Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova scritta del 8 luglio 2002

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri il triangolo, avente come vertici i punti P, Q, R, di coordinate*

$$P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

rispetto ad un riferimento ortonormale.

(a) *Si scrivano le equazioni cartesiane della retta b, bisettrice dell'angolo $Q\hat{P}R$.*
(b) *Si determini l'equazione cartesiana del cono illimitato $\mathscr{C}$, ottenuto dalla rotazione della retta contenente il lato PQ del triangolo PQR attorno alla retta b.*
(c) *Si determinino dal punto di vista affine le coniche tagliate su $\mathscr{C}$ dai piani del fascio avente come asse la retta per Q parallela al lato PR.*

Svolgimento. (a). I vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ hanno la stessa lunghezza e quindi la loro somma $v = \overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ è la diagonale di un rombo e quindi ha la direzione della bisettrice dell'angolo $P\hat{Q}R$. Dunque la retta b passa per P ed è parallela al vettore v ed ha equazione cartesiana

$$b : \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}.$$

(b). La retta parallela al lato PQ forma con la bisettrice b un angolo $0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$ determinato dalla condizione

$$\cos\vartheta = \frac{|v \cdot \overrightarrow{PQ}|}{\|v\| \, \|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \, \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{2}.$$

Quindi i punti X del cono $\mathscr{C}$ sono tutti e soli quelli che soddisfano alla condizione

$$\cos\vartheta = \frac{|v \cdot \overrightarrow{PQ}|}{\|v\| \, \|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{1}{2}, \quad \text{o, meglio,} \quad 2|v \cdot \overrightarrow{PX}| = \|v\| \, \|\overrightarrow{PX}\|$$

da cui si ricava l'equazione del cono $\mathscr{C}$, ovvero $\mathscr{C} : x^2 - y^2 + z^2 + 4xz - 2x + 2y + 2z - 3 = 0$.

(c). La retta r, passante per Q e parallela al lato PR, interseca il cono in un punto improprio perché la superficie del cono contiene il lato PR. Quindi tutte le coniche tagliate su $\mathscr{C}$ dai piani del fascio avente come asse la retta r hanno un punto razionale all'infinito e quindi non possono essere ellissi. Inoltre, nessuno dei piani in questione è tangente al cono, a meno che non contenga il vertice P e quindi l'unica conica degenere della famiglia è costituita da due rette distinte ed è tagliata dal piano contenente il triangolo PQR, ovvero $\sigma_1 : x - y - z + 3 = 0$. Dunque tutte le rimanenti coniche della famiglia sono iperboli non-degeneri eccetto il caso in cui il piano σ_2 è parallelo al piano tangente al cono in tutti i punti del lato PQ, ovvero $\sigma_2 : x - y + 2z + 3 = 0$. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con l'endomorfismo $j : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrice*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.

Si verifichi che j^2 coincide con la moltiplicazione per -1 e si determini un isomorfismo spazi vettoriali reali $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\phi^{-1}j\phi$ coincida con la moltiplicazione per i in $\mathbb{C}^2$.

Svolgimento. Per verificare che j^2 coincida con la moltiplicazione per -1 è sufficiente calcolare la matrice J^2 ed osservare che è uguale a $-\mathbf{1}_4$. Osserviamo che il sottospazio $L = \langle e_1, e_2 \rangle$ di $\mathbb{R}^4$ soddisfa alla condizione $L \cap jL = \langle 0 \rangle$ e quindi può essere identificato con il sottospazio $\mathbb{R}^2$ di $\mathbb{C}^2$. Prendiamo quindi la base di $\mathbb{C}^2$ come spazio vettoriale reale, $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, iv_1, iv_2\}$, ove $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. In questa base la moltiplicazione per i in $\mathbb{C}^2$ ha matrice

$$I = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi prendere l'isomorfismo $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$, definito da

$$\phi(v_1) = e_1, \quad \phi(v_2) = e_2, \quad \phi(iv_1) = j(e_1) = -5e_3 + 2e_4, \quad \phi(iv_2) = j(e_2) = 2e_3 - e_4,$$

ovvero l'omomorfismo di matrice

$$P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

che è chiaramente invertibile.

A questo punto si può concludere osservando che $JP = PI$ e quindi

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(i) = I = P^{-1}JP = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{V}}(\phi^{-1})\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(j)\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\phi) = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi^{-1}j\phi),$$

che è quanto volevamo. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri l'applicazione $\Phi : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ definita da $\Phi(A) = \left(\begin{smallmatrix} \operatorname{tr} A \\ \det A \end{smallmatrix}\right)$ e si osservi che $\Phi(A) = \Phi(B)$ quando $B = P^{-1}AP$, per qualche matrice invertibile P.*

(a) Si mostri che nella controimmagine di ogni punto $p = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ di $\mathbb{C}^2$ c'è, a meno di simiglianza, un'unica matrice diagonale, Δ_p, e si scrivano le entrate di questa matrice in funzione di a e b.

(b) Si mostri che l'insieme dei punti p in $\mathbb{C}^2$ per cui $\Phi^{-1}(p) \neq \left\{ P^{-1}\Delta_p P \mid P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \right\}$ è una conica di $\mathbb{C}^2$ e se ne scriva l'equazione affine.

Svolgimento. È noto che matrici simili hanno uguale traccia ed uguale determinante. Per la traccia, ciò si può dedurre dall'osservazione elementare che $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$ per qualsiasi coppia di matrici, mentre per il determinante è una conseguenza del Teorema di Binet.

(a). Osserviamo che, se A è una matrice quadrata di ordine 2, allora il suo polinomio caratteristico è $p_A(x) = x^2 - (\operatorname{tr} A)x + \det A$ e quindi la controimmagine del punto $p = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ di $\mathbb{C}^2$ è l'insieme di tutte le matrici di $M_2(\mathbb{C})$, che hanno polinomio caratteristico $x^2 - ax + b$. Questa equazione ha due radici (non necessariamente distinte) in $\mathbb{C}$, siano $\alpha_1 = \frac{a + (a^2-4b)^{1/2}}{2}$ ed $\alpha_2 = \frac{a - (a^2-4b)^{1/2}}{2}$, ove $(a^2 - 4b)^{1/2}$ sta ad indicare una delle due radici quadrate di $a^2 - 4b$. Quindi la matrice

$$\Delta_p = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

appartiene alla controimmagine del punto p. In particolare, se gli autovalori sono distinti, cioè se $\alpha_1 \neq \alpha_2$, allora ogni altra matrice con lo stesso polinomio caratteristico è simile a Δ_p, e quindi

$$\Phi^{-1}(p) = \left\{ P^{-1}\Delta_p P \mid P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \right\}.$$

(b). Se invece $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, allora le matrici con lo stesso polinomio caratteristico possono avere due forme di Jordan distinte, ovvero

$$\Delta_p = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad J_p = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

che non sono simili tra loro; quindi, in questo caso, $\Phi^{-1}(p) \neq \left\{ P^{-1}\Delta_p P \mid P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \right\}$. Il polinomio caratteristico $x^2 - ax + b$ ha una radice doppia se, e solo se, $a^2 - 4b = 0$ e questa è l'equazione della conica cercata. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = J$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}_4) = (x + 2)^4$ e si ha

$$A + 2\mathbf{1}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A + 2\mathbf{1}_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -9 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A + 2\mathbf{1}_4)^3 = \mathbf{0},$$

con $\mathrm{rk}\,(A + 2\mathbf{1}_4) = 2$ e $\mathrm{rk}\,((A + 2\mathbf{1}_4)^2) = 1$. Il polinomio minimo è quindi $(x + 2)^3$, ed una matrice di Jordan di ϕ è quindi

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Preso il vettore $e_1 \in \ker(\phi + 2)^3 \setminus \ker(\phi + 2)^2$, si ha che i vettori

$$v_4 = e_1, \quad v_3 = (\phi + 2)(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3 + e_4, \quad v_2 = (\phi + 2)^2(e_1) = 9e_2 + 9e_4,$$
$$v_1 = e_1 + e_3,$$

formano una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, rispetto a cui ϕ ha matrice J. Considerata la matrice

$$P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $AP = PJ$. □

ESERCIZIO 5. *Si studi la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x - 2y = 0.$$

Svolgimento. Supponiamo il piano euclideo immerso nel piano proiettivo scegliendo come di consueto, la retta impropria di equazione omogenea $x_0 = 0$ ed utilizziamo indifferentemente sia coordinate omogenee che le corrispondenti coordinate affini.

La conica $\mathcal{C}$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

con $\det A = -25$ e $\det A' = 0$. Dunque si tratta di una parabola (non-degenere).

Il punto improprio di $\mathcal{C}$ è $P_\infty = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ che corrisponde alla direzione dell'asse. L'asse è la polare della direzione ortogonale, ovvero la polare di $P_\infty^\perp = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, cioè la retta $h : x + 2y = 0$. L'asse passa per l'origine che appartiene al supporto delle conica e quindi l'origine è il vertice della parabola e la tangente al vertice è quindi la retta $t : 2x - y = 0$. L'equazione canonica di questa parabola è $2Y = \sqrt{5}X^2$ ed il fuoco è il punto $F_\lambda = \left(\begin{smallmatrix} -2/10 \\ 1/10 \end{smallmatrix}\right)$. □