Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova di accertamento del 20 gennaio 2000 – Compito A

ESERCIZIO 1. *Si calcoli* $\int_1^e \cos(\log x)dx$.

Svolgimento. Cerchiamo una primitiva della funzione integranda. Utilizzando l'integrazione per parti si ha

$$\int \cos(\log x)dx = x\cos(\log x) + \int \sin(\log x)dx = x\cos(\log x) + x\sin(\log x) - \int \cos(\log x)dx,$$

da cui si deduce che

$$\int \cos(\log x)dx = \frac{x}{2}[\cos(\log x) + \sin(\log x)] + c.$$

Quindi, applicando la Formula di Barrow, si ottiene $\int_1^e \cos(\log x)dx = \frac{e}{2}(\cos 1 + \sin 1) - \frac{1}{2}$. □

ESERCIZIO 2. *Si dica per quali valori del parametro* $\alpha \in \mathbb{R}$, *converge l'integrale*

$$\int_\pi^{+\infty} x^{2\alpha-1}\left(e^{1/x^2} - \cosh\frac{1}{x} - \frac{\sin(1/x)}{2x}\right)dx.$$

Svolgimento. Osserviamo che, per $x \to +\infty$, sia ha $\frac{1}{x} \to 0$ ed $\frac{1}{x^2} \to 0$. Inoltre, in base alle formule di McLaurin, per $y \to 0$, si ha

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2), \qquad \cosh y = 1 + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4), \qquad \sin y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^3).$$

Da ciò si deduce che

$$e^{1/x^2} - \cosh\frac{1}{x} - \frac{\sin(1/x)}{2x} = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^4} - 1 - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{24x^4} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{12x^4} + o(1/x^4) = \frac{13}{24x^4} + o(1/x^4)$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2\alpha-1}\left(e^{1/x^2} - \cosh\frac{1}{x} - \frac{\sin(1/x)}{2x}\right)}{x^{2\alpha-5}} = \frac{13}{24}.$$

Per il Criterio del confronto asintotico, l'integrale proposto converge se, e solo se, converge $\int_\pi^{+\infty} x^{2\alpha-5}dx$, e ciò accade se, e solo se, $2\alpha - 5 < -1$, ovvero se, e solo se, $\alpha < 2$. □

ESERCIZIO 3. *Si dica se converge la serie* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n-2}{n(n-1)(n+1)}$ *e, in caso affermativo, se ne calcoli la somma.*

Svolgimento. Si tratta di una serie a termini positivi, e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n-2}{n(n-1)(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = 3;$$

per cui la serie converge assolutamente, essendo asintoticamente equivalente alla serie convergente $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Per calcolarne la somma possiamo ragionare come segue. Si ha

$$\frac{3n-2}{n(n-1)(n+1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+1}, \qquad \text{ove} \qquad \begin{cases} A+B+C=0 \\ A-C=3 \\ -B=-2 \end{cases};$$

ovvero $\frac{3n-2}{n(n-1)(n+1)} = \frac{1/2}{n-1} + \frac{2}{n} - \frac{5/2}{n+1}$. Dunque, per $k \geq 4$, si ha

$$\sigma_k = \sum_{n=2}^{k} \frac{3n-2}{n(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} - \frac{5/2}{k} + \frac{2}{k} - \frac{5/2}{k+1} = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{5}{k+1}\right)$$

perchè tutti i termini intermedi si cancellano. Dunque $\lim_{k\to\infty} \sigma_k = \frac{7}{4}$, che è la somma della serie proposta. □

ESERCIZIO 4. *Calcolare gli autovalori ed i relativi sottospazi di autovettori dell'endomorfismo ϕ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica. Dire in particolare se ϕ è diagonalizzabile.

Svolgimento. Si ha $\det(A - \lambda\mathbf{1}) = (2-\lambda)^2(3-\lambda)$ e quindi gli autovalori sono: 2, con molteplicità 2, e 3, con molteplicità 1. I sottospazi di autovettori corrispondenti sono $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ e perciò ϕ è diagonalizzabile. □

ESERCIZIO 5. *Discutere l'insieme delle soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} x & & + & (2\lambda-2)z & = & 2\lambda^2-1 \\ x & + \ \lambda y & & & = & 3 \\ 2x & + \ \lambda y & + & (\lambda-1)z & = & 3+\lambda^2 \end{cases}$$

al variare del parametro λ in $\mathbb{R}$.

Svolgimento. La matrice completa è equivalente alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\lambda-2 & 2\lambda^2-1 \\ 0 & \lambda & 2-2\lambda & 4-2\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$. Per $\lambda \notin \{0,1\}$, matrice completa ed incompleta hanno rango 3 ed il sistema ha quindi un'unica soluzione della forma

$$x = 1, \qquad y = \frac{2}{\lambda}, \qquad z = \lambda + 1 \qquad (0 \neq \lambda \neq 1).$$

Per $\lambda = 1$, matrice completa ed incompleta hanno rango 2, il sistema ha infinite soluzioni $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$. Per $\lambda = 0$, la matrice completa ha rango 3, mentre quella incompleta ha rango 2 e quindi il sistema non ha soluzioni. □

ESERCIZIO 6. *Siano date le rette*

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = 2 + \tau \\ y = 1 + \tau \\ z = 1 \end{cases}, \qquad r'' : \begin{cases} x = 1 \\ y = -3\eta \\ z = 1 + \eta \end{cases}$$

(a) Verificare che r, r', ed r'' sono incidenti e determinare il punto P_0 di intersezione.
(b) Determinare i punti Q_1 e Q_2 di r' tali che le loro proiezioni ortogonali P_1 e P_2 su r abbiano distanza $2\sqrt{2}$ da P_0.
(c) Trovare l'equazione del piano π contenente r e r' e determinare i punti R di r'' tali che la piramide di base $P_1Q_1P_2Q_2$ e vertice R abbia volume 32

Svolgimento. (a). Il punto di intersezione è $P_0(1, 0, 1)$ che nelle equazioni delle rette si ottiene per $t = 1$, $\tau = -1$ e $\eta = 0$.
(b). Intersecando r e r' con i piani perpendicolari a r ed aventi distanza $2\sqrt{2}$ da P_0 otteniamo i punti P_1 e Q_1 ed i punti P_2 e Q_2. I piani perpendicolari ad r hanno equazione $x + z + d = 0$. I valori di d corrispondenti ai piani a distanza $2\sqrt{2}$ da P_0 si ricavano risolvendo l'equazione $\frac{|1+1+d|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Otteniamo quindi i piani $\pi_1 : x + z + 2 = 0$ e $\pi_2 : x + z - 6 = 0$, e le intersezioni di r e r' con questi piani sono i punti $P_1(-1, 0, -1)$, $P_2(3, 0, 3)$, $Q_1(-3, -4, 1)$, $Q_2(5, 4, 1)$.
(c). Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è perpendicolare a π. Poiché π contiene P_0, abbiamo $\pi : x - y - z = 0$.

L'area del parallelogramma $P_1Q_1P_2Q_2$ è $\left\| \overrightarrow{P_1Q_1} \times \overrightarrow{P_1Q_2} \right\|$ (oppure $\left\| \overrightarrow{P_1Q_1} \right\| \cdot \mathrm{dist}(P_1, P_2)$) ed è uguale a $16\sqrt{3}$. L'altezza della piramide sarà quindi uguale a $3\frac{32}{16\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ ed i punti R saranno i pundi di r'' a distanza $2\sqrt{3}$ da π. L'equazione

$$\mathrm{dist}(\pi, R) = \frac{|1 + 3\eta - (1 + \eta)|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

è verificata per $\eta = 3$ e $\eta = -3$ e quindi i punti cercati sono $R_1(1, -9, 4)$ e $R_2(1, 9, -2)$. □

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)
prova di accertamento del 20 gennaio 2000 – Compito B

ESERCIZIO 1. *Si calcoli* $\int_1^e \sin(\log x)dx$.

Svolgimento. Cerchiamo una primitiva della funzione integranda. Utilizzando l'integrazione per parti si ha

$$\int \sin(\log x)dx = x\sin(\log x) - \int \cos(\log x)dx = x\sin(\log x) - x\cos(\log x) - \int \sin(\log x)dx,$$

da cui si deduce che

$$\int \sin(\log x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\log x) - \cos(\log x)] + c.$$

Quindi, applicando la Formula di Barrow, si ottiene $\int_1^e \sin(\log x)dx = \frac{e}{2}(\sin 1 - \cos 1) + \frac{1}{2}$. □

ESERCIZIO 2. *Si dica per quali valori del parametro* $\alpha \in \mathbb{R}$, *converge l'integrale*

$$\int_\pi^{+\infty} x^{\alpha-2}\left(e^{1/x^2} - \cos\frac{1}{x} - \frac{3\sinh(1/x)}{2x}\right)dx.$$

Svolgimento. Osserviamo che, per $x \to +\infty$, sia ha $\frac{1}{x} \to 0$ ed $\frac{1}{x^2} \to 0$. Inoltre, in base alle formule di McLaurin, per $y \to 0$, si ha

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2), \qquad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4), \qquad \sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + o(y^3).$$

Da ciò si deduce che

$$e^{1/x^2} - \cos\frac{1}{x} - \frac{3\sinh(1/x)}{2x} = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^4} - 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{24x^4} - \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{4x^4} + o(1/x^4) = \frac{5}{24x^4} + o(1/x^4)$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-2}\left(e^{1/x^2} - \cos\frac{1}{x} - \frac{3\sinh(1/x)}{2x}\right)}{x^{\alpha-6}} = \frac{5}{24}.$$

Per il Criterio del confronto asintotico, l'integrale proposto converge se, e solo se, converge $\int_\pi^{+\infty} x^{\alpha-6}dx$, e ciò accade se, e solo se, $\alpha - 6 < -1$, ovvero se, e solo se, $\alpha < 5$. □

ESERCIZIO 3. *Si dica se converge la serie* $\sum_{n=1}^\infty \frac{2n-3}{n(n+1)(n+2)}$ *e, in caso affermativo, se ne calcoli la somma.*

Svolgimento. Si tratta di una serie a termini positivi (per $n \geq 2$), e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-3}{n(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n^2}} = 2;$$

per cui la serie converge assolutamente, essendo asintoticamente equivalente alla serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
Per calcolarne la somma possiamo ragionare come segue. Si ha

$$\frac{2n-3}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}, \qquad \text{ove} \qquad \begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=2\ ; \\ 2A=-3 \end{cases}$$

ovvero $\frac{2n-3}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{3/2}{n} + \frac{5}{n+1} - \frac{7/2}{n+2}$. Dunque, per $k \geq 4$, si ha

$$\sigma_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{2n-3}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} - \frac{3}{4} - \frac{7/2}{k+1} + \frac{5}{k+1} - \frac{7/2}{k+2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{k+1} - \frac{7}{k+2}\right)$$

perchè tutti i termini intermedi si cancellano. Dunque $\lim_{k\to\infty} \sigma_k = \frac{1}{4}$, che è la somma della serie proposta. $\square$

ESERCIZIO 4. *Calcolare gli autovalori ed i relativi sottospazi di autovettori dell'endomorfismo ϕ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

nella base canonica. Dire in particolare se ϕ è diagonalizzabile.

Svolgimento. Si ha $\det(A - \lambda \mathbf{1}) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$ e quindi gli autovalori sono: 1, con molteplicità 1 e 2, con molteplicità 2. I sottospazi di autovettori corrispondenti sono $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Poiché il sottospazio generato dagli autovettori ha dimensione 2, ϕ non è diagonalizzabile. $\square$

ESERCIZIO 5. *Discutere l'insieme delle soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} x + (\lambda-1)y + z = 2\lambda - 1 \\ x + 2(\lambda-1)y + z = 3\lambda - 2 \\ x + (\lambda-1)y + \lambda^2 z = 3\lambda \end{cases}$$

al variare del parametro λ in $\mathbb{R}$.

Svolgimento. La matrice completa del sistema lineare è equivalente alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda-1 & 1 & 2\lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

Per $\lambda \notin \{-1, 1\}$, matrice completa ed incompleta hanno rango 3 e quindi il sistema ha un'unica soluzione data da

$$x = \frac{\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda - 1} \qquad y = 1 \qquad z = \frac{1}{\lambda - 1} \qquad (\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\})$$

Per $\lambda = 1$, matrice completa e incompleta hanno rispettivamente rango 2 e 1, e quindi il sistema non ha soluzioni.

Per $\lambda = -1$ matrice completa e incompleta hanno rango 2 e quindi il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro. Per questo valore di λ, il sistema risulta equivalente a $\begin{cases} x - 2y + z = -3 \\ -2y = -2 \end{cases}$ e le soluzioni sono quindi $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

□

ESERCIZIO 6. *Si considerino le rette*

$$r : \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y - 2z + 2 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - z - 5 = 0 \\ 3x - 2y - 12 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare il piano π contenente r e parallelo a s e la distanza di s da π.
(b) Trovare il punto P_0 di intersezione tra r e la proiezione ortogonale di s su π.
(c) Detta Q_0 la proiezione ortogonale di P_0 su s, determinare due punti P_1 e P_2 di r, equidistanti da P_0, tali che il triangolo $P_1P_2Q_0$ abbia area $12\sqrt{3}$.

Svolgimento. (a). Posto $z = t$ nelle equazioni di s, ricaviamo le equazioni parametriche $s : \begin{cases} x = t + 5 \\ y = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}t \\ z = t \end{cases}$. Il fascio di piani passanti per r ha equazione $\lambda(2x - y - 4) + \mu(y - 2z + 2) = 0$ ed i valori di λ e μ per cui il piano riusulta parallelo a s sono le soluzioni dell'equazione $\left\langle \begin{pmatrix} 2\lambda \\ -\lambda + \mu \\ -2\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$. I valori $\lambda = \mu = 1$ risolvono questa equazione e quindi l'equazione di π è $x - z - 1 = 0$. La distanza di s da π è la distanza di un arbitrario punto di s da π e vale $2\sqrt{2}$.

(b). Il punto P_0 è l'intersezione tra r ed il piano π' contenente s e perpendicolare a π. Il fascio di piani contenente s ha equazione $\lambda(x - z - 5) + \mu(3x - 2y - 12) = 0$ e la condizione di perpendicolarità a π corrisponde all'equazione $\left\langle \begin{pmatrix} \lambda + 3\mu \\ -2\mu \\ -\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$. I valori $\lambda = 3$ e $\mu = -2$ sono soluzioni e quindi un'equazione di π' è $-3x + 4y - 3z + 9 = 0$. L'intersezione tra r e π' è $P_0(2, 0, 1)$.

(c). Poiché P_0 appartiene alla proiezione di s su π (che sono paralleli), P_0 è la proiezione di Q_0 su π e la lunghezza del segmento P_0Q_0 è uguale alla distanza $2\sqrt{2}$ tra s e π. Il segmento P_0Q_0 è anche perpendicolare a r, perché questa retta è contenuta in π, e quindi la lunghezza di tale segmento è l'altezza del triangolo $P_1P_2Q_0$. La base del triangolo dovrà dunque avere lunghezza $6\sqrt{6}$ e P_1 e P_2 sono i punti di r a distanza $3\sqrt{6}$ da P_0. Il generico punto P di r ha coordinate (ricavate dalle equazioni parametriche) $(t + 1, 2t - 2, t)$; la sua distanza da P_0 vale $\sqrt{(t + 1 - 2)^2 + (2t - 2)^2 + (t - 1)^2} = \sqrt{6}|t - 1|$ ed è uguale a $3\sqrt{6}$ per $t = 4$ e $t = -2$. Sostituiti questi valori in $P(t + 1, 2t - 2, t)$ otteniamo $P_1(5, 6, 4)$ e $P_2(-1, -6, -2)$.

□