Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

II^o foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. *Si verifichi per induzione che*

$$(a)\ \sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2;$$

$$(b)\ \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$(c)\ \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$(d)\ \sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

$$(e)\ \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \qquad (x \neq 1);$$

$$(f)\ \sum_{k=0}^{n}(1+3k+3k^2) = (n+1)^3;$$

$$(g)\ \sum_{k=0}^{n-1}(1+4k+6k^2+4k^3) = n^4;$$

$$(h)\ \frac{\sum_{k=0}^{n} 1+3k+3k^2}{\sum_{k=0}^{n} 1+4k+6k^2+4k^3} = \frac{1}{n+1};$$

$$(i)\ \sum_{k=2}^{n} \frac{3-k}{k^3-k} = \frac{n-1}{n(n+1)};$$

Svolgimento. □

ESERCIZIO 2. *Si deduca dall'esercizio precedente l'identità*

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \left[\sum_{j=1}^{n} j\right]^2.$$

Svolgimento. □

ESERCIZIO 3. *Si scrivano delle formule esplicite per le somme*

$$\sum_{n=1}^{N} n^4 \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{N} n^5,$$

quali funzioni di N.

Svolgimento. Vogliamo esporre un idea di Fermat per calcolare le somme di potenze di interi. Poniamo

$$S_m(N) = \sum_{n=1}^{N} n^m.$$

Come è ben noto (cf. Esercizio 1.(b)),

$$S_1(N) = \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

e l'idea di Fermat consiste nel determinare tali somme con una formula ricorsiva al crescere dell'esponente m. Dalle proprietà elementari del coefficiente binomiale, si ha

- $\binom{N+m}{m+1} = \binom{N+m-1}{m} + \binom{N+m-1}{m+1}$, da cui si deduce, per induzione su N, la relazione

$$(*) \qquad \binom{N+m}{m+1} = \sum_{n=1}^{N} \binom{n+m-1}{m}$$

- inoltre, per $n \geq 1$, si ha

$$\binom{n+m-1}{m} = \frac{1}{m!} n(n+1)\cdots(n+m-1) = \frac{1}{m!}\left(n^m + A_1 n^{m-1} + \cdots + A_{m-1} n\right)$$

  ove $A_1, \dots, A_{m-1}$ sono opportuni coefficienti numerici. Allora, sommando i due membri dell'uguaglianza per $n = 1, \dots, N$, e tenuto conto di $(*)$, si ottiene

$$\binom{N+m}{m+1} = \frac{1}{m!}\left(S_m(N) + A_1 S_{m-1}(N) + \cdots + A_{m-1} S_1(N)\right)$$

  e quindi l'uguaglianza

$$\frac{N(N+1)\cdots(N+m)}{m+1} = \left(S_m(N) + A_1 S_{m-1}(N) + \cdots + A_{m-1} S_1(N)\right).$$

Esempi. Per $m = 1$ si ottiene così la formula nota. Per $m = 2$, $A_1 = 1$ e quindi

$$\frac{N(N+1)(N+2)}{3} = S_2(N) + S_1(N), \qquad \text{da cui si deduce} \qquad S_2(N) = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

Per $m = 3$, si ha $\binom{n+2}{3} = \frac{1}{3!} n(n+1)(n+2) = \frac{1}{6}(n^3 + 3n^2 + 2n)$ e quindi $A_1 = 3$ ed $A_2 = 2$, da cui si deduce

$$\frac{N(N+1)(N+2)(N+3)}{4} = S_3(N) + 3S_2(N) + 2S_1(N), \qquad \text{e quindi} \qquad S_3(N) = \frac{N^2(N+1)^2}{4}.$$

Per $m = 4$, si ha $\binom{n+3}{4} = \frac{1}{4!} n(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{4!}(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n)$ e quindi $A_1 = 6$, $A_2 = 11$ ed $A_3 = 6$, da cui si deduce

$$\frac{N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)}{5} = S_4(N) + 6S_3(N) + 11S_2(N) + 6S_1(N),$$

e quindi

$$S_4(N) = \frac{N(N+1)(6N^3 + 9N^2 + N - 1)}{30}.$$

Lasciamo al lettore il calcolo per $m = 5$. □

ESERCIZIO 4. *Siano $x_1, \dots, x_n$ numeri reali positivi Si mostri che, per ogni intero positivo n, si ha*[(†)]

$$x_1 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n.$$

(†) Dati n numeri reali positivi, si definiscono media aritmetica e geometrica dei numeri dati come

$$\mu = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \quad (\textit{media aritmetica}) \qquad \text{e} \qquad \gamma = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \quad (\textit{media geometrica})$$

Quindi, la disuguaglianza da dimostrare si può enunciare come il fatto che la media geometrica di n numeri reali positivi è sempre inferiore della loro media aritmetica.

Svolgimento. Dimostriamolo per induzione su n. Per $n = 1$ la tesi è $x_1 \leq \left(\frac{x_1}{1}\right)^1$ che è banalmente vera. Supponiamo quindi vera la disuguaglianza in questione per n numeri positivi e dimostriamo che la disuguaglianza analoga deve valere anche per $n + 1$ numeri.

Se $x_1 = \cdots = x_{n+1}$, la tesi è vera. Altrimenti vi è almeno un numero al di sotto della media ed uno al di sopra e non è restrittivo supporre che siano gli ultimi due, dato che la tesi non dipende dall'ordine con cui vengono presi i numeri. Sia quindi $\mu = \frac{x_1+\cdots+x_{n+1}}{n+1}$ ed $x_{n+1} = \mu - a < \mu < x_n = \mu + b$, con $a > 0 < b$. Consideriamo ora gli $n + 1$-numeri reali positivi così definiti

$$y_1 = x_1, \quad \dots, \quad y_{n-1} = x_{n-1}, \quad y_n = \mu + b - a, \quad y_{n+1} = \mu,$$

ed osserviamo che si ha

$$\mu = \frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1} = \frac{y_1 + \cdots + y_{n+1}}{n+1} = \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}, \qquad \text{e} \qquad x_n x_{n+1} < y_n y_{n+1}.$$

Essendo $y_1 = x_1, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}$ si deduce che

$$x_1 \dots x_{n+1} \leq y_1 \dots y_{n+1} = y_1 \dots y_n \mu \leq \mu^n \mu = \mu^{n+1},$$

ove si è usata l'ipotesi induttiva $y_1 \cdots y_n \leq \mu^n$; e questa è la conclusione voluta. □

ESERCIZIO 5. *Si deduca come conseguenza dell'esercizio precedente che, per ogni intero positivo n, si ha*

$$(a) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1};$$

$$(b) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Svolgimento. (a). Si considerino i numeri reali $x_1 = 1$, $x_2 = \cdots = x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$ e si osservi che

$$\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1} = \frac{1 + n(1 + \frac{1}{n})}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Allora, per quanto visto nell'esercizio precedente, si ha

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = x_1 \cdots x_{n+1} \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1};$$

che è la disuguaglianza voluta.

(b). Si considerino i numeri reali $x_1 = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2$, $x_2 = \cdots = x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$ e si osservi che

$$\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 + n\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{n+1} = 1 + \frac{n+2}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} < 1 + \frac{1}{n}.$$

Allora, per quanto visto nell'esercizio precedente, si ha

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = x_1 \cdots x_{n+1} \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1};$$

che è la disuguaglianza voluta. □

ESERCIZIO 6. *Si disegnino nel piano di Argand-Gauss i sottoinsiemi*

$$
\begin{aligned}
&(a)\ \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, Im(i(z+1)^2) < 1 \right\};\\
&(b)\ \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, \left|\frac{z-i}{z+2}\right| < 1 \right\};\\
&(c)\ \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, Re(i(z-2)^2) > 2 \right\};\\
&(d)\ \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, \left|\frac{z-2}{\bar{z}+2i}\right| \leq \sqrt{2} \right\}.
\end{aligned}
$$

Svolgimento. □

ESERCIZIO 7. *Si disegnino nel piano di Argand-Gauss i numeri complessi z, soddisfacenti alle condizioni*

$$
\begin{aligned}
&(a)\ \left|\frac{z-1}{z+2i}\right| = \sqrt{2} \qquad e \qquad 4Rez = Imz;\\
&(b)\ \left|\frac{2z}{\bar{z}-iz}\right| = \sqrt{2} \qquad e \qquad |z| = 1.
\end{aligned}
$$

Svolgimento. □

ESERCIZIO 8. *Al variare di α tra i numeri reali, si dica quanti sono i numeri complessi z soddisfacenti alle condizioni*

$$
\begin{aligned}
&(a)\ |iz-3+2i| = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \qquad e \qquad \alpha - Rez = Imz;\\
&(b)\ |iz-2+3i| = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \qquad e \qquad \alpha - Rez = Imz.
\end{aligned}
$$

Svolgimento. □

ESERCIZIO 9. *Si consideri l'insieme I dei numeri complessi del tipo $m + in$ al variare di m ed n tra i numeri interi (i indica l'unità immaginaria). Si determini una retta passante per il punto $z_0 = 2-i$ del piano di Argand-Gauss che intersechi l'insieme I nel solo punto z_0.*

Svolgimento. Una retta del piano di Argand-Gauss, passante per $z_0 = 2 - i$, ha un'equazione del tipo $y + 1 = \alpha(x - 2)$, ed interseca l'insieme I in un altro punto $z_1 = m + in$ se, e solo se, $\alpha = \frac{n+1}{m-2}$ è un numero razionale. Dunque una retta che intersechi l'insieme I nel solo punto z_0 deve avere una pendenza α irrazionale: ad esempio possiamo prendere la retta $y + 1 = \sqrt{2}(x - 2)$. □

ESERCIZIO 10. *Si consideri l'insieme I dei numeri complessi del tipo $m + in$ al variare di m ed n tra i numeri interi (i indica l'unità immaginaria). Si determini una retta passante per il punto $z_0 = 1 + 2i$ del piano di Argand-Gauss che intersechi l'insieme I nel solo punto z_0.*

Svolgimento. □

ESERCIZIO 11. *Si determinino i numeri complessi z tali che*

$$
\begin{aligned}
&(a)\ z^2 + iz + 2 = 0;\\
&(b)\ z^4 + 4(1+i)z^2 + 3 + 4i = 0;\\
&(c)\ z^4 + 2 + 2i\sqrt{3} = 0;
\end{aligned}
$$

Svolgimento. Si tratta in tutti i casi di applicare opportunamente la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado. Vediamo, ad esempio, di rispondere al quesito (b). Poniamo $z^2 = w$ e poniamoci a risolvere l'equazione $w^2 + 4(1+i)w + 3 + 4i = 0$. A tale scopo dobbiamo determinare una radice quadrata di $4(1+i)^2 - (3+4i) = 4i - 3$, ovvero un numero complesso $a + ib$ (con $(a,b) \in \mathbb{R}^2$) per cui si abbia

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ ab = 2 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 2 \end{cases}$$

ove i segni devono essere presi concordi. Dunque le due radici dell'equazione sono $w_1 = -2(1+i)+1+2i = -1$ e $w_2 = -2(1+i) - 1 - 2i = -3 - 4i$. Per ognuna di queste vi sono due valori di z e, precisamente, $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 1 - 2i$, $z_4 = 2i - 1$. □