Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

III^o foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. *Si dica se la successione converge ed, in caso affermativo si calcoli*

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{2n^2-n+1};$$

$$(b)\ \lim_{n\to\infty} \log\left(2-\frac{1}{n}\right);$$

$$(c)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+4}{n+1}\right)^n;$$

$$(d)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1}-n;$$

$$(e)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n\pi/2)}{n};$$

$$(f)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2-n};$$

$$(g)\ \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n;$$

$$(h)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}-\sqrt{n+1};$$

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} 2n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right);$$

$$(j)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n};$$

$$(k)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\log\sqrt{7^{3n}}}{2n+1}.$$

Svolgimento. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita ricorsivamente ponendo*

$$\begin{cases} a_0 = t \\ a_{n+1} = \frac{a_n+\sqrt{11}}{2} \end{cases}.$$

Si mostri che, per qualsiasi valore di t, la successione converge ad uno stesso numero reale e si calcoli tale numero.

Svolgimento. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita ricorsivamente ponendo*

$$\begin{cases} b_2 = -5e^2 \\ b_{n+1} = \frac{n^n}{5(n-1)^n} b_n \end{cases}.$$

Si mostri che la successione converge e se ne calcoli il limite.

Svolgimento. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita ponendo*

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \end{cases}.$$

(a) *Si mostri che, per ogni intero n, si ha $x_n > 0$ ed $x_n^2 > 2$.*
(b) *Si mostri che la successione è decrescente.*
(c) *Si calcoli $\lim_{n\to\infty} x_n$.*

Svolgimento. □

ESERCIZIO 5. *Si consideri la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita ponendo*

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = \frac{2x_n}{3} + \frac{1}{x_n} \end{cases}.$$

(a) *Si mostri che, per ogni intero n, si ha $x_n > 0$ ed $x_n^2 > 3$.*
(b) *Si mostri che la successione è decrescente.*
(c) *Si calcoli $\lim_{n\to\infty} x_n$.*

Svolgimento. □

ESERCIZIO 6. *Si consideri la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita ponendo*

$$\begin{cases} x_0 = 5 \\ x_{n+1} = \frac{4x_n}{5} + \frac{1}{x_n} \end{cases}.$$

(a) *Si mostri che, per ogni intero n, si ha $x_n > 0$ ed $x_n^2 > 5$.*
(b) *Si mostri che la successione è decrescente.*
(c) *Si calcoli $\lim_{n\to\infty} x_n$.*

Svolgimento. □

ESERCIZIO 7. *Sia $\alpha \geq 2$ un numero reale e si consideri la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita ponendo*

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = \frac{(\alpha-1)x_n}{\alpha} + \frac{1}{x_n} \end{cases}.$$

(a) *Si mostri che, per ogni intero n, si ha $x_n > 0$ ed $x_n^2 > \alpha$.*
(b) *Si mostri che la successione è decrescente.*
(c) *Si mostri che $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\alpha}$.*
(d) *Si mostri che, per ogni intero n, si ha*

$$0 < x_n - \sqrt{\alpha} \leq \frac{x_n^2 - \alpha}{x_n + 1}$$

e si deduca da ciò una stima dell'errore $x_n - \sqrt{\alpha}$ per $n = 3$ ed $\alpha = 3$.

Svolgimento. (a). Per ipotesi, il termine iniziale $x_0 = \alpha$ è positivo e tale è anche il rapporto $\frac{\alpha-1}{\alpha}$. Si verifica facilmente che, se x_n è un numero positivo, tale è anche x_{n+1}; e quindi per induzione, si conclude che $x_n > 0$ per ogni intero n.

Si osservi che, essendo $x_0 = \alpha \geq 2$, si ha $x_0^2 > \alpha$. Vogliamo dimostrare per induzione che $x_n^2 > \alpha$, per ogni intero n. Dobbiamo quindi provare che $x_n^2 > \alpha \;\Rightarrow\; x_{n+1}^2 > \alpha$. Si ha

$$x_{n+1}^2 = \left[\frac{(\alpha-1)x_n}{\alpha} + \frac{1}{x_n}\right]^2 > \alpha$$

se, e solo se,

$$\left[(\alpha-1)\frac{x_n^2}{\alpha} + 1\right]^2 - \alpha^2\frac{x_n^2}{\alpha} > 0.$$

Posto $t = \dfrac{x_n}{\sqrt{\alpha}}$, la disuguaglianza è quindi equivalente a

$$[(\alpha-1)t^2+\alpha t+1][(\alpha-1)t^2-\alpha t+1]>0$$

e, per le ipotesi fatte, il primo fattore è certamente positivo. Quindi, osservando che le radici del polinomio posto a secondo fattore sono 1 e $\dfrac{1}{\alpha-1}$, si conclude che la disuguaglianza è verificata se $\dfrac{x_n}{\sqrt{\alpha}} = t > 1$, che è proprio l'ipotesi induttiva.

(b). I termini della successione sono positivi e quindi la successione è decrescente se, e solo se, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ per ogni intero n. Ora

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\alpha-1}{\alpha} + \frac{1}{x_n^2} < 1 \iff x_n^2 > \alpha;$$

e quanto visto al punto precedente permette di concludere.

(c). La successione è decrescente ed inferiormente limitata e quindi convergente. Sia $\ell = \lim_{n\to\infty} x_n$, allora, osservando che ogni successione ha lo stesso limite della successione data e per l' unicità del limite, passando al limite dai due lati della relazione ricorsiva che definisce la successione, si conclude che ℓ deve soddisfare alla relazione

$$\ell = \frac{(\alpha-1)\ell}{\alpha} + \frac{1}{\ell} \qquad \text{ovvero} \qquad \ell^2 = \alpha.$$

Poichè i termini della successione sono tutti positivi, si conclude che $\ell = \sqrt{\alpha}$.

(d). È sufficiente osservare che

$$x_n^2 - \alpha = (x_n - \sqrt{\alpha})(x_n + \sqrt{\alpha})$$

e che $0 < x_n + 1 < x_n + \sqrt{\alpha}$, da cui si deduce la disuguaglianza voluta. Si lascia al lettore il calcolo esplicito dell'errore nel caso indicato. □

ESERCIZIO 8. *Sia $k > 1$ un numero reale e si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita ricorsivamente ponendo*

$$\begin{cases} a_0 = t \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right) \end{cases}$$

Si diano delle condizioni sufficienti su t affinchè la successione sia crescente e superiormente limitata ed, in tal caso, se ne calcoli il limite.

Svolgimento. Sia $t \le -\sqrt{k}$ ed osserviamo che tutti i termini della successione sono negativi e si ha

$$a_n \le \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right) \le -\sqrt{k} \qquad \text{se, e solo se,} \qquad a_n \le \frac{k}{a_n} \quad \text{e} \quad a_n^2 + a_n\sqrt{k} + k \ge 0.$$

La seconda disuguaglianza è immediata se si osserva che il termine di sinistra è uguale ad $(a_n + \sqrt{k})^2$. Ciò ci permette di affermare che, essendo $a_0 = t \le -\sqrt{k}$, per induzione, deve aversi $a_n \le -\sqrt{k}$, per ogni n. Da quest'ultima disuguaglianza si ottiene $a_n \le -\sqrt{k} = \frac{k}{-\sqrt{k}} \le \frac{k}{a_n}$ per ogni n. Quindi, se $t \le -\sqrt{k}$ la successione è crescente e superiormente limitata e perciò converge ad un numero reale $\ell < 0$, che soddisfa alla relazione $\ell \le \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{k}{\ell}\right)$ e quindi $\ell = -\sqrt{k}$.(†) □

ESERCIZIO 9. *Si mostri che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.*

(†) Lasciamo al lettore il compito di verificare che, per $t \ge \sqrt{k}$, la successione diventa decrescente ed inferiormente limitata da $\sqrt{k}$, che ne è in tal caso il limite. Il lettore è invitato anche a disegnare il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{x}\right)$ e cercare di dedurre da questo un'idea sull'andamento delle successioni proposte, al variare di t.

Svolgimento. Poichè $n \geq 1$, si ha $\sqrt[n]{n} = 1 + p_n$ con $p_n \geq 0$. Vogliamo mostrare che la successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente decrescente[(*)] e converge a zero. Si osservi che

$$p_{n+1} \leq p_n \iff (1+p_{n+1})^{n+1} \leq (1+p_n)^{n+1} \iff n+1 \leq n\sqrt[n]{n} \iff (n+1)^n \leq n^n n \iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq n.$$

L'ultima disuguaglianza è verificata per $n \geq 3$; quindi la successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente decrescente e limitata inferiormente e perciò convergente ad un numero reale $\ell \geq 0$. Si osservi poi che, per $n \geq 2$, dalla formula del binomio di Newton si ricava $0 \leq \binom{n}{2} p_n^2 \leq (1+p_n)^n = n$ e quindi $0 \leq p_n^2 \leq \frac{2n}{n(n-1)}$. Per il Teorema dei Carabinieri si conclude che $\ell^2 = 0$ e quindi la tesi. □

ESERCIZIO 10. *Si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, di termine generale $a_n = \dfrac{\log(n!)}{n}$.*

(a) Si mostri che la successione è crescente.
(b) Si mostri che, qualunque sia $n \geq 1$, $a_{2n} - a_n \geq \frac{\log 2}{2}$.
(c) Si deduca dai punti precedenti che, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
(d) Osservando che, qualunque sia $n \geq 1$, $\sqrt[n]{n!} = e^{a_n}$, si calcoli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

Svolgimento. (a). Mostriamo che, qualunque sia $n \geq 1$, $a_{n+1} - a_n > 0$. Infatti,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\log((n+1)!)}{n+1} - \frac{\log(n!)}{n} = \frac{\log((n+1)!^n) - \log(n!^{n+1})}{n(n+1)} > 0$$

se, e solo se,

$$\log\frac{(n+1)!^n}{n!^{n+1}} > 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{(n+1)!^n}{n!^{n+1}} = \frac{(n+1)^n}{n!} > 1.$$

L'ultima disuguaglianza è evidente perchè $\frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{n+1}{n}\frac{n+1}{n-1}\cdots\frac{n+1}{1} \geq n+1 > 1$.

(b). Si ha

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_n &= \frac{\log((2n)!)}{2n} - \frac{\log(n!)}{n} = \frac{\log((2n)!) - 2\log(n!)}{2n} \\ &= \frac{\log(2n) + \log(2n-1) + \cdots + \log(n+1) - \log n - \log(n-1) - \cdots - \log 1}{2n} \\ &= \frac{\log(\frac{2n}{n}) + \log(\frac{2n-1}{n-1}) + \cdots + \log(\frac{n+1}{1})}{2n} \geq \frac{n\log 2}{2n} = \frac{\log 2}{2}. \end{aligned}$$

Infatti, per $j = 0, \dots, n-1$, $\frac{2n-j}{n-j} \geq \frac{2(n-j)}{n-j} = 2$.

(c). La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente ed illimitata e quindi diverge. Infatti, fissato comunque un numero reale $K > 0$, esiste un intero positivo k, tale che $k\frac{\log 2}{2} > K$ e si ha

$$a_{2^k} = a_{2^k} - a_0 = (a_{2^k} - a_{2^{k-1}}) + (a_{2^{k-1}} - a_{2^{k-2}}) + \cdots + (a_1 - a_0) \geq k\frac{\log 2}{2} > K.$$

Dunque, poiché la successione è crescente, per $n \geq 2^k$ si ha $a_n > K$ e, per l'arbitriarietà di K, ciò significa esattamente che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(d). È immediato. □

(*) Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice ***definitivamente decrescente*** se esiste un indice N_0 per cui si abbia $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \geq N_0$.