Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova di accertamento del 27 novembre 1998 – Compito A

ESERCIZIO 1. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cosh x - \cos x)\sin^3 x}{\log^2(1-x)(\sin x - \sinh x)}.$$

Svolgimento. Ricordiamo che, in base alle formule di Mc Laurin, si ha

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^2), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2),$$
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$
$$\log(1-x) = -x + o(x).$$

e quindi, per $x \to 0$, si ha

$$\frac{(\cosh x - \cos x)\sin^3 x}{\log^2(1-x)(\sin x - \sinh x)} = \frac{(x^2 + o(x^2))(x+o(x))^3}{(-x+o(x))^2(-\frac{x^3}{3} + o(x^3))} = \frac{x^5 + o(x^5)}{-\frac{x^5}{3} + o(x^5)}.$$

Da ciò si può concludere che il limite cercato è uguale a -3. □

ESERCIZIO 2. *Si studi l'andamento della funzione* $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{\tanh x}$*, e se ne tracci un grafico indicativo. Si dica in particolare se tale funzione può essere estesa ad una funzione continua e derivabile su tutto* $\mathbb{R}$ *e si determini la tangente al grafico della funzione estesa per* $x = 0$.

Svolgimento. La funzione data è definita per $x \neq 0$, perchè in tal punto si annulla il denominatore della frazione. Ricordando che

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1},$$

si deduce che la funzione proposta coincide nel suo insieme di definizione con $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x+1}$ ed è quindi

$$f(x) = g(h(x)), \qquad \text{ove} \quad h(x) = e^x, \ \text{e} \ g(y) = \frac{y^2+1}{y+1}.$$

Dunque la funzione data si può estendere ad una funzione definita su tutta la retta reale (l'indeterminazione per $x = 0$ era solo apparente) ed ivi derivabile un numero qualsiasi di volte. D'ora in poi non distingueremo f dalla sua estensione. Si ha

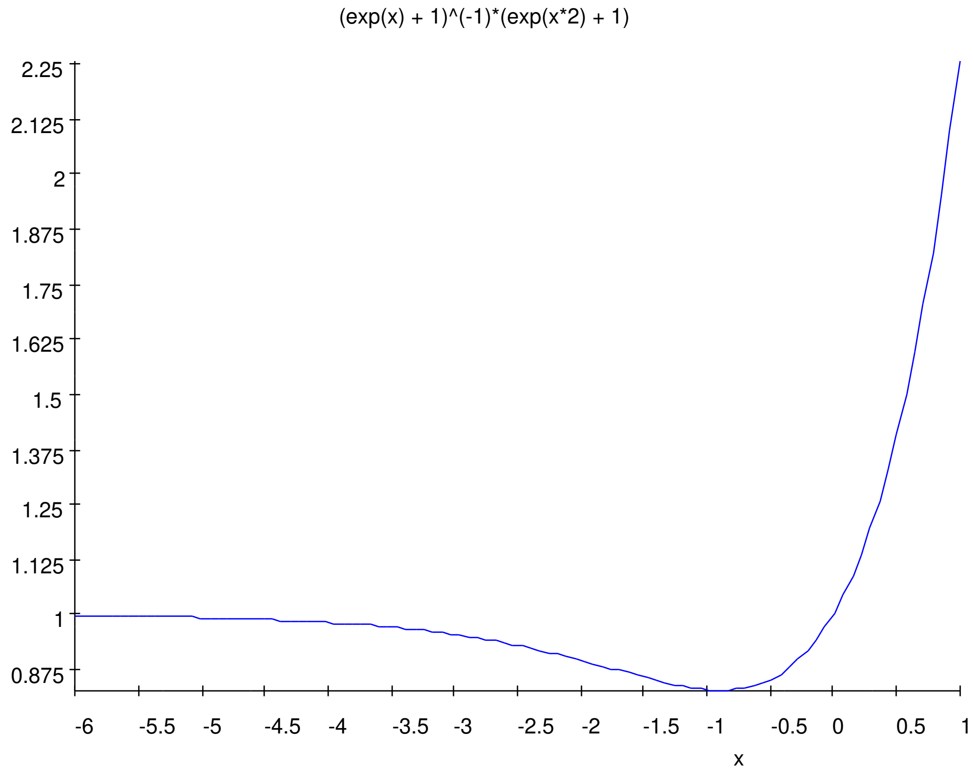
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to 0^+} g(y) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} g(y) = +\infty.$$

La derivata di f è uguale ad

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = \frac{e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x+1)^2} e^x,$$

ed il suo segno dipende unicamente dale segno del numeratore, ovvero dal segno del trinomio $y^2 + 2y - 1$ sulla semiretta $(0, +\infty)$. Il trinomio ha le due radici $y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, una sola delle quali è positiva; quindi si ha $f'(x) < 0$ per $x < \log(\sqrt{2}-1)$ ed $f'(x) > 0$ per $x > \log(\sqrt{2}-1)$. Dunque la funzione f è decrescente per $x < \log(\sqrt{2}-1)$ e crescente per $x > \log(\sqrt{2}-1)$, il punto $x_0 = \log(\sqrt{2}-1) < 0$ è quindi un punto di minimo relativo (ed assoluto) per f e si ha $f(x_0) = g(\sqrt{2}-1) = 2(\sqrt{2}-1)$.

Possiamo quindi tracciare un grafico indicativo per la funzione f.



Come abbiamo già osservato la funzione si può estendere ad una funzione continua e derivabile su tutta la retta reale, che abbiamo continuato ad indicare con f e la tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 0$ è la retta di equazione $y = f(0) + f'(0)x$, ovvero $y = \frac{1}{2}x + 1$. □

ESERCIZIO 3. *Si determinino le costanti a e b affinchè la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2\sinh x} & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + ax + b & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile su tutta la retta reale. Si scriva l'equazione della tangente al grafico di f per $x = 0$.

Svolgimento. Sulla semiretta $(-\infty, 0)$ la funzione data coincide con la funzione composta di due funzioni derivabili ed è quindi (continua e) derivabile. Sulla semiretta $(0, +\infty)$ la funzione data coincide con un polinomio ed è quindi derivabile indipendentemente dai valori delle costanti a e b. Bisogna quindi discutere il comportamento della funzione per $x = 0$. Ora

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{-2\sinh x} = f(0) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 + ax + b = b.$$

Dunque f è continua per $x = 0$ (e quindi su tutta la retta reale) se, e solo se, $b = 1$. Inoltre, per $x \neq 0$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -2\cosh x \, e^{-2\sinh x} & \text{se } x < 0 \\ 2x + a & \text{se } x < 0 \end{cases};$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = a,$$

dove la prima uguaglianza nei due limiti discende dalla regola di de L'Hôpital, che può essere applicata perchè f è continua per $x = 0$. Dunque f è derivabile per $x = 0$ (e quindi su tutta la retta reale) se, e solo se, $a = -2$ e $b = 1$.

Possiamo quindi concludere osservando che la tangente al grafico di f per $x = 0$ è la retta di equazione $y = f'(0)x + f(0)$, ovvero $y = -2x + 1$. □

ESERCIZIO 4. *Si calcoli* $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$.

Svolgimento. Integrando due volte per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx \end{aligned}$$

da cui si deduce che

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c.$$

Applicando la Formula di Barrow, si ottiene il valore dell'integrale, ovvero $\dfrac{e^{\pi/2} + 1}{2}$. □

ESERCIZIO 5. *Si dica per quali valori del parametro* α *converge l'integrale*

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha \sqrt{\sin(\tfrac{1}{x})}\, dx.$$

Svolgimento. La funzione integranda è continua e positiva sulla semiretta $[1, +\infty)$ e si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha \sqrt{\sin(\frac{1}{x})}}{x^{\alpha - \frac{1}{2}}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sqrt{\sin y}}{\sqrt{y}} = 1.$$

Dunque la funzione integranda è asintoticamente equivalente alla funzione $x^{\alpha - \frac{1}{2}}$ che converge se, e solo se, $\alpha - \frac{1}{2} < -1$. Quindi l'integrale proposto converge se, e solo se, $\alpha < -\frac{1}{2}$. □

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova di accertamento del 27 novembre 1998 – Compito B

ESERCIZIO 1. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\log(1+x)+\log(1-x)]\sinh^2 x}{(\cosh x - e^x + x)\log(1-x)}.$$

Svolgimento. Ricordiamo che, in base alle formule di Mc Laurin, si ha

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4), \qquad \log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

e quindi, per $x \to 0$, si ha

$$\frac{[\log(1+x)+\log(1-x)]\sinh^2 x}{(\cosh x - e^x - x)\log(1-x)} = \frac{(-x^2+o(x^2))(x+o(x))^2}{(-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))(-x+o(x))} = \frac{-x^4+o(x^4)}{\frac{x^4}{6}+o(x^4)}.$$

Da ciò si può concludere che il limite cercato è uguale a -6. $\square$

ESERCIZIO 2. *Si studi l'andamento della funzione* $f(x) = \dfrac{3\cosh x}{e^x \sinh x}$*, e se ne tracci un grafico indicativo. Si dica in particolare se l'immagine di* f *è tutta la retta reale e, in caso contrario, si determini tale sottoinsieme di* $\mathbb{R}$*.*

Svolgimento. Ricordando che

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

si deduce che la funzione proposta è uguale a $f(x) = 3\dfrac{e^{2x}+1}{e^x(e^{2x}-1)}$ ed è quindi

$$f(x) = g(h(x)), \qquad \text{ove} \quad h(x) = e^x, \ \text{e}\ g(y) = 3\frac{y^2+1}{y(y^2-1)}.$$

Dunque si tratta di una funzione definita su tutta la retta reale con l'esclusione di $x=0$ ove il denominatore si annulla, e nell'insieme di definizione f è derivabile un numero qualsiasi di volte. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to 0^+} g(y) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to 1^+} g(y) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{y\to 1^-} g(y) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} g(y) = 0.$$

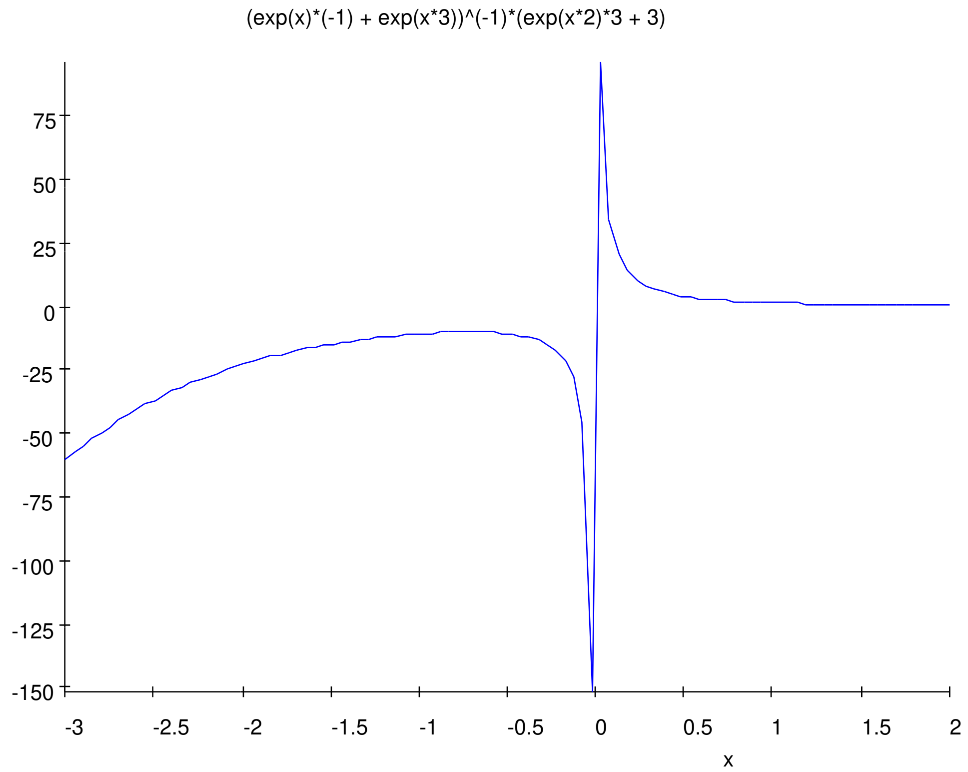
La derivata di f è uguale ad

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = -3\frac{e^{4x}+4e^{2x}-1}{e^{2x}(e^{2x}-1)^2}e^x,$$

ed il suo segno dipende unicamente dal segno del numeratore, ovvero dal segno del trinomio t^2+4t-1 sulla semiretta $(0,+\infty)$. Il trinomio ha una sola radice positiva $t_0 = \sqrt{5}-2$; quindi si ha $f'(x) > 0$ per

$e^{2x} < \sqrt{5} - 2$ ed $f'(x) < 0$ per $e^{2x} > \sqrt{5} - 2$. Dunque la funzione f è crescente per $x < \frac{1}{2}\log(\sqrt{5} - 2)$ e decrescente per $\frac{1}{2}\log(\sqrt{5} - 2) < x < 0$ e per $x > 0$. Il punto $x_0 = \frac{1}{2}\log(\sqrt{5} - 2) < 0$ è quindi un punto di massimo relativo per f e si ha $f(x_0) = g(\sqrt{\sqrt{5} - 2}) = 3\frac{\sqrt{5}-1}{(\sqrt{5}-3)\sqrt{\sqrt{5}-2}} < 0$.

Possiamo quindi tracciare un grafico indicativo per la funzione f.



In particolare, si può concludere che l'immagine della funzione f è costituita dall'unione di due semirette, ovvero $(-\infty, f(x_0)] \cup (0, +\infty)$. □

ESERCIZIO 3. *Si determinino le costanti a e b affinchè la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{se } x < 0 \\ e^{2\sin x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile su tutta la retta reale. Si scriva l'equazione della tangente al grafico di f per $x = 0$.

Svolgimento. Sulla semiretta $(-\infty, 0)$ la funzione data coincide con un polinomio ed è quindi (continua e) derivabile indipendentemente dai valori delle costanti a e b. Sulla semiretta $(0, +\infty)$ la funzione data coincide con la funzione composta di due funzioni derivabili ed è quindi derivabile. Bisogna quindi discutere il comportamento della funzione per $x = 0$. Ora

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 + ax + b = b \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{2\sin x} = f(0) = 1.$$

Dunque f è continua per $x = 0$ (e quindi su tutta la retta reale) se, e solo se, $b = 1$. Inoltre, per $x \neq 0$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{se } x < 0 \\ 2\cos x\, e^{2\sin x} & \text{se } x > 0 \end{cases};$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = a \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2,$$

dove la prima uguaglianza discende dalla regola di de L'Hôpital, che può essere applicata perchè f è continua per $x = 0$. Dunque f è derivabile per $x = 0$ (e quindi su tutta la retta reale) se, e solo se, $a = 2$ e $b = 1$.

Possiamo quindi concludere osservando che la tangente al grafico di f per $x = 0$ è la retta di equazione $y = f'(0)x + f(0)$, ovvero $y = 2x + 1$. □

ESERCIZIO 4. *Si calcoli* $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$.

Svolgimento. Integrando due volte per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x dx &= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx\end{aligned}$$

da cui si deduce che

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + c.$$

Applicando la Formula di Barrow, si ottiene il valore dell'integrale, ovvero $\frac{e^{\pi/2} - 1}{2}$. □

ESERCIZIO 5. *Si dica per quali valori del parametro α converge l'integrale*

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha \sqrt{1 - \cos(\tfrac{1}{x})}\, dx.$$

Svolgimento. La funzione integranda è continua e positiva sulla semiretta $[1, +\infty)$ e si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha \sqrt{1 - \cos(\frac{1}{x})}}{x^{\alpha-1}} = \lim_{y \to 0+} \frac{\sqrt{1 - \cos y}}{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dunque la funzione integranda è asintoticamente equivalente alla funzione $x^{\alpha-1}$ che converge se, e solo se, $\alpha - 1 < -1$. Quindi l'integrale proposto converge se, e solo se, $\alpha < 0$. □