Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT)

I^o foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. *Si dica per quali* $x \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$\frac{2}{x-1} \leq \frac{x+1}{3x^2-2}.$$

Svolgimento. La disuguaglianza proposta è equivalente a

$$\frac{2(3x^2-2)-(x-1)(x+1)}{(x-1)(3x^2-2)} \leq 0, \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{5x^2-3}{(x-1)(3x^2-2)} \leq 0,$$

e si tratta quindi di determinare l'insieme su cui i segni di numeratore e denominatore sono discordi. Osservando i singoli fattori, si ha

$$\begin{array}{llcll} 5x^2-3>0 & \text{se } x<-\sqrt{\frac{3}{5}} \text{ oppure } x>\sqrt{\frac{3}{5}}; & \text{e} & 5x^2-3\leq 0 & \text{se } -\sqrt{\frac{3}{5}}\leq x\leq\sqrt{\frac{3}{5}}; \\ 3x^2-2>0 & \text{se } x<-\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ oppure } x>\sqrt{\frac{2}{3}}; & \text{e} & 3x^2-2<0 & \text{se } -\sqrt{\frac{2}{3}}< x<\sqrt{\frac{2}{3}}; \\ x-1>0 & \text{se } x>1; & \text{e} & x-1<0 & \text{se } x<1. \end{array}$$

Confrontando i segni dei tre termini e ricordando che $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$, si può concludere che la disuguaglianza è soddisfatta se

$$x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left[-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right] \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right).$$

Si osservi che vanno esclusi gli estremi su cui si annulla il denominatore, ma non quelli su cui si annulla il numeratore. □

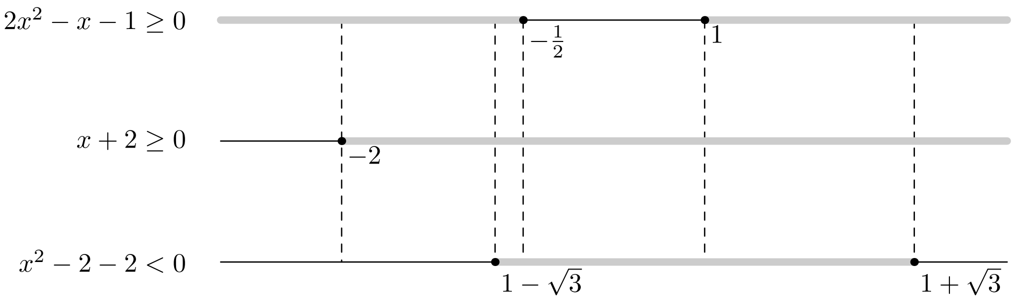
ESERCIZIO 2. *Si dica per quali* $x \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$x+2 > \sqrt{4x^2-2x-2}.$$

Svolgimento. La disuguaglianza è equivalente alle condizioni

$$\begin{cases} 4x^2-2x-2 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ (x+2)^2 > 4x^2-2x-2 \end{cases}.$$

La prima perchè esista la radice in $\mathbb{R}$, la seconda perchè la radice quadrata di un numero reale è sempre non negativa e la successiva elevazione al quadrato può introdurre soluzioni della terza condizione con $x+2<0$. La terza condizione è equivalente a $3(x^2-2x-2)<0$ e quindi, mettendo insieme le tre condizioni si può ottenere la seguente tabella, ove sono evidenziati in grigio i sottoinsiemi della retta dove è soddisfatta la disuguaglianza indicata a fianco.



Quindi la disuguaglianza proposta è soddisfatta per $x \in \left(1-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[1, 1+\sqrt{3}\right)$. □

ESERCIZIO 3. *Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha*

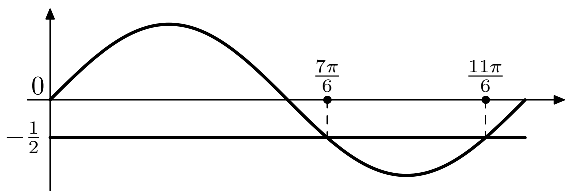
$$\frac{\sin 2x + \cos x}{\cos 2x} \leq 0.$$

Svolgimento. Si tratta di funzioni periodiche, di periodo 2π, quindi possiamo ridurci a studiare la questione sull'intervallo $[0, 2\pi]$. Per le formule di duplicazione $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$; quindi si ha $\sin 2x + \cos x = \cos x(2 \sin x + 1)$. Il problema è quindi di determinare il segno del quoziente

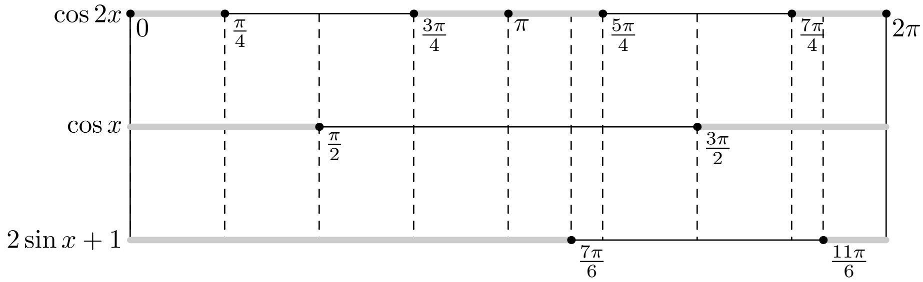
$$\frac{\cos x(2 \sin x + 1)}{\cos 2x}$$

ovvero il segno di ciascuno dei termini che compaiono in esso: $\cos 2x$ $\cos x$ e $2 \sin x + 1$.

Per quanto riguarda i primi due, si tratta di ricordare il segno del coseno, col procedere della variabile; nel terzo caso, si osservi che $2 \sin x + 1 > 0$ se, e solo se, $\sin x > -\frac{1}{2}$, e si ricordi l'andamento della funzione seno (cf. la figura qui sotto)



Possiamo raccogliere i segni dei tre termini nella tabella qui sotto, evidenziando gli intervalli su cui i termini sono positivi.



La conclusione è che $\frac{\sin 2x + \cos x}{\cos 2x} \leq 0$ quando x varia nell'insieme

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left(\frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}\right].$$

Notare la presenza o meno degli estremi degli intervalli per evitare i punti in cui si annulla il denominatore.

□

ESERCIZIO 4. *Si disegnino nel piano i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ per cui si ha*

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 - 2x + 1 > 1 \\ y + x - 2 \leq 0 \end{cases} .$$

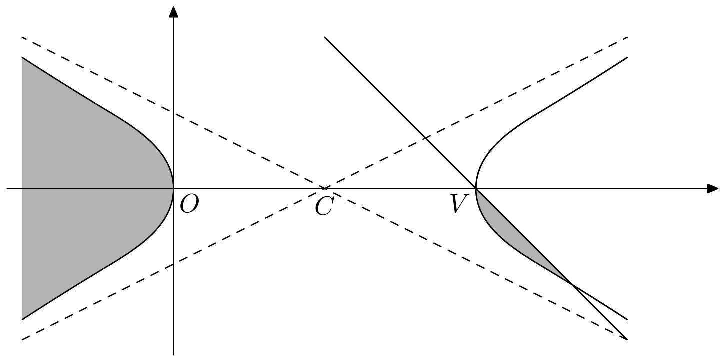
Svolgimento. La curva di equazione $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 1$, ovvero $(x-1)^2 - 4y^2 = 1$, è un'iperbole con gli assi paralleli agli assi coordinati ed il centro nel punto $C = (1, 0)$. Gli asintoti sono le rette $a_1 : x - 1 + 2y = 0$ ed $a_2 : x - 1 - 2y = 0$ ed i vertici sono i punti $O = (0, 0)$ e $V = (2, 0)$ (intersezioni con gli assi). I punti che soddisfano alla disuguaglianza $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 > 1$, ovvero $(x - 1)^2 - 4y^2 > 1$, sono quelli che si trovano dall'altra parte del centro rispetto all'iperbole.

La curva di equazione $y + x - 2 = 0$ è invece la retta, passante per i punti $(2, 0)$ e $(0, 2)$, ed i punti che soddisfano alla disuguaglianza $y + x - 2 \leq 0$, ovvero $y \leq 2 - x$, sono quelli che si trovano al di sotto della retta.

Si osservi che la curva e la retta si intersecano nei due punti soluzione del sistema

$$\begin{cases} (x - 1)^2 - 4y^2 = 1 \\ y = 2 - x \end{cases}$$

ovvero $V = (2, 0)$ e $P = (\frac{8}{3}, -\frac{2}{3})$ e quindi la soluzione del problema è data dall'intersezione dei due insiemi di soluzioni, ovvero dalla regione evidenziata nella figura qui sotto.



Il bordo costituito dal segmento di retta è compreso nella regione perchè è richiesta una disuguaglianza debole, mentre non sono compresi gli archi di iperbole. □