Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova di accertamento del 19 novembre 1999 – Compito A

ESERCIZIO 1. *Si determini il sottoinsieme*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2x - 7 < \sqrt{x^2 - 4x + 3} \right\},$$

e lo si scriva (se possibile) come unione di intervalli e/o semirette.

Svolgimento. La funzione $\sqrt{y}$ è definita solo quando $y \geq 0$ e, per tali y, assume valore non negativo. Quindi il secondo membro della disuguaglianza è un numero reale maggiore o uguale a zero se, e solo se, $x^2 - 4x + 3 \geq 0$, e ciò accade se, e solo se, $x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$. Il primo membro della disuguaglianza è positivo se $x > \frac{7}{2}$ e minore o uguale a zero altrimenti; quindi sulla semiretta $(-\infty, 1]$ e sull'intervallo $[3, \frac{7}{2}]$, la disuguaglianza è verificata.

Per $x > \frac{7}{2}$, i due membri sono entrambi positivi e quindi la disuguaglianza proposta è equivalente alla disuguaglianza $(2x-7)^2 < x^2 - 4x + 3$, ovvero $3x^2 - 24x + 46 < 0$; e ciò accade solo se $4 - \frac{\sqrt{6}}{3} < x < 4 + \frac{\sqrt{6}}{3}$. Se si osserva che $4 - \frac{\sqrt{6}}{3} < \frac{7}{2} < 4 + \frac{\sqrt{6}}{3}$, si conclude che $A = (-\infty, 1] \cup [3, 4 + \frac{\sqrt{6}}{3})$. □

ESERCIZIO 2. *Si dimostri per induzione che per ogni intero positivo n si ha*

$$\sum_{j=1}^{n} (j^2 - 3j) = \frac{n(n+1)(n-4)}{3}.$$

Svolgimento. Dimostriamo la formula per induzione su n.

L'affermazione è vera per $n = 1$, essendo

$$\sum_{j=1}^{1} (j^2 - 3j) = 1 - 3 = -2 = \frac{1(1+1)(1-4)}{3}.$$

Mostriamo quindi che la validità della formula per un intero n implica la validità della stessa per l'intero successivo. Si ha

$$\sum_{j=1}^{n+1} (j^2 - 3j) = \sum_{j=1}^{n} (j^2 - 3j) + (n+1)^2 - 3(n+1);$$

e, supponendo vera la formula per l'intero n, questa quantità è uguale a

$$\frac{n(n+1)(n-4)}{3} + (n+1)^2 - 3(n+1) = \frac{(n+1)[n(n-4) + 3(n+1) - 9]}{3} =$$
$$= \frac{(n+1)(n^2 - n - 6)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n-3)}{3}$$

e quindi $\sum_{j=1}^{n+1} (j^2 - 3j) = \frac{(n+1)(n+2)(n-3)}{3}$, che è proprio l'uguaglianza attesa. Ciò conclude la dimostrazione. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri il polinomio $P(X) = X^2 - 3X + 4 + 6i \in \mathbb{C}[X]$.*

(a) *Si determinino i numeri complessi z che soddisfano l'equazione $P(z) = 0$.*

(b) *Si disegnino sul piano di Argand-Gauss i numeri complessi che soddisfano alla condizione $Im(P(z)) > 7$.*

Svolgimento. Consideriamo separatamente le due questioni.

(a). Applicando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado si trova che le due soluzioni dell'equazione sono i numeri complessi

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm [9 - 4(4 + 6i)]^{1/2}}{2}$$

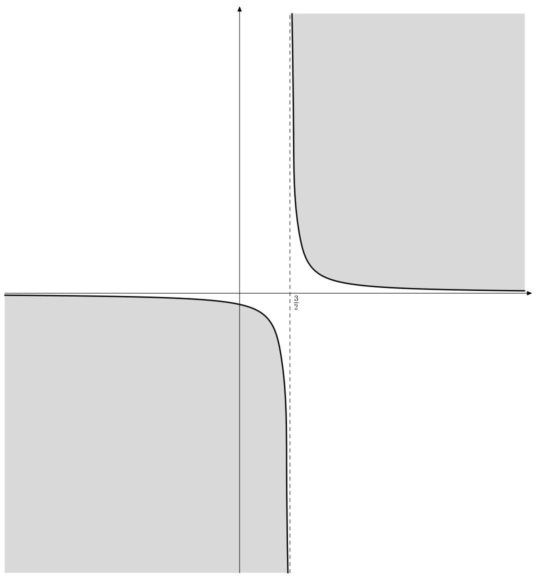
ovvero

$$z_1 = 2i, \qquad z_2 = 3 - 2i.$$

(b). Posto $z = x + iy$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si ha $Im(P(z)) = 2xy - 3y + 6$ e quindi si tratta di determinare i punti del piano di Gauß soddisfacenti alla condizione $y(2x-3) > 1$; ovvero

$$\begin{cases} y > \frac{1}{2x-3} & \text{se } x > \frac{3}{2} \\ y < \frac{1}{2x-3} & \text{se } x < \frac{3}{2} \end{cases}.$$

La regione del piano ove la condizione è soddisfatta è quindi rappresentata nella figura a fianco.



Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 4. *Si calcoli*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{3^n n}}.$$

Svolgimento. Si osservi che

$$\sqrt[n]{\frac{n^2+1}{3^n n}} = \frac{1}{3}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

I tre fattori tendono rispettivamente ad $\frac{1}{3}$, 1 ed 1, quindi il limite del prodotto è il prodotto dei limiti e si ha perciò $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{3^n n}} = \frac{1}{3}$. □

ESERCIZIO 5. *Si studi l'andamento della funzione $f(x) = |\sin x|^{\sin x}$ e se ne tracci un grafico indicativo (non è richiesto lo studio della derivata seconda). Si dica infine se la funzione f si estende ad una funzione continua e derivabile su tutta la retta reale.*

Svolgimento. La funzione proposta è definita quando la base dell'esponenziale è positiva, ovvero per $\sin x \neq 0$, e ciò accade se, e solo se, $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$. Nell'insieme di definizione, $f(x)$ è una funzione derivabile (e quindi continua), perchè composizione di funzioni derivabili, ed è periodica, di periodo 2π. Quindi è sufficiente studiare l'andamento di $f(x)$ nell'insieme $E = D \cap (0, 2\pi)$.

Vogliamo quindi determinare cosa succede ai bordi dell'insieme di definizione e, ricordando che, per $x \in D$, si ha $|\sin x|^{\sin x} = e^{\sin x \log|\sin x|}$, si può osservare che

$$\lim_{x\to k\pi} \sin x \log|\sin x| = \lim_{x\to k\pi} \frac{\log|\sin x|}{1/\sin x} \overset{H}{=} \lim_{x\to k\pi} \frac{\cos x/\sin x}{-\cos x/\sin^2 x} = 0 \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

e concludere che $\lim_{x\to k\pi} |\sin x|^{\sin x} = e^0 = 1$, per la continuità della funzione esponenziale.

Dunque la funzione proposta si estende ad una funzione continua su tutta la retta reale, se si pone $f(k\pi) = 1$, per $k \in \mathbb{Z}$. Consideriamo ora la derivata prima di f. Applicando le regole di derivazione delle funzioni composte, si ha

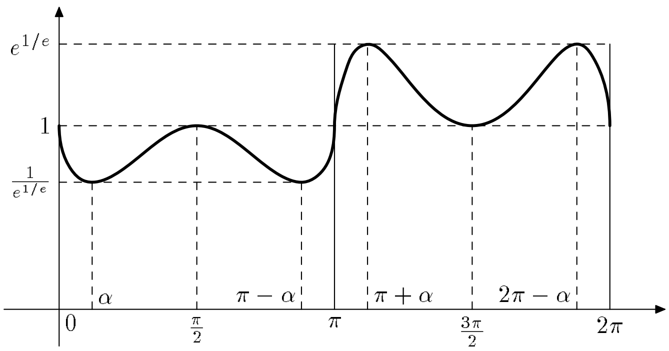
$$f'(x) = |\sin x|^{\sin x}(\log|\sin x| + 1)\cos x \qquad \text{per ogni } x \in D;$$

Inoltre,

$$\lim_{x\to k\pi}\frac{f(x)-f(k\pi)}{x-k\pi}\overset{H}{=}\lim_{x\to k\pi}f'(x)=\infty,$$

e quindi f non si estende ad una funzione derivabile nei punti del bordo di D.

Sia ora $x\in E$, ed osserviamo che il primo fattore della derivata prima ha sempre segno positivo e quindi il segno della derivata dipende solo dal segno degli altri due fattori. In particolare, $\log|\sin x|+1>0$ se, e solo se, $|\sin x|>\frac{1}{e}$ e quindi, posto $\alpha=\arcsin(1/e)$, ciò accade per $x\in(\alpha,\pi-\alpha)\cup(\pi+\alpha,2\pi-\alpha)$. Inoltre, $\cos x>0$ se, e solo se, $x\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3\pi}{2},2\pi)$, quindi si può concludere che $f(x)$ è crescente sugli intervalli $(\alpha,\frac{\pi}{2})$, $(\pi-\alpha,\pi+\alpha)$, $(\frac{3\pi}{2},2\pi-\alpha)$, mentre è decrescente sulle rimanenti parti di E.



Si osservi infine che, considerando la funzione $\arcsin x$ crescente ed a valori in $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, dalle disuguaglianze $0<\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$, si deduce che $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$. Possiamo quindi tracciare un grafico indicativo dell'andamento della funzione sui punti di E e ciò conclude la discussione. $\square$

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova di accertamento del 19 novembre 1999 – Compito B

ESERCIZIO 1. *Si determini il sottoinsieme*

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x + 1 < \sqrt{2x^2 + 2x - 4} \right\},$$

e lo si scriva (se possibile) come unione di intervalli e/o semirette.

Svolgimento. La funzione $\sqrt{y}$ è definita solo quando $y \geq 0$ e, per tali y, assume valore non negativo. Quindi il secondo membro della disuguaglianza è un numero reale maggiore o uguale a zero se, e solo se, $2x^2+2x-4 \geq 0$, e ciò accade se, e solo se, $x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$. Il primo membro della disuguaglianza è positivo se $x > -1$ e minore o uguale a zero altrimenti; quindi sulla semiretta $(-\infty, -2]$ la disuguaglianza è verificata.

Per $x > 1$, i due membri sono entrambi positivi e quindi la disuguaglianza proposta è equivalente alla disuguaglianza $(x+1)^2 < 2x^2 + 2x - 4$, ovvero $x^2 - 5 > 0$; e, per $x > 1$, ciò accade solo se $\sqrt{5} < x$. Quindi $B = (-\infty, -2] \cup (\sqrt{5}, +\infty)$. □

ESERCIZIO 2. *Si dimostri per induzione che per ogni intero positivo n si ha*

$$\sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 3k) = n(n+1)(n+2).$$

Svolgimento. Dimostriamo la formula per induzione su n.

L'affermazione è vera per $n = 1$, essendo

$$\sum_{k=1}^{1} (3k^2 + 3k) = 3 + 3 = 6 = 1(1+1)(1+2).$$

Mostriamo quindi che la validità della formula per un intero n implica la validità della stessa per l'intero successivo. Si ha

$$\sum_{k=1}^{n+1} (3k^2 + 3k) = \sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 3k) + 3(n+1)^2 + 3(n+1);$$

e, supponendo vera la formula per l'intero n, questa quantità è uguale a

$$n(n+1)(n+2) + 3(n+1)^2 + 3(n+1) = (n+1)[n(n+2) + 3(n+1) + 3] = (n+1)(n^2+5n+6) = (n+1)(n+2)(n+3)$$

e quindi $\sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 3k) = (n+1)(n+2)(n+3)$, che è proprio l'uguaglianza attesa. Ciò conclude la dimostrazione. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri il polinomio $P(X) = X^2 - 2X + 9 + 6i \in \mathbb{C}[X]$.*

(a) *Si determinino i numeri complessi z che soddisfano l'equazione $P(z) = 0$.*

(b) *Si disegnino sul piano di Argand-Gauss i numeri complessi che soddisfano alla condizione $Re(P(z)) > 9$.*

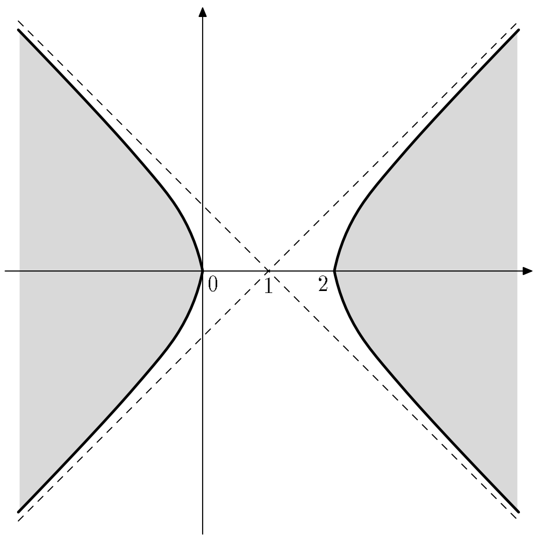
Svolgimento. Consideriamo separatamente le due questioni.

(a). Applicando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado si trova che le due soluzioni dell'equazione sono i numeri complessi

$$z_{1,2} = 1 \pm [1 - (9 + 6i)]^{1/2},$$

ovvero $z_1 = 3i$ e $z_2 = 2 - 3i$.

(b). Posto $z = x + iy$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si ha $Re(P(z)) = x^2 - y^2 - 2x + 9$ e quindi si tratta di determinare i punti del piano di Gauß soddisfacenti alla condizione $x^2 - y^2 - 2x > 0$, ovvero $(x-1)^2 - y^2 > 1$. Ricordiamo che la curva di equazione $(x-1)^2 - y^2 = 1$ è un'iperbole con gli assi paralleli agli assi coordinati, con centro nel punto $(1, 0)$ ed i semiassi uguali ad 1 (iperbole equilatera). In particolare, gli asintoti dell'iperbole sono le rette $(x-1) + y = 0$ ed $(x-1) - y = 0$. La regione del piano ove la condizione è soddisfatta è quindi rappresentata nella figura a fianco.



Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 4. *Si calcoli*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n n}{n^2 - 1}}.$$

Svolgimento. Si osservi che

$$\sqrt[n]{\frac{2^n n}{n^2 - 1}} = 2 \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \sqrt[n]{\frac{n^2}{n^2 - 1}}.$$

I tre fattori tendono rispettivamente a 2, 1 ed 1, quindi il limite del prodotto è il prodotto dei limiti e si ha perciò $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n n}{n^2 - 1}} = 2$. □

ESERCIZIO 5. *Si studi l'andamento della funzione* $f(x) = |\cos x|^{\cos x}$ *e se ne tracci un grafico indicativo (non è richiesto lo studio della derivata seconda). Si dica infine se la funzione* f *si estende ad una funzione continua e derivabile su tutta la retta reale.*

Svolgimento. La funzione proposta è definita quando la base dell'esponenziale è positiva, ovvero per $\cos x \neq 0$, e ciò accade se, e solo se, $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z} \}$. Nell'insieme di definizione, $f(x)$ è una funzione derivabile (e quindi continua), perchè composizione di funzioni derivabili, ed è periodica, di periodo 2π. Quindi è sufficiente studiare l'andamento di $f(x)$ nell'insieme $E = D \cap (0, 2\pi)$.

Vogliamo quindi determinare cosa succede ai bordi dell'insieme di definizione e, ricordando che, per $x \in D$, si ha $|\cos x|^{\cos x} = e^{\cos x \log|\cos x|}$, si può osservare che

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi} \cos x \log|\cos x| = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{\log|\cos x|}{1/\cos x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{-\sin x/\cos x}{\sin x/\cos^2 x} = 0 \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

e concludere che $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi} |\cos x|^{\cos x} = e^0 = 1$, per la continuità della funzione esponenziale.

Dunque la funzione proposta si estende ad una funzione continua su tutta la retta reale, se si pone $f(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 1$, per $k \in \mathbb{Z}$. Consideriamo ora la derivata prima di f. Applicando le regole di derivazione delle funzioni composte, si ha

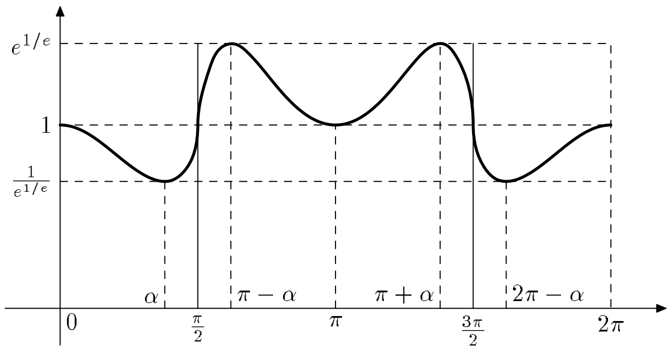
$$f'(x) = -|\cos x|^{\cos x}(\log|\cos x| + 1)\sin x \qquad \text{per ogni } x \in D;$$

Inoltre,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2}+k\pi)}{x-(\frac{\pi}{2}+k\pi)} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi} f'(x) = \infty,$$

e quindi f non si estende ad una funzione derivabile nei punti del bordo di D.

Sia ora $x \in E$, ed osserviamo che il primo fattore della derivata prima ha sempre segno negativo e quindi il segno della derivata dipende solo dal segno degli altri due fattori. In particolare, $\log|\cos x| + 1 > 0$ se, e solo se, $|\cos x| > \frac{1}{e}$ e quindi, posto $\alpha = \arccos(1/e)$, ciò accade per $x \in (0, \alpha) \cup (\pi - \alpha, \pi + \alpha) \cup (2\pi - \alpha, 2\pi)$. Inoltre, $\sin x > 0$ se, e solo se, $x \in (0, \pi)$, quindi si può concludere che $f(x)$ è crescente sugli intervalli $(\alpha, \pi - \alpha)$, $(\pi, \pi + \alpha)$, $(2\pi - \alpha, 2\pi)$, mentre è decrescente sulle rimanenti parti di E.



Si osservi infine che, considerando la funzione $\arccos x$ decrescente ed a valori in $[0, \pi]$, dalla disuguaglianza $0 < \frac{1}{e} < \frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})$, si deduce che $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Possiamo quindi tracciare un grafico indicativo dell'andamento della funzione sui punti di E e ciò conclude la discussione. $\square$