Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT)

II^o foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. *Si calcolino i limiti*

$$(a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-2x^2+4x\sqrt[3]{x}}{2x^4-\sqrt[3]{x^{10}}};$$

$$(b)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{4x\sqrt[3]{x}-x}{\sqrt[3]{2x^4+1}};$$

$$(c)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{x}};$$

$$(d)\ \lim_{x\to0}\frac{x\log(1-x)}{\sin x};$$

$$(e)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3\log x}{2\sqrt[3]{x^2}};$$

$$(f)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3\cos x}{5\sqrt[5]{x^3}};$$

$$(g)\ \lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2};$$

$$(h)\ \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x;$$

$$(i)\ \lim_{x\to0}\frac{\log_{10}(1+x)}{x};$$

$$(j)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{3-2x}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$(k)\ \lim_{x\to0}2^{\frac{\sin 2x}{\sin 3x}};$$

Svolgimento. (a). Mettiamo in evidenza i termini dominanti al numeratore ed al denominatore:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-2x^2+4x\sqrt[3]{x}}{2x^4-\sqrt[3]{x^{10}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4(1-\frac{2}{3x^2}+\frac{4}{3x^2\sqrt[3]{x^2}})}{2x^4(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})}.$$

I termini tra parentesi tendono ad 1, per $x\to+\infty$, e $\frac{3x^4}{2x^4}$ tende, ovviamente, a $\frac{3}{2}$, che è quindi il valore del limite proposto.

(b). Analogamente al caso precedente, si conclude che

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x\sqrt[3]{x}-x}{\sqrt[3]{2x^4+1}}=2\sqrt[3]{4}.$$

(c). Ricordando il limite fondamentale $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, si ha

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\sqrt{x}=0.$$

(d). Analogamente al caso precedente, si conclude che

$$\lim_{x\to0}\frac{x\log(1-x)}{\sin x}=0.$$

(e). Ricordando che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$ qualunque sia il numero reale positivo α, si conclude che il limite proposto vale 0.

(f). Poichè $-1 \le \cos x \le 1$ per ogni valore di x ($\cos x$ è una funzione limitata), si ha

$$\frac{-3}{5\sqrt[5]{x^3}} \le \frac{3\cos x}{5\sqrt[5]{x^3}} \le \frac{3}{5\sqrt[5]{x^3}}, \qquad \text{e quindi} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3\cos x}{5\sqrt[5]{x^3}} = 0.$$

(g). Senza usare metodi sofisticati, basta ricordare che $\cos 0 = 1$ e quindi, per le formule di prostaferesi, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2(x/2)}{4(x/2)^2} = -\frac{1}{2}.$$

(h). Si osservi che

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty} \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} =$$
$$= \lim_{y\to+\infty} \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e;$$

ove si è ricordato il limite fondamentale $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

(i). Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Consideriamo quindi il cambiamento di variabile $x = \frac{1}{y}$, tramite il quale il limite diventa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_{10}(1+x)}{x} = \lim_{y\to\infty} y \log_{10}\left(1+\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to\infty} \log_{10}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y.$$

E, per la continuità della funzione logaritmo, questo limite vale $\log_{10} e$ sia per $y \to +\infty$ (limite fondamentale) che per $y \to -\infty$, come abbiamo appena visto.

(j). Mettendo in evidenza i termini dominanti, si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3-2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x(1-3/2x)}{|x|\sqrt{1+1/x^2}} = 2,$$

perchè, per $x < 0$, $|x| = -x$.

(k). Dobbiamo calcolare il limite dell'esponente, che è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, ma si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{3x}{\sin 3x} = \frac{2}{3};$$

ove si è ricordato il limite fondamentale $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Dunque, per la continuità delle funzioni esponenziali, il limite proposto è uguale a $2^{2/3} = \sqrt[3]{4}$. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri la funzione $f(x)$ così definita*

$$f(x) = \begin{cases} e^{1-x^2}\cos(\pi x) & \text{se } |x| \ge 1 \\ a + bx^2 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}.$$

Si determinino (se esistono) le costanti a e b affinché la funzione $f(x)$ sia derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si tracci un grafico indicativo dell'andamento di $f(x)$ e si disegnino le rette tangenti al grafico nei punti $x = 0$ ed $x = 1$.

Svolgimento. $f(x)$ è una funzione *pari* (ovvero $f(x) = f(-x)$) ed è continua e derivabile per $x \neq \pm 1$, indipendentemente dal valore che si attribuisca ai parametri a e b; dunque $f(x)$ è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ se, e solo se, lo è per $x = 1$. In base alla definizione di f, si ha

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = a + b.$$

Dunque f è continua(per $x = 1$) se i due limiti coincidono, ovvero se $a + b = -1$. Supponiamo soddisfatta questa condizione ed osserviamo che, per $x \neq 1$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{1-x^2}[2x\cos(\pi x) + \pi \sin(\pi x)] & \text{se } |x| > 1 \\ 2bx & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

quindi (supponendo f continua per $x = 1$), si ha

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2 \qquad \text{e} \qquad f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2b.$$

In conclusione, $f(x)$ è continua e derivabile se, e solo se, $\begin{cases} a + b = -1 \\ 2b = 2 \end{cases}$, ovvero quando $a = -2$ e $b = 1$. Le rette tangenti al grafico nei punti $x = 0$ ed $x = 1$ sono rispettivamente $r_0 : y = -2$ ed $r_1 : y = 2x - 3$. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri la funzione $f(x)$ così definita*

$$f(x) = \begin{cases} e^{1-x^2} \sin \frac{\pi x}{2} & \text{se } |x| \geq 1 \\ ax + bx^3 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}.$$

Si determinino (se esistono) le costanti a e b affinché la funzione $f(x)$ sia derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si tracci un grafico indicativo dell'andamento di $f(x)$ e si disegnino le rette tangenti al grafico nei punti $x = 0$ ed $x = 1$.

Svolgimento. $f(x)$ è una funzione *dispari* (ovvero $f(-x) = -f(x)$) ed è continua e derivabile per $x \neq \pm 1$, indipendentemente dal valore che si attribuisca ai parametri a e b; dunque $f(x)$ è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ se, e solo se, lo è per $x = 1$. In base alla definizione di f, si ha

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = a + b.$$

Dunque f è continua(per $x = 1$) se i due limiti coincidono, ovvero se $a + b = 1$. Supponiamo soddisfatta questa condizione ed osserviamo che, per $x \neq 1$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{1-x^2}\left[2x \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}\right] & \text{se } |x| > 1 \\ a + 3bx^2 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

quindi (supponendo f continua per $x = 1$), si ha

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -2 \qquad \text{e} \qquad f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = a + 3b.$$

In conclusione, $f(x)$ è continua e derivabile se, e solo se, $\begin{cases} a + b = 1 \\ a + 3b = -2 \end{cases}$, ovvero quando $a = \frac{5}{2}$ e $b = -\frac{3}{2}$. Le rette tangenti al grafico nei punti $x = 0$ ed $x = 1$ sono rispettivamente $r_0 : y = \frac{5}{2}x$ ed $r_1 : y = -2x + 3$). □

ESERCIZIO 4. *Si determinino le costanti a e b affinchè la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2\sinh x} & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + ax + b & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile su tutta la retta reale. Si scriva l'equazione della tangente al grafico di f per $x = 0$.

Svolgimento. Sulla semiretta $(-\infty, 0)$ la funzione data coincide con la funzione composta di due funzioni derivabili ed è quindi (continua e) derivabile. Sulla semiretta $(0, +\infty)$ la funzione data coincide con un polinomio ed è quindi derivabile indipendentemente dai valori delle costanti a e b. Bisogna quindi discutere il comportamento della funzione per $x = 0$. Ora

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{-2\mathrm{sinh}x} = f(0) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 + ax + b = b.$$

Dunque f è continua per $x = 0$ (e quindi su tutta la retta reale) se, e solo se, $b = 1$. Inoltre, per $x \neq 0$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -2\mathrm{cosh}x\, e^{-2\mathrm{sinh}x} & \text{se } x < 0 \\ 2x + a & \text{se } x < 0 \end{cases};$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = a,$$

dove la prima uguaglianza nei due limiti discende dalla regola di de L'Hôpital, che può essere applicata perchè f è continua per $x = 0$. Dunque f è derivabile per $x = 0$ (e quindi su tutta la retta reale) se, e solo se, $a = -2$ e $b = 1$.

Possiamo quindi concludere osservando che la tangente al grafico di f per $x = 0$ è la retta di equazione $y = f'(0)x + f(0)$, ovvero $y = -2x + 1$. □

ESERCIZIO 5. *Si determinino le costanti a e b affinchè la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{se } x < 0 \\ e^{2\sin x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile su tutta la retta reale. Si scriva l'equazione della tangente al grafico di f per $x = 0$.

Svolgimento. Sulla semiretta $(-\infty, 0)$ la funzione data coincide con un polinomio ed è quindi (continua e) derivabile indipendentemente dai valori delle costanti a e b. Sulla semiretta $(0, +\infty)$ la funzione data coincide con la funzione composta di due funzioni derivabili ed è quindi derivabile. Bisogna quindi discutere il comportamento della funzione per $x = 0$. Ora

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 + ax + b = b \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{2\sin x} = f(0) = 1.$$

Dunque f è continua per $x = 0$ (e quindi su tutta la retta reale) se, e solo se, $b = 1$. Inoltre, per $x \neq 0$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{se } x < 0 \\ 2\cos x\, e^{2\sin x} & \text{se } x > 0 \end{cases};$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = a \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2,$$

dove la prima uguaglianza discende dalla regola di de L'Hôpital, che può essere applicata perchè f è continua per $x = 0$. Dunque f è derivabile per $x = 0$ (e quindi su tutta la retta reale) se, e solo se, $a = 2$ e $b = 1$.

Possiamo quindi concludere osservando che la tangente al grafico di f per $x = 0$ è la retta di equazione $y = f'(0)x + f(0)$, ovvero $y = 2x + 1$. □