Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT)

IV^o foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. *Siano* $f(t) = 2t^2 - t + 1$ *per ogni* $t \in \mathbb{R}$ *ed* F *una primitiva di* f. *Se* $F(0) = 2$, *si calcoli* $F(2)$.

Svolgimento. Le primitive di $f(t)$ sono tutte della forma

$$\int (2t^2 - t + 1)dt = \tfrac{2}{3}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2 + t + c$$

al variare di c tra i numeri reali. L'unica tra queste che soddisfi alla condizione $F(0) = 2$ è $F(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t + 2$. Si ha quindi $F(2) = \frac{16}{3} - \frac{4}{2} + 2 + 2 = \frac{19}{3}$. □

ESERCIZIO 2. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{\sin^2(t)}{t}dt}{\displaystyle\int_0^x [1 - \cos t + 2\log(1+t)]dt} \qquad e \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^x [tg^2 t + 2e^t - 2]dt}{\displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos t}{t}dt}.$$

Svolgimento. Calcoliamo il primo dei due. Per calcolare il secondo lo studente può procedere in modo analogo. Si tratta di un limite della forma $\frac{0}{0}$, perchè le due funzioni integrande sono continue e limitate per $x \to 0^+$. Possiamo applicare la regola di de L'Hôpital e, grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale, ridurci a calcolare:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin^2(x)}{x}}{[1 - \cos x + 2\log(1+x)]}.$$

Si osservi che, per $x \to 0^+$,

$$\sin^2 x = (x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2), \qquad 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad 2\log(1+x) = 2x + o(x)$$

e, poichè x^2 è trascurabile rispetto ad x, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin^2(x)}{x}}{[1 - \cos x + 2\log(1+x)]} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + o(x^2)}{x[2x + o(x)]} = \frac{1}{2}$$

e ciò conclude il calcolo del limite proposto. □

ESERCIZIO 3. *Si calcolino*

(a) $\displaystyle\int_1^2 x^{-2}dx;$

(b) $\displaystyle\int_2^5 \sqrt{x-1}\,dx;$

(c) $\displaystyle\int_1^6 (3x+1)^{-1/2}dx;$

(d) $\displaystyle\int_0^1 (2-x^2)^2dx;$

(e) $\displaystyle\int_2^4 \frac{2x}{x-1}dx;$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2}dx;$

(g) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx;$

(h) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx;$

(i) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx;$

(j) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}dx;$

(k) $\displaystyle\int_{e^{-2}}^{e^{-1}} \frac{1}{x\log x}dx;$

(l) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-1/x}}{x^2}dx;$

(m) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx;$

(n) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx;$

Svolgimento. (a). Una primitiva di x^{-2} è $/x^{-1}$, e quindi

$$\int_1^2 x^{-2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

(b). Con la sostituzione $y = \sqrt{x-1}$, si trova che $x = y^2 - 1$ e $dx = 2ydy$; quindi l'integrale proposto diventa

$$\int 2y^2 dy = \frac{2}{3}y^3 + c, \qquad \text{ovvero} \qquad \int \sqrt{x-1}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + c.$$

Applicando la formula di Barrow, si conclude che

$$\int_2^5 \sqrt{x-1}dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}\right]_2^5 = \frac{14}{3}.$$

(c). Con la sostituzione $y = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$, si trova che $x = \frac{1}{3}(\frac{1}{y^2} - 1)$ e $dx = -\frac{2}{3y^3}dy$; quindi l'integrale proposto diventa

$$-\frac{2}{3}\int y^{-2}dy = \frac{2}{3y} + c, \qquad \text{ovvero} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + c.$$

Applicando la formula di Barrow, si conclude che

$$\int_1^6 (3x+1)^{-1/2}dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\right]_1^6 = \frac{2}{3}(\sqrt{19} - 2).$$

(d). Si ha

$$\int (2-x^2)^2 dx = \int (4 - 4x^2 + x^4)dx = 4x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + c$$

e quindi, applicando la formula di Barrow, si conclude che

$$\int_0^1 (2-x^2)^2 dx = \left[4x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = 4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5} = \frac{43}{15}.$$

(e). Si ha

$$\int_2^4 \frac{2x}{x-1}dx = \int_2^4 \frac{2x-2+2}{x-1}dx = \int_2^4 2dx + 2\int_2^4 \frac{1}{x-1}dx.$$

Ricordando che $\log|x-1|$ è una primitiva di $\frac{1}{x-1}$ ed applicando la formula di Barrow, si conclude che

$$\int_2^4 \frac{2x}{x-1}dx = 4 + \log 3.$$

(f). Osserviamo che $\frac{1}{1+x^2}$ è la derivata di $\mathrm{arctg}x$, e che $\mathrm{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$; quindi

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}x)^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{32}.$$

(g). Osserviamo che $-2x$ è la derivata dell'esponente $-x^2$, e quindi

$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

(h). Osserviamo che $-2x$ è la derivata dell'argomento della radice $1-x^2$, e quindi, facendo la sostituzione $y = 1-x^2$, si ricava

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{y}dy = \left[\frac{1}{3}\sqrt{y^3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(i). Osserviamo che $\cos x$ è la derivata di $\sin x$, e quindi, facendo la sostituzione $y = \sin x$, si ricava

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} y^{-1/3} dy = \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}\right]_{1/\sqrt{2}}^{1} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

(j). Osserviamo che $\frac{1}{x}$ è la derivata di $\log x$ su tutta la semiretta $(0, +\infty)$, e quindi, facendo la sostituzione $y = \log x$, si ricava

$$\int_1^e \frac{\log x}{x} dx = \int_0^1 y dy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

(k). Il calcolo è perfettamente analogo a quello del punto precedente e viene quindi lasciato al lettore.

(l). Osserviamo che $\frac{1}{x^2}$ è la derivata dell'esponente $-\frac{1}{x}$, e quindi, facendo la sostituzione $y = -1/x$, si ricava

$$\int_1^2 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx = \int_{-1}^{-1/2} e^y dy = [e^y]_{-1}^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e}.$$

(m). Osserviamo che $-\sin x$ è la derivata di $\cos x$, e quindi, facendo la sostituzione $y = \cos x$, si ricava

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{1 + y^2} dy = [\mathrm{arctg} y]_{1/\sqrt{2}}^1 = \frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

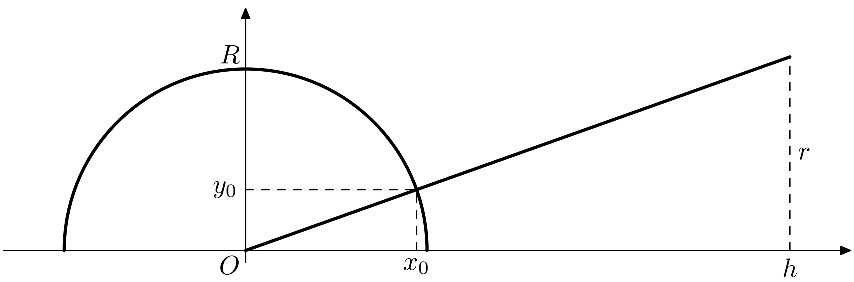
(n). Osserviamo che $2x$ è la derivata di x^2, e quindi, facendo la sostituzione $y = x^2$, si ricava

$$\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx = \frac{1}{2}\int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy = \left[\frac{1}{2}\arcsin y\right]_0^{1/4} = \frac{1}{2} - \arcsin\frac{1}{4}.$$

□

ESERCIZIO 4. *Un artigiano deve realizzare un ornamento formato da un cono (retto) con raggio di base r ed altezza h ed una sfera di raggio $R < h$, sovrapposti in modo che il centro della sfera coincida con il vertice del cono. Si disegni la figura in sezione e se ne calcoli il volume totale.*

Svolgimento. Disegnamo la sezione dell'ornamento, ponendo l'asse del cono sull'asse delle ascisse ed il vertice del cono nell'origine. Per motivi di simmetria possiamo limitarci alla porzione contenuta nel semipiano superiore, ovvero



ove il punto (x_0, y_0) è l'intersezione tra il semicerchio e la retta, ovvero la soluzione (nel semipiano superiore) del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y = \frac{r}{h}x \end{cases}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x_0 = \frac{Rh}{\sqrt{h^2+r^2}} \\ y_0 = \frac{Rr}{\sqrt{h^2+r^2}} \end{cases}$$

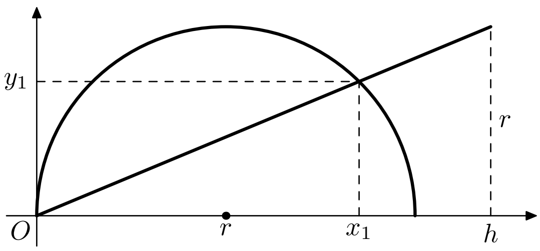
Il solido si ottiene facendo ruotare la curva in figura attorno all'asse delle x e quindi è uguale a

$$\pi\int_{-R}^{x_0} (R^2 - x^2) dx + \pi\int_{x_0}^{h} \frac{r^2x^2}{h^2} dx = \frac{2}{3}\pi R^3\left(1 + \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}\right) + \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

e ciò conclude il calcolo. □

ESERCIZIO 5. *Si consideri il solido formato da una sfera di raggio r entro cui si inserisce, aderendo perfettamente, un cono (retto) con raggio di base r ed altezza $h > 2r$, di modo che il centro della sfera appartenga all'altezza del cono ed il vertice del cono sia sulla superficie della sfera. Si disegni la figura in sezione e se ne calcoli il volume totale.*

Svolgimento. Disegnamo la sezione del solido, ponendo l'asse del cono sull'asse delle ascisse ed il vertice del cono nell'origine. Per motivi di simmetria possiamo limitarci alla porzione contenuta nel semipiano superiore, ovvero



ove il punto (x_1, y_1) è l'intersezione, diversa da O tra il semicerchio e la retta, che si può trovare come soluzione del sistema

$$\begin{cases} (x-r)^2 + y^2 = r^2 \\ y = \dfrac{r}{h}\, x \end{cases}, \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{2rh^2}{r^2+h^2} \\ y_1 = \frac{2r^2h}{r^2+h^2} \end{cases}$$

Il solido si ottiene facendo ruotare la curva in figura attorno all'asse delle x e quindi il suo volume è uguale a

$$\pi\left(\int_0^{x_1}(2rx - x^2)\,dx + \int_{x_1}^{h}\frac{r^2x^2}{h^2}\,dx\right) = \pi\left(\left[rx^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{2rh^2}{r^2+h^2}} + \left[\frac{r^2x^3}{3h^2}\right]_{\frac{2rh^2}{r^2+h^2}}^{h}\right) = \frac{4\pi r^3h^4}{3(h^2+r^2)^2} + \frac{\pi r^2 h}{3};$$

e ciò conclude il calcolo. □

ESERCIZIO 6. *Si consideri nel piano cartesiano il sottoinsieme*

$$D = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le e^{-x}\sqrt{|x^2-1|} \,\right\}$$

e si calcoli il volume del solido che si ottiene dalla rotazione di D attorno all'asse delle ascisse.

Svolgimento. L'insieme D è il sotto grafico della funzione $g(x) = e^{-x}\sqrt{|x^2-1|}$ sull'intervallo $[0,2]$, dunque, il volume del solido di rotazione è uguale a

$$V = \pi\int_0^2 e^{-2x}|1-x^2|dx = \pi\left(\int_0^1 e^{-2x}(1-x^2)dx + \int_1^2 e^{-2x}(x^2-1)dx\right).$$

Applicando ripetutamente la formula di integrazione per parti, si ottiene che

$$\int e^{-2x}(1-x^2)dx = \frac{e^{-2x}}{4}(2x^2+2x-1) + c,$$

e quindi

$$V = \left[\frac{e^{-2x}}{4}(2x^2+2x-1)\right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{e^{-2x}}{4}(1-2x-2x^2)\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{e^4+6e^2-11}{4e^4}$$

e ciò conclude il calcolo. □

ESERCIZIO 7. *Si calcoli il volume del solido che si ottiene ruotando attorno all'asse orizzontale il sottografico della funzione* $f(x) = x\sqrt{\mathrm{sinh} x}$ *sull'intervallo* $[0, 1]$.

Svolgimento. Il volume del solido è uguale a

$$V = \pi \int_0^1 x^2 \mathrm{sinh} x dx.$$

Una primitiva di $x^2\mathrm{sinh}x$, si ottiene facilmente integrando per parti, e si ha

$$\int x^2 \mathrm{sinh} x dx = x^2 \mathrm{cosh} x - 2 \int x \mathrm{cosh} x dx =$$

$$= x^2 \mathrm{cosh} x - 2x \mathrm{sinh} x + 2 \int \mathrm{sinh} x dx = x^2 \mathrm{cosh} x - 2x \mathrm{sinh} x + 2 \mathrm{cosh} x + c.$$

Dunque

$$V = \pi \int_0^1 x^2 \mathrm{sinh} x dx = \pi \left[x^2 \mathrm{cosh} x - 2x \mathrm{sinh} x + 2 \mathrm{cosh} x\right]_0^1 = \frac{e^2 - 4e + 5}{2e}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 8. *Si calcoli* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{2\sqrt{x} - 5}{x^2 - \sqrt{x}} dx.$

Svolgimento. Tramite il cambiamento di variabile $y = \sqrt{x}$ (e quindi $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$), possiamo ridurci a calcolare $2 \int \frac{2y-5}{y^3-1} dy$. Osservando che $\frac{2y-5}{y^3-1} = \frac{1}{1-y} + \frac{y+4}{y^2+y+1}$, ed utilizzando i soliti procedimenti di integrazione delle funzioni razionali fratte, si ottiene che una primitiva della funzione integranda è

$$g(x) = \log \frac{x + \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2} + \frac{14}{\sqrt{3}} \mathrm{arctg} \left(\frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{3}} \right).$$

Da ciò si conclude che

$$\int_2^{+\infty} \frac{2\sqrt{x} - 5}{x^2 - \sqrt{x}} dx = \lim_{b \to +\infty} [g(b) - g(2)] = \frac{7\pi}{\sqrt{3}} - \log \frac{3 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} - \frac{14}{\sqrt{3}} \mathrm{arctg} \left(\frac{2\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3}} \right).$$

Ciò conclude il calcolo. □

ESERCIZIO 9. *Si calcoli* $\displaystyle\int_{e^3}^{+\infty} \frac{6 \log x + 12}{x(\log x)^3 - 8x} dx.$

Svolgimento. Per prima cosa cerchiamo di determinare una primitiva della funzione integranda. Posto $y = \log x$, si ha $dy = \dfrac{dx}{x}$, e quindi l'integrale proposto diventa

$$\int_3^{+\infty} \frac{6y + 12}{y^3 - 8} dy.$$

Si ha

$$\frac{6y + 12}{y^3 - 8} = \frac{2}{y - 2} - \frac{2y + 2}{y^2 + 2y + 4}, \qquad \text{e quindi} \qquad \int \frac{6y + 12}{y^3 - 8} dy = \log \frac{(y - 2)^2}{y^2 + 2y + 4} + c.$$

Da ciò si deduce che

$$\int_3^{+\infty} \frac{6y + 12}{y^3 - 8} dy = \lim_{b \to +\infty} \log \frac{(b - 2)^2}{b^2 + 2b + 4} - \log \frac{1}{19} = \log 19$$

e quindi l'integrale proposto è uguale a $\log 19$. $\square$

ESERCIZIO 10. *Si calcoli* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sinh x}{(e^x + 3e^{-x})^2} dx.$

Svolgimento. Ricordando che $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e tramite il cambiamento di variabile $y = e^x$ (e quindi $dy = e^x dx$) l'integrale proposto coincide con $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{y^2 - 1}{(y^2+3)^2} dy.$

Determiniamo quindi una primitiva della funzione integranda, ricordando che si ha

$$\frac{y^2 - 1}{(y^2+3)^2} = \frac{1}{y^2+3} - \frac{4}{(y^2+3)^2}.$$

Poichè

$$\int \frac{1}{y^2+3} dy = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right) + c$$

ed

$$\int \frac{4}{(y^2+3)^2} dy = \frac{4}{3\sqrt{3}} \int \frac{1}{\left((y/\sqrt{3})^2 + 1\right)^2} \frac{dy}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right) + \frac{y\sqrt{3}}{y^2+3} \right) + c,$$

si conclude che l'integrale proposto coincide con

$$\lim_{b \to +\infty} \left[\frac{1}{3\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2y\sqrt{3}}{y^2+3} \right) \right]_0^b = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

$\square$

ESERCIZIO 11. *Si calcoli* $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^2) \log(1-x)\, dx.$

Svolgimento. Si tratta di un'integrale generalizzato, perchè nel punto $x = 1$ la funzione non è definita (anche se ha limite finito ed uguale a zero). Integrando per parti si ottiene una primitiva e si ha

$$\int_0^1 (1 - x^2) \log(1-x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{3} \left[(x^2 + x - 2)(1-x)\log(1-x) + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^{1-\varepsilon} = -\frac{7}{18}.$$

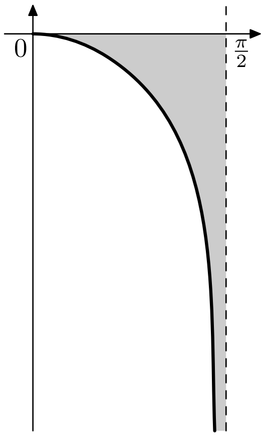
L'integrale si poteva anche calcolare osservando che, dopo la sostituzione $t = 1 - x$, si tratta di calcolare

$$\int_0^1 (2t - t^2) \log t\, dt,$$

che si risolve analogamente per parti e conduce (ovviamente) allo stesso risultato. $\square$

ESERCIZIO 12. *Si abbozzi il grafico della funzione integranda sull'intervallo di integrazione e si calcoli* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \log(\cos x)\, dx.$

Svolgimento. Cominciamo con un rapido studio dell'andamento della funzione integranda.



Nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2})$ la funzione integranda assume valori minori o uguali a 0; la sua derivata prima è $\cos x \log(\cos x) - \frac{(\sin x)^2}{\cos x}$ e quindi la funzione integranda è decrescente; infine si ha $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sin x \log(\cos x) = -\infty$. Quindi l'andamento della funzione integranda è descritto dal grafico qui a fianco e l'integrale proposto è un integrale improprio.

Integrando per parti, si ha

$$\int \sin x \log(\cos x)\, dx =$$

$$= -\cos x \log(\cos x) - \int \sin x dx = -\cos x(\log(\cos x) - 1) + c$$

e quindi l'integrale proposto è uguale a

$$\lim_{b \to \frac{\pi}{2}^-} -\cos b(\log(\cos b) - 1) - 1 = \lim_{y \to 0^+} -y(\log y - 1) - 1 = -1;$$

e ciò conclude il calcolo dell'integrale proposto. □

ESERCIZIO 13. *Si dica se converge l'integrale improprio*

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x\sqrt{x}}\, dx.$$

Svolgimento. La funzione integranda è continua e non negativa su tutta la semiretta $(0, +\infty)$, ma è illimitata per $x \to 0^+$. Quindi può essere utile considerare separatamente la convergenza dei due integrali

$$\int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{x\sqrt{x}}\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x\sqrt{x}}\, dx;$$

Infatti, se i due integrali convergono, converge anche la loro somma, che è l'integrale proposto. Nel primo caso si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{|\sin x|}{x\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

e quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale converge come converge $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Per ogni $x \in [\pi, +\infty)$, si ha $0 \le \frac{|\sin x|}{x\sqrt{x}} \le \frac{1}{x\sqrt{x}}$; e quindi, per il criterio del confronto il secondo integrale converge come converge $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$. Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 14. *Si calcolino*

$$(a)\quad \int_3^{+\infty} 4\frac{5-x}{x^3-12x+16}\,dx;$$
$$(b)\quad \int_5^{+\infty} 4\frac{x-2}{x^3-12x-16}\,dx;$$
$$(c)\quad \int_1^{+\infty} \frac{2e^x-e^{2x}}{1-e^{3x}}\,dx;$$
$$(d)\quad \int_2^{+\infty} \frac{e^x-4}{e^{2x}-e^{-x}}\,dx;$$
$$(e)\quad \int_3^{+\infty} \frac{5x-2}{x^3-x^2-4x+4}\,dx;$$
$$(f)\quad \int_1^{2} x\log(x-1)\,dx;$$
$$(g)\quad \int_2^{+\infty} \frac{x-3}{x^3-x}\,dx.$$

Svolgimento. (a). Osserviamo che

$$4\frac{5-x}{x^3-12x+16} = 4\frac{5-x}{(x-2)^2(x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+4}$$

ove A, B e C sono soggetti alle condizioni

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B-4C=-4 \\ -8A+4B+4C=20 \end{cases} ; \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \\ C=1 \end{cases} .$$

Si ha quindi

$$\int 4\frac{5-x}{x^3-12x+16}\,dx = -\int \frac{1}{x-2}\,dx + 2\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx + \int \frac{1}{x+4}\,dx = \log\left|\frac{x+4}{x-2}\right| - \frac{2}{x-2} + c.$$

Possiamo quindi concludere che

$$\int_3^{+\infty} 4\frac{5-x}{x^3-12x+16}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\log\frac{x+4}{x-2} - \frac{2}{x-2}\right]_3^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\log\frac{b+4}{b-2} - \frac{2}{b-2} - \log 7 + 2\right) = 2 - \log 7.$$

(b). Il procedimento è analogo a quanto descritto nel punto precedente e, per aiutare il lettore, osserviamo che $x^3-12x-16=(x+2)^2(x-4)$.

(c). Con il cambiamento di variabile $y=e^x$, e quindi $dy=e^x dx$, si ottiene

$$\int \frac{2e^x-e^{2x}}{1-e^{3x}}\,dx = \int \frac{2-y}{1-y^3}\,dy.$$

Inoltre,

$$\frac{2-y}{1-y^3} = \frac{A}{1-y} + \frac{By+C}{1+y+y^2} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} A-B=0 \\ A+B-C=-1 \\ A+C=2 \end{cases} .$$

Si ha quindi

$$\int \frac{2-y}{1-y^3}\,dy = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1-y}\,dy + \frac{1}{3}\int \frac{y+5}{1+y+y^2}\,dy = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1-y}\,dy + \frac{1}{6}\int \frac{2y+1}{1+y+y^2}\,dy + \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+y+y^2}\,dy.$$

Osserviamo infine che

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{1-y}\,dy + \frac{1}{6}\int \frac{2y+1}{1+y+y^2}\,dy = \frac{1}{6}\log\frac{1+y+y^2}{(y-1)^2} + c$$

e

$$\frac{3}{2}\int \frac{1}{1+y+y^2}\,dy = 2\int \frac{1}{\frac{4}{3}(y+\frac{1}{2})^2+1}\,dy = \sqrt{3}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sqrt{3}\text{arctg}t + c,$$

ove $t = \frac{2}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}$. Possiamo quindi scrivere

$$\int \frac{2e^x - e^{2x}}{1-e^{3x}}\,dx = \frac{1}{6}\log\frac{1+e^x+e^{2x}}{(e^x-1)^2} + \sqrt{3}\text{arctg}\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}} + c$$

e concludere che

$$\int_1^{+\infty} \frac{2e^x - e^{2x}}{1-e^{3x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{6}\log\frac{1+e^x+e^{2x}}{(e^x-1)^2} + \sqrt{3}\text{arctg}\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}}\right]_1^b =$$
$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}\log\frac{1+e+e^2}{(e-1)^2} - \sqrt{3}\text{arctg}\frac{2e+1}{\sqrt{3}}.$$

(d). (e). Il procedimento è analogo a quanto descritto nei punti precedenti e lo lasciamo al lettore.

(f). La funzione integranda è definita per $x \in (1,2]$ e non è limitata, perchè $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$. Si tratta quindi di un integrale improprio. Integrando per parti, si ha

$$\int x\log(x-1)dx = \frac{x^2}{2}\log(x-1) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x-1}dx == \frac{x^2}{2}\log(x-1) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}\log(x-1) - \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{1}{2}\log(x-1) + c = \frac{x^2-1}{2}\log(x-1) - \frac{(x+1)^2}{4} + c,$$

dove si è omesso il segno di valore assoluto dall'argomento del logaritmo, perchè stiamo integrando all'interno della semiretta positiva.

Possiamo quindi calcolare l'integrale improprio, ovvero

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{1+\varepsilon}^2 x\log(x-1)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\frac{x^2-1}{2}\log(x-1) - \frac{(x+1)^2}{4}\right]_{1+\varepsilon}^2 =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(-\frac{9}{4} - \frac{\varepsilon+2}{2}\varepsilon\log\varepsilon + \frac{(\varepsilon+2)^2}{4}\right) = -\frac{5}{4},$$

ove si ricordi che $\lim_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon\log\varepsilon = 0$.

(g). Il procedimento è analogo a quanto descritto nei punti precedenti e lo lasciamo al lettore. □

ESERCIZIO 15. *Si dica per quali valori del parametro α converge l'integrale*

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha\left(\frac{\cosh(1/x)-1}{\sqrt{1/x}-\log(1+\sqrt{1/x})}\right)dx;$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha\left(\frac{1-\cos(1/x)}{\text{tg}\sqrt{1/x}-\sqrt{1/x}}\right)dx;$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha\left(\frac{1-e^{-1/x^2}}{\sin\sqrt{1/x}}\right)dx;$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{\frac{x^2\alpha}{x+\alpha(\alpha-1)}}\,dx;$

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\pi}{2} - \text{arctg}\,x - \frac{1}{x}\right|^\alpha dx;$

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+\log x}{(x+\cos x)^\alpha}\,dx;$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha(1-x)^\alpha}\,dx.$

Svolgimento. (a). Per $x \to +\infty$, $\frac{1}{x}$ e la sua radice quadrata tendono a 0 da valori positivi, quindi possiamo utilizzare gli sviluppi di Mc Laurin, e scrivere

$$\cosh(1/x) = 1 + \frac{1}{2x^2} + o(1/x^2), \qquad \log(1 + \sqrt{1/x}) = \sqrt{1/x} - \frac{1}{2x} + o(1/x);$$

per $x \to +\infty$, da cui si deduce che

$$\frac{\cosh(1/x) - 1}{\sqrt{1/x} - \log(1 + \sqrt{1/x})} = \frac{\frac{1}{2x^2} + o(1/x^2)}{\frac{1}{2x} + o(1/x)} \qquad \text{e quindi} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha \left(\frac{\cosh(1/x)-1}{\sqrt{1/x}-\log(1+\sqrt{1/x})}\right)}{x^{\alpha-1}} = 1.$$

Per il *Criterio del confronto asintotico*, l'integrale proposto converge se, e solo se, converge l'integrale $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}dx$ e ciò accade se $1 - \alpha > 1$, ovvero se, e solo se, $\alpha < 0$.

(b). e (c). si risolvono in modo analogo e sono lasciati al lettore.

(d). Qualunque sia il valore del parametro α, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x^2\alpha}{x+\alpha(\alpha-1)}}}{e^{\alpha x}} = e^{-\alpha^2(\alpha-1)} \neq 0.$$

Quindi, per il *Criterio del confronto asintotico*, l'integrale proposto converge se, e solo se, converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} e^{\alpha x}dx = \begin{cases} \int_1^{+\infty} dx = +\infty & \text{se } \alpha = 0 \\ \lim\limits_{b\to+\infty} \left[\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right]_1^b & \text{se } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

ove il limite è uguale a $-\frac{e^\alpha}{\alpha}$ se $\alpha < 0$ ed a $+\infty$ altrimenti.

(e). Osserviamo che

$$\left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x}\right| = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x}$$

e che, applicando la regola di de L'Hôpital, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}}{-\frac{3}{x^4}} = \frac{1}{3}.$$

Quindi, per il *Criterio del confronto asintotico*, l'integrale proposto converge se, e solo se, converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3\alpha}}dx$$

e ciò accade se $3\alpha > 1$, ovvero $\alpha > \frac{1}{3}$.

(f). e (g). sono lasciati al lettore. □

ESERCIZIO 16. *[Maturità Scientifica 1987] In un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy si consideri la funzione $y = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ e se ne disegni il grafico. Considerato l'arco AB della curva, A essendo il punto di flesso e B quello a tangente parallela all'asse delle ordinate, si determini il volume del solido ottenuto dalla rotazione della regione finita di piano compresa tra l'arco AB, la retta OA e l'asse delle ascisse, di un intero giro attorno alla asse medesimo.*

Svolgimento. □

ESERCIZIO 17. *Si disegni nel piano cartesiano il sottoinsieme*

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ \frac{1}{1+x^2} \le y \le \tfrac{1}{2}\sqrt{4-3x} \right\}.$$

Si calcolino l'area di S ed il volume del solido che si ottiene ruotando l'insieme S attorno all'asse delle ascisse.

Svolgimento. □

ESERCIZIO 18. *Si disegni nel piano cartesiano il sottoinsieme*

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 2,\ \tfrac{x}{1+x} \le y \le 1 - x + \tfrac{x^2}{2} \right\}.$$

Si calcolino l'area di S ed il volume del solido che si ottiene ruotando l'insieme S attorno all'asse delle ascisse.

Svolgimento. □

ESERCIZIO 19. *Si disegnino i sottoinsiemi del piano cartesiano così definiti*

$$D_1 = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{c} 0 < x \le 1 \\ 0 \le y \le x^{-\frac{1}{3}} \end{array} \right\} \quad e \quad D_2 = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{c} 0 \le y \le 1 \\ 1 \le 2x \le 5 - 3y^2 \end{array} \right\}$$

e si determini il volume del solido ottenuto ruotando l'insieme $D_1 \cup D_2$ attorno all'asse orizzontale.

Svolgimento. □

ESERCIZIO 20. *Si disegnino i sottoinsiemi del piano cartesiano così definiti*

$$D_1 = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{c} 0 < x \le 1 \\ 0 \le y \le x^{-\frac{1}{4}} \end{array} \right\} \quad e \quad D_2 = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{c} 0 \le y \le 1 \\ 1 \le x \le 3 - 2y^2 \end{array} \right\}$$

e si determini il volume del solido ottenuto ruotando l'insieme $D_1 \cup D_2$ attorno all'asse orizzontale.

Svolgimento. □