Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

IV^o foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. Si calcoli la somma della serie[(†)]

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n};$$

$$(b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - 2^n}{3^n};$$

$$(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n};$$

$$(d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(2n+2)}$$

$$(e)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 - n}{n^3 - n};$$

ESERCIZIO 2. Si dica se converge la serie

$$(a)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + n};$$

$$(b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n + \sin n + 5n}{\sqrt[3]{n^7}};$$

$$(c)\ \sum_{n=2}^{\infty} e^{\frac{-n^2}{n-1}};$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-5n^2}{3n+\sqrt{n}}};$$

$$(e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2};$$

$$(f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+1}{n};$$

$$(g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n^2+1}{n^2};$$

$$(h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n};$$

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log \frac{n+1}{n};$$

$$(j)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos(n\pi)}{n^2+1};$$

$$(k)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(n\pi/2)}{2n^2+5};$$

(†) Nel punto (e) si ricordi il punto (i) dell'Esercizio 1 del II foglio di esercizi.

ESERCIZIO 3. Ricordiamo che ad ogni serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è associata la successione delle sue somme parziali $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$, definita ponendo $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$. In particolare, se la successione delle somme parziali è convergente, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} s_k .$$

Si mostri che vale un parziale reciproco di questo fatto. Data una successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si ponga $d_0 = b_0$ e $d_n = b_n - b_{n-1}$ per $n \geq 1$. Si mostri che la successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ coincide con la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ESERCIZIO 4. Si mostri che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ converge per $|x| < 1$ e diverge per $|x| \geq 1$.

ESERCIZIO 5. Si dica per quali numeri reali α converge la serie(*)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} .$$

ESERCIZIO 6. Si ricordi che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ e si deduca da ciò che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sqrt[n]{n}$ converge.

(*) Può essere utile ricordare il cosiddetto *trucco di Cauchy*, ovvero che, se $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots > 0$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e solo se, converge la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.