Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT)

III^o foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. *Si studino le seguenti funzioni*

$$(a)\ f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}};$$
$$(b)\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}};$$
$$(c)\ f(x) = \frac{e^{\frac{x+1}{x-2}}}{x-2};$$
$$(d)\ f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right);$$
$$(e)\ f(x) = \frac{e^x}{\cosh x};$$

e si tracci un grafico indicativo del loro andamento.

Svolgimento. (c). La funzione è definita, continua e derivabile per $x \neq 2$, e si ha

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0,$$

ove il primo dei due limiti è di immediata verifica, mentre il secondo si presenta in una forma indeterminata $(\frac{0}{0})$ e può essere calcolato nel modo seguente: dopo la sostituzione $t = \frac{x+1}{x-2}$, il limite proposto risulta uguale al limite $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{(t-1)e^t}{3} = 0$.

Inoltre,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0,$$

perchè in entrambo i casi il numeratore della frazione che definisce $f(x)$, tende ad un limite finito, mentre il denominatore diverge.

Possiamo quindi passare ad occuparci della derivata prima, che è uguale a

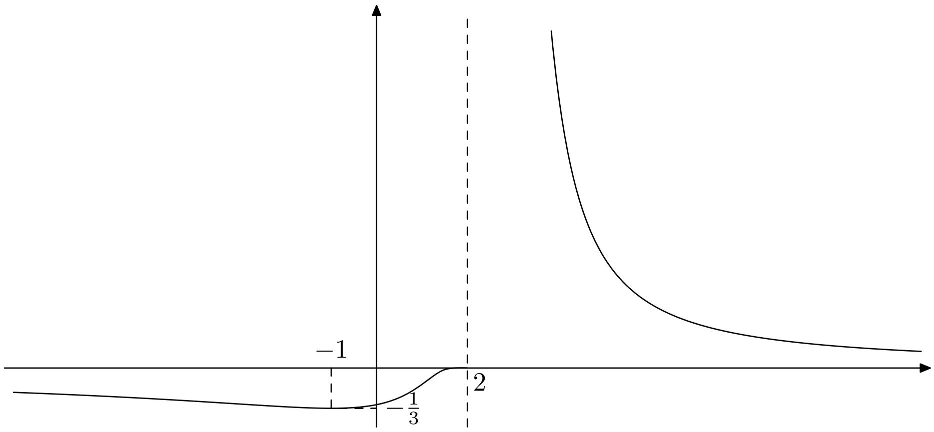
$$f'(x) = -\frac{x+1}{x-2}\frac{e^{\frac{x+1}{x-2}}}{(x-2)^2},$$

e quindi il segno di $f'(x)$ dipende solo dal primo fattore e perciò si ha che

- $f(x)$ è decrescente per $x < -1$ e per $x > 2$, mentre
- $f(x)$ è crescente per $-1 < x < 2$.

Dunque, $x = -1$ è un punto di minimo relativo (ed assoluto) per $f(x)$, mentre, per quanto già visto, f è illimitata superiormente. In particolare, $f(-1) = -\frac{1}{3}$.

In base ai dati raccolti possiamo già tracciare il seguente grafico indicativo dell'andamento della funzione f.



Invitiamo comunque il lettore a studiare anche il segno della derivata seconda della funzione proposta, onde ottenere un risultato più preciso. □

ESERCIZIO 2. *Si calcolino i limiti*

$$(a)\ \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{1/\sin^2 x};$$
$$(b)\ \lim_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}^2 x)^{1/(1-\cos x)};$$
$$(c)\ \lim_{x\to +\infty} x^2\left|\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x-\frac{1}{x}\right|;$$
$$(d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\log(1+x)+1-x-\cos x};$$
$$(e)\ \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2\log(1-\sin x)}}{\sin\sqrt{|x|^3}};$$
$$(f)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x)+\sin x-1+\cosh x}{\sin x-\sinh x};$$
$$(g)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{x^2}+\frac{3}{2}x\sinh x}{[\log(1-x)]^4};$$
$$(h)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cosh x-e^{x^2}+\frac{1}{2}x\sin x}{[\log(1+x)]^4};$$
$$(i)\ \lim_{x\to +\infty} x^4\left(2e^{1/x^2}-2\cosh\frac{1}{x}-\frac{\sin(1/x)}{x}\right);$$

Svolgimento. (a). Osservando che $(1+x^2)^{1/\sin^2 x}=e^{\log(1+x^2)/\sin^2 x}$, ci si riduce a calcolare il limite dell'esponente, ovvero

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2(1+x^2)\sin x\cos x}=1,$$

ove si è applicata la regola di de l'Hôpital e si è ricordato il limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Quindi il limite proposto è uguale ad e.

(b). Analogamente al caso precedente, $(1+\mathrm{tg}^2 x)^{1/(1-\cos x)}=e^{\log(1+\mathrm{tg}^2 x)/(1-\cos x)}$ e ci si riduce a calcolare il limite dell'esponente, ovvero

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\mathrm{tg}^2 x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{tg}x(1+\mathrm{tg}^2 x)}{(1+\mathrm{tg}^2 x)\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos x}=2.$$

E quindi il limite proposto è uguale ad e^2.

(c). Osserviamo che la funzione $\operatorname{arctg}x - \frac{1}{x}$ è decrescente per $x \to +\infty$ ed ha come limite $\frac{\pi}{2}$, quindi si ha $\left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}x - \frac{1}{x}\right| = \operatorname{arctg}x + \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}$. Il limite proposto è uguale a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}x + \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x^2}},$$

che, applicando la regola di de L'Hôpital, diventa

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^2(1+x^2)} = 0.$$

(d). Ricordando gli sviluppi di Mc Laurin

$$\operatorname{tg}x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3),$$

si ha

$$\frac{\operatorname{tg}x - \sin x}{\log(1+x) + 1 - x - \cos x} = \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)};$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}x - \sin x}{\log(1+x) + 1 - x - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{3}x^3} = \frac{3}{2}.$$

(e). Ricordando gli sviluppi di Mc Laurin ed il limite fondamentale $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, si ha $\log(1-\sin x) = -\sin x + o(\sin x) = -x + o(x)$ e $\sin\sqrt{|x|^3} = (-x)^{3/2} + o(x^{3/2})$. Quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2\log(1-\sin x)}}{\sin\sqrt{|x|^3}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(-x)^{3/2}}{(-x)^{3/2}} = 1.$$

(f). Ricordando gli sviluppi di Mc Laurin

$$\operatorname{sinh}x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$
$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3), \qquad \operatorname{cosh}x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3),$$

si ha

$$\frac{\log(1-x) + \sin x - 1 + \operatorname{cosh}x}{\sin x - \operatorname{sinh}x} = \frac{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)};$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x) + \sin x - 1 + \operatorname{cosh}x}{\sin x - \operatorname{sinh}x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3}{-\frac{1}{3}x^3} = \frac{3}{2}.$$

(g). Ricordando gli sviluppi di Mc Laurin

$$\operatorname{sinh}x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \qquad e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$
$$[\log(1-x)]^4 = (-x + o(x))^4 = x^4 + o(x^4), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

si ha
$$\frac{\cos x - e^{x^2} + \frac{3}{2}x\mathrm{sinh}x}{[\log(1-x)]^4} = \frac{-\frac{17}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)};$$
e quindi
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{x^2} + \frac{3}{2}x\mathrm{sinh}x}{[\log(1-x)]^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{17}{24}x^4}{x^4} = -\frac{17}{24}.$$
(h). Ricordando gli sviluppi di Mc Laurin
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \qquad e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$
$$[\log(1+x)]^4 = (x + o(x))^4 = x^4 + o(x^4), \qquad \mathrm{cosh}x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$
si ha
$$\frac{\mathrm{cosh}x - e^{x^2} + \frac{1}{2}x\sin x}{[\log(1+x)]^4} = \frac{-\frac{13}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)};$$
e quindi
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{cosh}x - e^{x^2} + \frac{1}{2}x\sin x}{[\log(1+x)]^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{13}{24}x^4}{x^4} = -\frac{13}{24}.$$
(i). Consideriamo il cambiamento di variabile $y = \frac{1}{x}$, da cui si deduce che
$$\lim_{x\to +\infty} x^4 \left(2e^{1/x^2} - 2\mathrm{cosh}\tfrac{1}{x} - \frac{\sin(1/x)}{x}\right) = \lim_{y\to 0^+} \frac{2e^{y^2} - 2\mathrm{cosh}y - y\sin y}{y^4}$$
e, ricordando gli sviluppi di Mc Laurin
$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^3), \qquad e^{y^2} = 1 + y^2 + \frac{y^4}{2} + o(y^4)$$
$$\mathrm{cosh}y = 1 + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^4),$$
si ha
$$\frac{2e^{y^2} - 2\mathrm{cosh}y - y\sin y}{y^4} = \frac{\frac{13}{12}y^4 + o(y^4)}{y^4}$$
e quindi
$$\lim_{y\to 0^+} \frac{2e^{y^2} - 2\mathrm{cosh}y - y\sin y}{y^4} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{13}{12}y^4}{y^4} = \frac{13}{12}.$$
□