
Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

V° foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{se } x \in [-4, 4] \\ ax^2 & \text{se } |x| > 4 \end{cases}$$

Si determini il valore di a per cui la funzione f risulti continua su tutto \mathbb{R} e si disegni un grafico indicativo dell'andamento di f .

ESERCIZIO 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 1 & \text{se } x < -2 \\ a - (x+1)^2 & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$$

Si determini il valore di a per cui la funzione f risulti continua su tutto \mathbb{R} e si disegni un grafico indicativo dell'andamento di f .

ESERCIZIO 3. Ricordando che, per $x \in (0, \frac{\pi}{4})$, si ha $0 < \sin x < x$, si deduca da ciò che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

Si mostri che, per ogni numero reale x_0 fissato, si ha^(t)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\sin x - \sin x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (\cos x - \cos x_0) = 0.$$

Si deduca da ciò la continuità delle funzioni trigonometriche su tutta la retta reale.

ESERCIZIO 4. Si mostri che $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$ e si deduca da ciò il $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

ESERCIZIO 5. Si calcolino i limiti

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x^2 + 4x\sqrt[3]{x}}{2x^4 - \sqrt[3]{x^{10}}};$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x\sqrt[3]{x} - x}{\sqrt[3]{2x^4 + 1}};$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}};$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1-x)}{\sin x};$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \log x}{2\sqrt[3]{x^2}};$

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cos x}{5\sqrt[5]{x^3}};$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2};$

(h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x;$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{10}(1+x)}{x};$

(j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-2x}{\sqrt{x^2+1}};$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{\sin 2x}{\sin 3x}};$

^(t) Si usino le formule di prostaferesi per le funzioni trigonometriche.