazione $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ per indicare il prodotto vettoriale. Noi non faremo uso di questa notazione.

e inoltre,

$$(\mathbf{v}+\mathbf{w})\times\mathbf{z}=\begin{pmatrix}(x_2+y_2)z_3-(x_3+y_3)z_2\\(x_3+y_3)z_1-(x_1+y_1)z_3\\(x_1+y_1)z_2-(x_2+y_2)z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2z_3-x_3z_2\\x_3z_1-x_1z_3\\x_1z_2-x_2z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_2z_3-y_3z_2\\y_3z_1-y_1z_3\\y_1z_2-y_2z_1\end{pmatrix}=\mathbf{v}\times\mathbf{z}+\mathbf{w}\times\mathbf{z}.$$

La verifica della terza identità è un calcolo diretto che lasciamo al lettore.

Osserviamo che $\mathbf{v}\times\mathbf{w}=0$ significa

$$x_2y_3-x_3y_2=0,\qquad x_3y_1-x_1y_3=0,\qquad x_1y_2-x_2y_1=0$$

da cui si deduce che le tre coordinate dei due vettori sono tra loro proporzionali. È immediato verificare che, se $\mathbf{w}=\lambda\mathbf{v}$, si ha $\mathbf{v}\times\mathbf{w}=0$.

Ancora un calcolo diretto ci permette di verificare che

$$\langle\mathbf{v}\times\mathbf{w}\,,\,\mathbf{v}\rangle=(x_2y_3-x_3y_2)x_1+(x_3y_1-x_1y_3)x_2+(x_1y_2-x_2y_1)x_3=0$$

ed analogamente $\langle\mathbf{v}\times\mathbf{w}\,,\,\mathbf{w}\rangle=0$. Infine, si ha

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|^2&=(x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_3y_1-x_1y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2\\&=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\\&=\|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2-\langle\mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}\rangle^2\end{aligned}$$

e ciò conclude la verifica. □

Osserviamo che le due ultime proprietà del prodotto vettoriale permettono di caratterizzare geometricamente il prodotto vettoriale di due vettori in termini dei suoi fattori. Infatti dalla prima delle due si deduce che il prodotto vettoriale $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ deve essere ortogonale ad entrambi i suoi fattori e quindi, se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ non sono paralleli (ovvero proporzionali), la direzione del prodotto vettore è completamente determinata. Infine, dall'identità di Lagrange e da quanto visto sul prodotto scalare si deduce

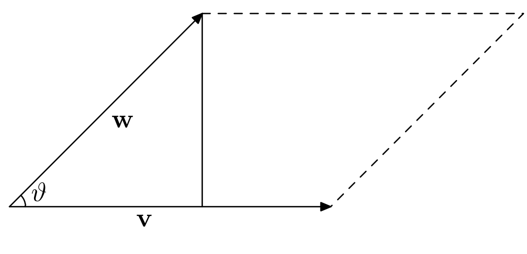
$$\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|^2=\|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2-\langle\mathbf{v}\,,\,\mathbf{w}\rangle^2=\|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2(1-\cos(\vartheta)^2),$$

ove $\vartheta\in[0,\pi]$ è l'angolo tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Quindi, si ha

$$\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|=\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\sin\vartheta,$$

ovvero che la norma (ovvero la lunghezza) del prodotto vettoriale coincide con l'area del parallelogramma avente come lati i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, in quanto ll misura dell'altezza di tale parallelogramma, relativa al lato $\mathbf{v}$ è uguale proprio a $\|\mathbf{w}\|\sin\vartheta$, come si può vedere facilmente dal disegno a fianco.



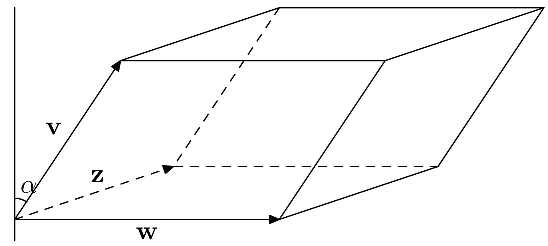
Dunque la direzione e la lunghezza del prodotto vettoriale si possono dedurre "geometricamente" a partire dai fattori. Si potrebbe infine verificare che il verso del prodotto vettoriale è determinato dall'ordine dei fattori e dall'orientamento della base canonica di $\mathbb{R}^3$ ovvero alla scelta di sistemi di riferimento destrogiri o levogiri. Non entriamo nei dettagli, onde evitare di addentrarci nella nozione di orientamento dello spazio.

Da ultimo vogliamo considerare il *prodotto misto* di tre vettori. Dati i vettori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, consideriamo il prodotto

$$\langle \mathbf{v} \, , \, \mathbf{w} \times \mathbf{z} \rangle = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che *il prodotto misto* $\langle \mathbf{v} \, , \, \mathbf{w} \times \mathbf{z} \rangle = 0$ *se, e solo se, i tre vettori sono linearmente dipendenti.* Infatti il fattore $\mathbf{w} \times \mathbf{z}$ è diverso da zero se, e solo se, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$ sono linearmente indipendenti. Inoltre, se $\mathbf{w} \times \mathbf{z} \neq 0$, il prodotto misto è nullo se, e solo se, $\mathbf{v}$ è ortogonale a $\mathbf{w} \times \mathbf{z}$, ovvero se, e solo se, $\mathbf{v}$ appartiene al piano generato da $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$. Ciò permette di concludere.

Vogliamo mettere in evidenza un aspetto geometrico del prodotto misto di tre vettori. Applichiamo i tre vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ ad uno stesso punto dello spazio e consideriamo il parallelepipedo avente i tre vettori dati come spigoli (cf. il disegno a fianco). Il prodotto vettoriale $\mathbf{w} \times \mathbf{z}$ è un vettore perpendicolare al piano contenente i fattori e di lunghezza uguale all'area del parallelogramma determinato da questi.



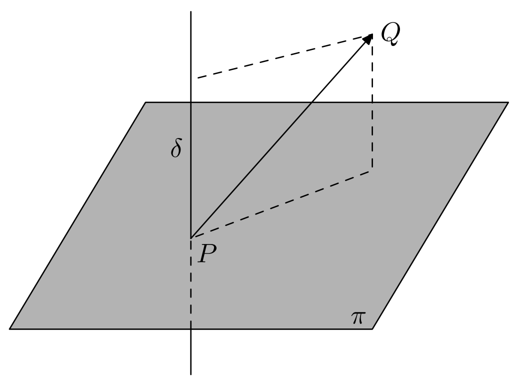
Dunque il prodotto scalare tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w} \times \mathbf{z}$, è il prodotto dell'area del parallelogramma detto, ovvero $\|\mathbf{w} \times \mathbf{z}\|$, per la proiezione del vettore $\mathbf{v}$ sulla perpendicolare al piano contenente $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$, ovvero $\|\mathbf{v}\| \cos\alpha$, ove $\alpha \in (0, \pi/2)$, è l'angolo tra $\mathbf{v}$ e la retta perpendicolare al piano contenente $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$ (cf. ancora il disegno). La proiezione del vettore $\mathbf{v}$ sulla perpendicolare al piano altri non è che l'altezza del parallelepipedo determinato dai tre vettori e quindi si conclude che *il valore assoluto del prodotto misto* $|\langle \mathbf{v} \, , \, \mathbf{w} \times \mathbf{z} \rangle|$ *coincide con il volume del parallelepipedo avente i tre vettori* $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ *come spigoli.*

4. Geometria analitica nello spazio tridimensionale

Dalle osservazioni fatte nella sezione precedente sul prodotto scalare e sul prodotto vettoriale, discendono alcune utili applicazioni alla misura di distanze ed angoli tra rette e piani dello spazio euclideo tridimensionale.

- *Distanza di un punto da un piano.*

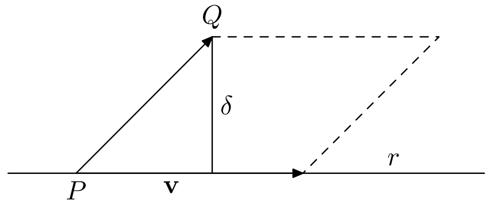
Sia π il piano passante per il punto $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ e perpendicolare al vettore $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Dunque un punto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dello spazio appartiene a π se, e solo se, $\langle \mathbf{n} \, , \, \overrightarrow{PX} \rangle = 0$; ovvero se, e solo se, $ax + by + cz - d = 0$, ove $d = ax_0 + by_0 + cz_0$. Allora, dato un punto $Q = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ dello spazio, la sua distanza dal piano π è uguale alla lunghezza δ della proiezione ortogonale del vettore $\overrightarrow{PQ}$ sulla retta perpendicolare al piano π, ovvero



$$d(Q,\pi) = \frac{|\langle \mathbf{n}\,,\, \overrightarrow{PQ}\rangle|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

• *Distanza tra una retta ed un piano paralleli.*
La distanza tra una retta ed un piano tra loro paralleli è uguale alla distanza di un qualunque punto della retta dal piano.

• *Distanza di un punto da una retta.*
Si consideri la retta r, passante per P e parallela al vettore $\mathbf{v}$. Supponiamo il vettore $\mathbf{v}$ applicato nel punto P (cf. il disegno a fianco); allora la distanza tra un punto X dello spazio e la retta r, coincide con l'altezza δ del parallelogramma che ha i vettori $\mathbf{v}$ e $\overrightarrow{PX}$ come lati, e quindi

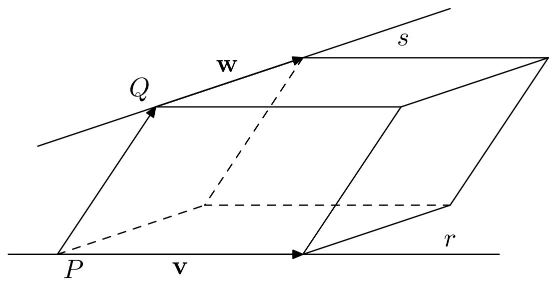


$$d(X,r) = \frac{\|\overrightarrow{PX} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}\ .$$

• *Distanza tra due rette parallele.*
La distanza tra due rette parallele è uguale alla distanza di un qualunque punto di una delle due rette dall'altra.

• *Distanza tra due rette non parallele.*
Si considerino la retta r, passante per P e parallela al vettore $\mathbf{v}$ e la retta S, passante per Q e parallela al vettore $\mathbf{w}$. Si consideri il parallelepipedo determinato dai vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\overrightarrow{PQ}$ (cf. il disegno a fianco). Allora la distanza tra le due rette, coincide con l'altezza del parallelepipedo, relativa al parallelogramma di base che ha i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ come lati; e quindi

$$d(r,s) = \frac{|\langle \overrightarrow{PQ}\,,\, \mathbf{v}\times\mathbf{w}\rangle|}{\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|}\ .$$



Si osservi infine, che la distanza tra le due rette è uguale a zero se, e solo se, il parallelepipedo nella figua degenera, ovvero se, e solo se, le due rette (non parallele) sono incidenti.

• *Angolo tra due rette.*
Si considerino la retta r, parallela al vettore $\mathbf{v}$ e la retta S, parallela al vettore $\mathbf{w}$. Allora l'angolo tra le due rette, coincide con il più piccolo degli angoli formato da due vettori paralleli alle rette. Quindi, indicato con $\alpha(r,s) \in [0,\pi/2]$ tale angolo, in base alle proprietà del prodotto scalare, possiamo scrivere

$$\cos\alpha(r,s) = \frac{|\langle \mathbf{v}\,,\, \mathbf{w}\rangle|}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|}.$$

• *Angolo tra una retta ed un piano.*
Si considerino la retta r, parallela al vettore $\mathbf{v}$ ed il piano σ perpendicolare al vettore $\mathbf{n}$. Allora l'angolo tra la retta ed il piano, coincide con il complementare(*) dell'angolo tra r e una perpendicolare al piano

(*) Due angoli si dicono *complementari* se la loro somma è un angolo retto.

σ. Quindi, indicato con $\alpha(r,\pi)$ l'angolo tra la retta ed il piano, in base a facili identità delle funzioni trigonometriche, possiamo scrivere

$$\sin\alpha(r,\sigma) = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha(r,\sigma)\right) = \frac{|\langle \mathbf{v}\,,\,\mathbf{n}\rangle|}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{n}\|}.$$

Nel seguito di questa sezione ci applicheremo a risolvere con i metodi descritti alcuni esercizi di geometria del piano e dello spazio.

Esercizio 4.1. *Nello spazio euclideo tridimensionale E^3, dotato di un riferimento ortonormale, si consideri il triangolo ABC, di vertici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini la retta r, perpendicolare al piano σ su cui giace il triangolo ABC, e passante per il baricentro di tale triangolo. (il baricentro di un triangolo è il punto di intersezione delle mediane)

(b) Si determinino i punti R delle retta r per cui il triangolo ABR ha area uguale all'area del triangolo ABC.

Svolgimento. Facciamo una breve digressione sul baricentro di un triangolo. I punti medi L ed M dei lati BC ed AB, rispettivamente, sono determinati dalle condizioni

$$\overrightarrow{OL} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

Quindi il baricentro H, ovvero il punto di intersezione tra le due mediane AL e CM corrisponde ai valori dei parametri λ e μ, per cui si ha

$$\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \mu\overrightarrow{CM};$$

ovvero, con un calcolo esplicito sulle coordinate, si ottiene

$$\begin{cases} 1 - \frac{3}{2}\lambda = -2 + 3\mu \\ \frac{1}{2}\lambda = 2 - \frac{5}{2}\mu \\ 1 = \frac{3}{2}\mu \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \lambda = \frac{2}{3} \\ \mu = \frac{2}{3} \end{cases}$$

da cui si conclude$^{(\dagger)}$ che

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\left(\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}}{2} - \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un vettore perpendicolare al piano contenente il triangolo ABC è $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{\sqrt{19}}{2}$ è la misura dell'area del triangolo ABC.

$^{(\dagger)}$ Ricordiamo che il baricentro di n punti materiali $P_1, \dots, P_n$, di masse $m_1, \dots, m_n$ è il punto G, determinato dalla condizione

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + m_n\overrightarrow{OP_n}}{m_1 + \cdots + m_n}.$$

È facile verificare che il baricentro di $n+1$ punti $P_1, \dots, P_{n+1}$, di masse $m_1, \dots, m_{n+1}$ è anche il baricentro dei due punti G e P_{n+1}, ove G è il baricentro di $P_1, \dots, P_n$ e gli si attribuisce la massa totale degli n punti, ovvero $m = m_1 + \cdots + m_n$.

Quindi la retta r, passante per H e parallela a $\mathbf{n}$, ha equzioni cartesiane

$$\begin{cases} 9x - 6y + 3z = 1 \\ 3z - 3y = 2 \end{cases}.$$

Il generico punto di r ha coordinate

$$R_t = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{3}+3t \\ 1+3t \end{pmatrix} \qquad \text{al variare di } t \in \mathbb{R}.$$

e l'area del triangolo ABR_t è uguale a $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR_t}\|$; dunque i punti cercati sono determinati dalla condizione

$$\sqrt{19} = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AR_t}\| = \sqrt{(\tfrac{1}{3} + 6t)^2 + 2(t-1)^2}$$

ovvero $t = \pm\frac{2}{3}$. □

Esercizio 4.2. Nello spazio tridimensionale si considerino i tre punti

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini un'equazione cartesiana del piano π, contenente il triangolo ABC, e si determini l'area di tale triangolo.
(b) Si determini la retta s perpendicolare al piano π, passante per il punto $P = (0, -3, 0)$.
(b) Si determini la distanza tra la retta s e la retta r passante per A e B. □

Esercizio 4.3. Nello spazio euclideo tridimensionale E^3, dotato di un riferimento ortonormale, si consideri il triangolo ABC, di vertici

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini l'equazione del piano su cui giace il triangolo ABC.
(b) Si determini l'area del triangolo ABC. □

Esercizio 4.4. Nello spazio euclideo tridimensionale, siano dati il piano π e le rette r ed s di equazioni

$$\pi : x - 2y + z = 3, \quad r : \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}.$$

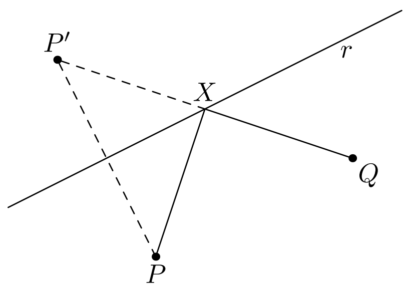
Si determinino, se esistono, rette incidenti sia r che s ed aventi distanza $\sqrt{6}$ dal piano π. In caso affermativo, si scrivano delle equazioni cartesiane per le rette cercate e si determinino i punti di intersezione tra tali rette e le rette r ed s. □

Esercizio 4.5. *Nel piano euclideo siano dati la retta $r : y - \frac{1}{2}x - 2 = 0$ ed i punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si determini quell'unico punto $X \in r$ per cui la somma delle distanze $\|\overrightarrow{PX}\| + \|\overrightarrow{XQ}\|$ è minima e si verifichi che, in tal caso, l'angolo tra le retta r e la retta per P ed X coincide con l'angolo tra la retta r e la retta per Q ed X[(*)].*

(*) L'esercizio proposto ha un'interpretazione 'fisica': infatti si può pensare al percorso PXQ come al cammino di un raggio di luce che parte da P e giunge a Q dopo una riflessione sullo 'specchio' rappresentato dalla retta r. È ben noto che il raggio incidente ed il raggio riflesso formano angoli uguali con la superficie riflettente e che il cammino percorso deve avere lunghezza minima. Segnaliamo poi un'analoga interpretazione fisica del problema proposto, identificando i punti P e Q come due palline e la retta r come un lato del tavolo da biliardo, in tal caso il punto X rappresenta il punto verso cui lanciare la pallina P per colpire prima il lato e poi la pallina Q.

È vero che il triangolo PQX ha area minima tra tutti i triangoli aventi il segmento PQ come base ed il terzo vertice sulla retta r?

Svolgimento. Si consideri il punto P', simmetrico di P rispetto ad r e sia X il punto di intersezione tra la retta r e la retta per P' e Q, come illustrato nello schizzo sottostante.



Allora la somma delle distanze $\|\overrightarrow{PX}\| + \|\overrightarrow{XQ}\|$ è uguale alla distanza $\|\overrightarrow{P'Q}\|$, che è minore della somma $\|\overrightarrow{PY}\| + \|\overrightarrow{YQ}\|$, qualunque sia il punto Y della retta r, in base alla disuguaglianza triangolare.

L'angolo (non orientato) tra $\overrightarrow{XP'}$ ed r è uguale all'angolo tra $\overrightarrow{XP}$ ed r perchè sono simmetrici rispetto alla retta r. Inoltre, l'angolo tra $\overrightarrow{XP'}$ ed r è uguale all'angolo tra $\overrightarrow{XQ}$ ed r perchè P', Q ed X sono allineati.

Passiamo quindi a calcolare il risultato in base ai dati del problema. La retta r', passante per P e perpendicolare ad r, ha equazione $r' : 2x+y = 2$ ed interseca r nel punto $T = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; dunque il simmetrico di P rispetto ad r è $P' = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (ovvero $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PT}$, ove O è l'origine del piano).

La retta per P' e Q ha equazione $x + 3y = 11$ ed interseca r nel punto $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dunque, indicato con $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vettore parallelo alla retta r, con un calcolo diretto, si verifica che

$$\frac{|\langle \mathbf{v}\,,\,\overrightarrow{PX}\rangle|}{\|\mathbf{v}\|\,\|\overrightarrow{PX}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|\langle \mathbf{v}\,,\,\overrightarrow{XQ}\rangle|}{\|\mathbf{v}\|\,\|\overrightarrow{XQ}\|}$$

e quindi che gli angoli tra la retta r e le rette PX ed XQ coincidono e sono uguali a $\frac{\pi}{4}$.

Per quanto riguarda l'area dei triangoli aventi il segmento PQ come base ed il terzo vertice sulla retta r, è evidente che il triangolo ha area minima quando degenera, ovvero quando il terzo vertice è il punto di intersezione tra la retta r e la retta PQ, e ciò accade nel punto $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, diverso da X. Dunque l'affermazione è falsa. □

Esercizio 4.6. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il piano π e la retta r, di equazioni*

$$\pi : 2x - y + z = 2 \qquad e \qquad r : \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}.$$

(a) Si scrivano le equazioni cartesiane della retta s, proiezione ortogonale della retta r sul piano π.

(b) Si scrivano le equazioni del luogo $\mathcal{Q}$ dei punti equidistanti da r ed s.

(c) Si mostri che l'intersezione tra $\mathcal{Q}$ ed il piano σ, contenente r ed s, è costituita da due rette perpendicolari tra loro.

Svolgimento. (a) La proiezione ortogonale di r su π si ottiene intersecando il piano π con il piano σ, contenente la retta r e parallelo al vettore $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; ove $\mathbf{n}$ è un vettore perpendicolare a π. I piani contenenti r hanno equazioni[(†)]

$$\lambda(x+y-2)+\mu(y+z-2)=0 \qquad \text{al variare di } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Un tale piano è parallelo al vettore $\mathbf{n}$ se, e solo se, le coordinate di tale vettore sono soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione del piano; ovvero se, e solo se, $\lambda=0$. Ciò significa che $\sigma: y+z=2$ e quindi

$$s:\begin{cases} y+z=2 \\ x-y=0 \end{cases}.$$

(b) La retta r passa per $P=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, mentre la retta s passa per $Q=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. Quindi i punti $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ equidistanti dalle due rette devono soddisfare alla condizione

$$d(X,r)=d(X,s) \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{\|\overrightarrow{PX}\times\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}=\frac{\|\overrightarrow{QX}\times\mathbf{w}\|}{\|\mathbf{w}\|};$$

ovvero, i punti di $\mathcal{Q}$ devono soddisfare all'equazione $xz-xy+y-z=0$.
(c) L'intersezione tra $\mathcal{Q}$ e σ è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\mathcal{Q}\cap\sigma:\begin{cases} xz-xy+y-z=0 \\ y+z=2 \end{cases}$$

ovvero i punti delle due rette

$$t_1:\begin{cases} x=1 \\ y+z=2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad t_2:\begin{cases} z-y=0 \\ y+z=2 \end{cases}.$$

Queste due rette sono parallele, rispettivamente, ai vettori $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, e quindi sono ortogonali tra loro. □

Esercizio 4.7. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il piano π e la retta r, di equazioni

$$\pi: x-y=0 \qquad \text{e} \qquad r:\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=2 \end{cases}.$$

(†) Dato un punto P ed un vettore $\mathbf{n}$, i punti X del piano passante per P e perpendicolare ad $\mathbf{n}$ sono determinati dalla condizione $\langle\mathbf{n}\,,\,\overrightarrow{PX}\rangle=0$. Una retta, passante per P e parallela ad un vettore $\mathbf{v}$, è intersezione di due piani distinti passanti per P, e quindi un punto X appartiene ad una tale retta se, e solo se,

$$\begin{cases} \langle\mathbf{n}_1\,,\,\overrightarrow{PX}\rangle=0 \\ \langle\mathbf{n}_2\,,\,\overrightarrow{PX}\rangle=0 \end{cases}$$

ove $\mathbf{n}_1$ ed $\mathbf{n}_2$ sono due qualsiasi vettori ortogonali a $\mathbf{v}$ e non proporzionali tra loro. Dunque, ogni vettore ortogonale a $\mathbf{v}$ si scrive come combinazione di $\mathbf{n}_1$ ed $\mathbf{n}_2$, ovvero

$$\langle\mathbf{v}\,,\,\mathbf{n}\rangle=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{n}=\lambda\mathbf{n}_1+\mu\mathbf{n}_2 \quad \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

e ciò significa che ogni piano passante per P e parallelo a $\mathbf{v}$ (e quindi contenente r) ha un'equazione del tipo

$$\langle\lambda\mathbf{n}_1+\mu\mathbf{n}_2\,,\,\overrightarrow{PX}\rangle=0 \qquad \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Ciò spiega la formula successiva.

(a) Si scrivano le equazioni cartesiane della retta s, proiezione ortogonale della retta r sul piano π.

(b) Si determini la retta t, perpendicolare ad s, contenuta nel piano π, e passante per $P = r \cap s$.

(c) Si fissi su ciascuna delle rette r, s e t un punto a distanza 1 da P. Detti R, S e T tali punti, si determini il volume del parallelepipedo di lati PR, PS e PT. □

Esercizio 4.8. Si considerino il piano $\pi : x + y = 2$ e la retta $r : \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$.

(a) Si determinino il punto P di intersezione tra π ed r ed il piano σ ortogonale a π e passante per r.

(b) Si determinino le rette passanti per P, contenute nel piano σ e tali da formare angoli uguali con la retta r e con la perpendicolare a π. □

Esercizio 4.9. Si considerino il piano $\pi : x - y = 0$ e la retta $r : \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}$.

(a) Si determinino il punto P di intersezione tra π ed r ed il piano σ ortogonale a π e passante per r.

(b) Si determinino le rette passanti per P, contenute nel piano σ e tali da formare angoli uguali con la retta r e con la perpendicolare a π. □

Esercizio 4.10. Si considerino il piano π e la retta r di equazioni

$$\pi : x + 2y - z = 2 \qquad \text{e} \qquad r : \begin{cases} x - z = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

(a) Si calcoli la distanza δ tra r e π.

(b) Si determini la retta parallela ad r, incidente il piano π ed avente distanza δ da r. □

Esercizio 4.11. *Nello spazio euclideo tridimensionale E^3, dotato di un riferimento ortonormale, si considerino le tre rette r, s e t, di equazioni*

$$r : \begin{cases} y + z = 2 \\ y - z = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} y - x = 2 \\ y - z = 2 \end{cases}, \qquad t : \begin{cases} y + x = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}.$$

(a) Si calcolino le distanze tra le rette, prese a due a due.

(b) Preso il punto $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in r$, si determini la retta h_1, passante per P_1 ed incidente sia s che t.

(c) Si determini la retta h_2, passante per $P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in r$ ed incidente sia s che t e si mostri che h_1 ed h_2 sono sghembe.

Svolgimento. *(a)* La retta r passa per il punto $P_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{v}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, la retta s passa per il punto $P_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{v}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ed infine la retta t passa per il punto $P_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{v}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dunque

$$d(r, s) = \frac{|\langle \overrightarrow{P_r P_s}\,, \mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_s \rangle|}{\|\mathbf{v}_r \times \mathbf{v}_s\|} = \sqrt{2}, \quad d(r, t) = 1, \quad d(s, t) = \sqrt{2}.$$

Dunque, le tre rette sono sghembe.

(b) La retta h_1 sarà l'intersezione tra il piano σ_1 contenente P_1 ed s ed il piano τ_1 contenente P_1 e t. Si ha quindi

$$\sigma_1 : 2x - y - z = -2, \qquad \tau_1 : x = 0, \qquad h_1 : \begin{cases} 2x - y - z = -2 \\ x = 0 \end{cases}.$$

(c) La retta h_2 sarà l'intersezione tra il piano σ_2 contenente P_2 ed s ed il piano τ_2 contenente P_2 e t. Si ha quindi

$$\sigma_2 : x + y - 2z = 2, \qquad \tau_2 : x - 3y = 0, \qquad h_2 : \begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x - 3y = 0 \end{cases}.$$

Infine si osserva facilmente che il sistema

$$h_1 \cap h_2 : \begin{cases} 2x - y - z = -2 \\ x = 0 \\ x + y - 2z = 2 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

non ha soluzione perchè la matrice completa ha rango 4, mentre la matrice incompleta ha rango 3. Dunque le due rette sono sghembe(*). □

Esercizio 4.12. Nello spazio euclideo tridimensionale E^3, dotato di un riferimento ortonormale, si considerino le tre rette r, s e t, di equazioni

$$r : \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x - z = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}, \qquad t : \begin{cases} x + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}.$$

(a) Si calcolino le distanze tra le rette, prese a due a due.

(b) Preso il punto $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in r$, si determini la retta h_1, passante per P_1 ed incidente sia s che t.

(c) Si determini la retta h_2, passante per $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in r$ ed incidente sia s che t e si mostri che h_1 ed h_2 sono sghembe. □

Esercizio 4.13. Nello spazio tridimensionale si considerino le rette r ed s di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x + 2y = 4 \\ z = 1 \end{cases}.$$

(a) Si mostri che le due rette sono sghembe e se ne calcoli la distanza.

(b) Per ogni numero reale t, si considerino i punti

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_t = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ t \end{pmatrix} \in r, \quad S_t = \begin{pmatrix} 2+2t \\ 1-t \\ 1 \end{pmatrix} \in s.$$

Si determini l'area del triangolo PR_tS_t al variare di t in $\mathbb{R}$. □

Esercizio 4.14. *Nello spazio euclideo tridimensionale E^3, dotato di un riferimento ortonormale, si considerino le rette r ed s, di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad e \qquad s : \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 3x + y + 4z = 6 \end{cases}.$$

(*) Il fatto che h_1 ed h_2 non siano parallele si può verificare osservando che il rango della matrice incompleta del sistema è uguale a 3; oppure osservando direttamente che h_1 è parallela a $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, mentre h_2 è parallela a $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Inoltre, il fatto che $h_1 \cap h_2 = \emptyset$ si poteva verificare osservando che la distanza tra le due rette (non parallele)

$$d(h_1, h_2) = \frac{|\langle \overrightarrow{P_1P_2}\,,\, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \rangle|}{\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|}$$

è diversa da zero.

Si determini il sottoinsieme di E^3 formato dai punti medi dei segmenti RS, al variare di R in r e di S in s.

Svolgimento. La retta r passa per $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre la retta s passa per $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Allora i punti delle due rette hanno rispettivamente coordinate

$$R_t = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{al variare di } t \in \mathbb{R}, \qquad S_s = \begin{pmatrix} s+2 \\ s \\ -s \end{pmatrix} \quad \text{al variare di } s \in \mathbb{R}.$$

Dunque l'insieme π dei punti medi tra punti di r e punti di s è

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{t+s+2}{2} \\ \frac{t+s}{2} \\ \frac{t-s}{2} \end{pmatrix} \mid (t,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

ed eliminando i parametri si vede che si tratta del piano di equazione cartesiana $\pi : x - y = 1^{(\dagger)}$. □

Esercizio 4.15. *Date le rette*

$$r : \begin{cases} x = -1 \\ z = y - 2 \end{cases} \qquad \textit{ed} \qquad s : \begin{cases} x = 1 \\ z = 2y + 1 \end{cases}$$

trovare un segmento PQ, con $P \in r$ e $Q \in s$, tale che il suo punto medio appartenga alla retta h di equazioni $x + 1 = y = z$.

Svolgimento. La retta r passa per $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre la retta s passa per $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Allora i punti delle due rette hanno rispettivamente coordinate

$$R_t = \begin{pmatrix} -1 \\ 2+t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{al variare di } t \in \mathbb{R}, \qquad S_s = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 2s+1 \end{pmatrix} \quad \text{al variare di } s \in \mathbb{R}.$$

Dunque il punto medio tra R_t ed S_s ha coordinate $M_{s,t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{t+s+2}{2} \\ \frac{t+2s+1}{2} \end{pmatrix}$ ed appartiene alla retta h se, e solo se,

$$\begin{cases} t + s + 2 = 2 \\ t + 2s + 1 = 2 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} s = 1 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Dunque, il segmento cercato ha estremi $P = R_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $Q = S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e ciò conclude la discussione. □

Esercizio 4.16. Date le rette $r : \begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = 1 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = y + 1 \\ z = -1 \end{cases}$ trovare un segmento PQ, con $P \in r$ e $Q \in s$, tale che il suo punto medio appartenga alla retta h di equazioni $x = y = z - 1$. □

Esercizio 4.17. *Sia π il piano di equazione $2x + z = 5$ ed r la retta per l'origine perpendicolare al piano π. Si determinino le rette del piano π, passanti per il punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e distanti $\sqrt{2}$ dalla retta r.*

Svolgimento. Osserviamo che, essendo $r \perp \pi$, si tratta di determinare le due rette passanti per Q e tangenti alla circonferenza di centro in $r \cap \pi$ e raggio $\sqrt{2}$.

$^{(\dagger)}$ Il lettore può verificare che le rette r ed s sono entrambe parallele a π e che $d(r, \pi) = d(s, \pi)$.

Poichè tali rette contengono il punto $Q \in \pi$, queste sono completamente determinate se si conosce un vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ parallelo ad esse. Le condizioni da porre sul vettore $\mathbf{v}$ sono che esso sia parallelo a π (ovvero che le sue coordinate siano soluzioni dell'equazione omogenea associata all'equazione di π) e quindi deve aversi $c = -2a$. Inoltre, detta s la retta per Q e parallela a $\mathbf{v}$, deve aversi

$$d(r, s) = \frac{|\langle \overrightarrow{OQ}\,, \mathbf{v} \times \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{n}\|} = \sqrt{2},$$

ove $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un vettore perpendicolare a π (e quindi parallelo ad r). Dunque deve aversi $5a^2 - b^2 = 0$ e quindi vi sono due rette soddisfacenti alle condizioni poste e sono parallele rispettivamente ai vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \\ -2 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 4.18. Sia π il piano di equazione $x - 2z = 5$ ed r la retta per l'origine perpendicolare al piano π. Si determinino le rette del piano π, passanti per il punto $P = (1, 2, -2)$ e distanti $\sqrt{3}$ dalla retta r. □

Esercizio 4.19. Trovare i punti del piano $\alpha : x + y + z - 1 = 0$, aventi distanza 5 dalle rette

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = \mu \end{cases}$$

□

Esercizio 4.20. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il piano π e la retta r, di equazioni cartesiane*

$$\pi : 2x - 3y + z = 6 \qquad \text{e} \qquad r : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino i punti X, Y e Z che si ottengono intersecando il piano π con gli assi coordinati e si determini l'area del parallelogramma avente i punti X, Y e Z come vertici.

(b) Al variare del punto R sulla retta r si calcoli il volume del parallelepipedo di vertici X, Y, Z ed R. È vero che tale volume è indipendente dalla scelta del punto R?

Svolgimento. *(a)* Le intersezioni tra π e gli assi coordinati si determinano risolvendo i sistemi lineari

$$X : \begin{cases} 2x - 3y + z = 6 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad Y : \begin{cases} 2x - 3y + z = 6 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad Z : \begin{cases} 2x - 3y + z = 6 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Dunque, si ha $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ e l'area del parallelogramma avente i punti X, Y e Z come vertici è uguale ad

$$A = \|\overrightarrow{XY} \times \overrightarrow{XZ}\| = \left\| \begin{pmatrix} -12 \\ 18 \\ -6 \end{pmatrix} \right\| = 6\sqrt{14}.$$

(b) La retta r passa per $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; dunque i punti di questa retta hanno coordinate $R_t = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Il volume del parallelepipedo avente X, Y, Z ed R_t come vertici è uguale a

$$V = |\langle \overrightarrow{XR_t}\,, \overrightarrow{XY} \times \overrightarrow{XZ} \rangle| = 36$$

che non dipende da t. Ciò accade perchè r e π sono paralleli e quindi $V = Ad(r, \pi)$. $\square$

Esercizio 4.21. Trovare l'equazione della retta incidente le rette:

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = \mu \\ y = 0 \\ z = -\mu - 1 \end{cases}$$

formante angoli uguali con i piani xy, xz e yz. $\square$

Esercizio 4.22. Trovare le equazioni delle rette passanti per il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, incidenti la retta $r : \begin{cases} x = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$, che formano con questa un angolo di $\frac{\pi}{6}$. $\square$

Sommario del contenuto