
Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

VII° foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. Si calcolino

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{1/\sin^2 x}$;
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{1/(1 - \cos x)}$;
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left| \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} \right|$;
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\log(1 + x) + 1 - x - \cos x}$;
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2 \log(1 - \sin x)}}{\sin \sqrt{|x|^3}}$;
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - x) + \sin x - 1 + \cosh x}{\sin x - \sinh x}$;
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{x^2} + \frac{3}{2}x \sinh x}{[\log(1 - x)]^4}$;
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - e^{x^2} + \frac{1}{2}x \sin x}{[\log(1 + x)]^4}$;
- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(2e^{1/x^2} - 2\cosh \frac{1}{x} - \frac{\sin(1/x)}{x} \right)$;
- (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x - \sinh x}{x^3 - \sin x(\cos x - \cosh x)}$;
- (k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + x^2) - x^2}{\sin^4 x}$;
- (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2} - 2 \cos x - 3 \sinh x}{\operatorname{tg}^4 x}$;
- (m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg} x \sqrt{x(1 - \cos x)}}{(\cosh x - 1)\sqrt{\log(1 + x)}}$;
- (n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - x^2)\sqrt{x - \sin x}}{(\sinh x - x)\sqrt{\operatorname{tg} x}}$;
- (o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \log(1 + x)\cosh x}{x^2 \log(1 - x)}$;

ESERCIZIO 2. Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{t^2 - 1}{t + 2} \right)^2 dt$$

al variare di x in $(-1, 1)$. Si determinino i coefficienti del polinomio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, tale che

$$P(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - P(x)}{x^3} = 0.$$

ESERCIZIO 3. Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{t - 1}{t + 1} \right)^3 dt$$

al variare di x in $(-1, 1)$. Si determinino i coefficienti del polinomio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, tale che

$$P(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - P(x)}{x^3} = 0.$$

ESERCIZIO 4. Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_1^x \frac{2t^2 - \sqrt{t} - 1}{\sqrt{t} + 2} dt$$

al variare di x nella semiretta $[0, +\infty)$. Si determinino i coefficienti del polinomio $P(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3$, tale che

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - P(x)}{(x-1)^3} = 0.$$

ESERCIZIO 5. Si calcolino

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \frac{\sin^2(t)}{t} dt}{\int_0^x [1 - \cos t + 2 \log(1+t)] dt} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x [tg^2t + 2e^t - 2] dt}{\int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt}.$$

ESERCIZIO 6. Si calcolino

- | | |
|---|--|
| (a) $\int_1^2 x^{-2} dx;$ | (h) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx;$ |
| (b) $\int_2^5 \sqrt{x-1} dx;$ | (i) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx;$ |
| (c) $\int_1^6 (3x+1)^{-1/2} dx;$ | (j) $\int_1^e \frac{\log x}{x} dx;$ |
| (d) $\int_0^1 (2-x^2)^2 dx;$ | (k) $\int_{e^{-2}}^{e^{-1}} \frac{1}{x \log x} dx;$ |
| (e) $\int_2^4 \frac{2x}{x-1} dx;$ | (l) $\int_1^2 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx;$ |
| (f) $\int_0^1 \frac{\arctg x}{1+x^2} dx;$ | (m) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx;$ |
| (g) $\int_0^1 x e^{-x^2} dx;$ | (n) $\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx;$ |

ESERCIZIO 7. Siano $f(t) = 2t^2 - t + 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ ed F una primitiva di f . Se $F(0) = 2$, si calcoli $F(2)$.

ESERCIZIO 8. Data la funzione

$$F(x) = \int_0^{2x} e^{-t^2} dt$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, si calcoli $F'(x)$.