Pre-Appunti sull'algebra lineare

Questi pre-appunti trattano certi argomenti di algebra lineare da un punto di vista che in grande misura evita l'uso di determinanti per stabilire certi fatti basilare sulla struttura di operatori lineari. Si segue lo spirito dell'articolo "Down with Determinants" di Sheldon Axler (Amer. Math. Monthly, February 1995). Il lettore bramoso di cimentarsi con la teoria di determinanti ed algebre esterna può fare tesoro del trattamento nel libro di Candilera.

In quanto segue V indichera uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo C e $T : V \longrightarrow V$ un applicazione lineare da V in se stesso, ossia un endomorphismo di V. All'inizio il campo C sarà $\mathbf{C}$, i numeri complessi.

Definizione. La quantità scalare $\lambda \in \mathbf{C}$ è un **autovalore** di T se l'applicazione lineare $T - \lambda I$ non è iniettiva. Un vettore $v \in V$ è un autovettore di T se $Tv = \lambda v$ per qualche autovalore λ.

Si osserva che il vettore $0 \in V$ soddisfa la condizione per ogni scelta di λ (persino se λ non è autovalore di T). Quindi, nel parlare di spazio di dimensioni positiva, al solito supponiamo tacitamente che $v \neq 0$.

Proposizione 1. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbf{C}$. Allora ogni applicazione lineare $T : V \longrightarrow V$ possiede un autovalore.*

Dimostrazione. Sia $v \neq 0$ un vettore di V. I vettori $v, Tv, \ldots, T^n v$ non possono essere linearmente indipendenti perchè sono n+1 e V ha dimensione n. Dunque, esiste una relazione

$$a_0 v + a_1 Tv + \cdots + T^n(v) = 0 \tag{1}$$

con gli $a_i \in \mathbf{C}$ per $i = 0, 1, \ldots n$ e non tutti $a_i = 0$. Si consideri il polinomio $a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. Poichè $\mathbf{C}$ è algebricamente chiuso tale polinomio ammette una fattorizzazione

$$a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = c(X - r_1) \cdots (X - r_m) \tag{2}$$

ove $c \neq 0$ è un numero complesso (uguale al coefficiente a_j del termine $a_j X^j$ non nullo con indice j massimale). Se ora si sostituisce T per X nel polinomio si desume da equazioni (1) e (2) che

$$0 = (a_0 I + a_1 T + \cdots + a_n T^n)v = c(T - r_1 I) \cdots (T - r_m I)v$$

Ma visto che una composizione di funzioni iniettive è iniettiva, almeno una delle applicazioni $T - r_j I$ non è iniettiva. Cioè, T possiede un autovalore.

Osservazione. Si nota che la stessa dimostrazione vale per qualsiasi campo algebricamente chiuso.

La proposizione sequente si trova con essenzialmente la stessa dimostrazione nel testo di Candilera (pagina 313). Il lettore pigro può saltare la dimostrazione giacchè daremo "la stessa" dimostrazione per un risultato più generale in Proposizione 4.

Proposizione 2. *Non-zero autovettori di T per autovalori distinti sono linearmente independente.*

Dimostrazione. Siano $v_1, \ldots, v_m$ autovettori di T che corrispondono rispettivamente agli autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Data una relazione del tipo

$$a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0 \tag{3}$$

si applica l'applicazione lineare $(T - \lambda_2 I) \cdots (T - \lambda_m I)$ ad entrambi parti di equazione (3), e si ottiene

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \cdots (\lambda_1 - \lambda_m)v_1 = 0$$

onde $a_1 = 0$. In modo simile si dimostra che ogni $a_j = 0$. C.V.D.

Oltre la loro interpretazione geometrica ovvia ("direzioni" fisse dalla azione di T), autovettori di T hanno un interpretazione matriciale: se si calcola la matrice $M_B^B(T)$ rispetto una base B che contiene l'autovettore v, allora la colonna che corrisponde a v consiste di zeri tranne nella posizione che giace sulla diagonale principale ove si trova λ, l'autovalore di T che corrisponde a v. Quindi, quando V possiede una base costituita da autovettori la matrice di T rispetto tale base diventa una matrice diagonale, quanto di pi'u semplice si può desiderare. Purtroppo non è sempre il caso che V possiede un tale base, come si vede già nel caso $n = 2$ con l'applicazione lineare $N : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^2$ definita dalla matrice $\binom{0\ 1}{0\ 0}$ rispetto la solita base di C^2. Quest'applicazione lineare ha 0 come un unico autovalore, ma gli autovettori di 0 formano soltanto uno sottospazion di dimensione 1. Per ovviare questo inconveniente si introduce una generalizzazione del concetto di autovettore.

Definizione. Un vettore $v \in V$ si chiama un **autovettore generalizzato** di T se

$$(T - \lambda I)^k v = 0$$

per qualche autovalore λ di T e qualche intero positivo k.

Esercizio A. *La collezione di tutti gli autovettori generalizzati di T che corrispondono ad un autovalore fisso λ costituisce uno sotto-spazio di V.*

Ora si dimostra che la arbitrarietà nella scelta di k nella definizione di autovettore generalizzato è più apparente che reale. Si ricordi che supponiamo che lo spazio V sia dimensione n. Infatti vale

Lemma 3. *La collezione di autovettori generalizzati di T per l'autovalore λ coincide con* $\mathrm{Ker}(T - \lambda I)^n$.

Dimostrazione. È ovvia dalla definizione che la collezione di autovettori generalizzati per λ contiene $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)^n$. Per vedere l'inclusione opposta si tratta di dimostrare che se $(T-\lambda I)^k v = 0$ per qualche $k > n$, allora già $(T - \lambda I)^n v = 0$. Certamente si può supporre che $v \neq 0$. Dunque esiste un intero non-negativo minimo k tale che $(T - \lambda I)^k v = 0$. Basta mostrare che $k \leq n$. Mostriamo che

$$v, (T - \lambda I)v, (T - \lambda I)^2 v, \cdots, (T - \lambda I)^{k-1} v$$

sono linearmente indipendenti. Tale vettori sono in numero k quindi necessariamente $k \leq n$, la dimensione di V. Se si ha

$$a_0 v + a_1(T - \lambda I)v + \cdots + (T - \lambda I)^{k-1} v = 0 \tag{4}$$

allora, si si applica $(T - \lambda I)^{k-1}$ ad entrambi parti di equazione (4) si trova che $a_0 = 0$ (per la minimalità di k). Quindi la prima termine che può davverro compare è $a_1(T - \lambda I)v$. Ma ora si applica $(T - \lambda I)^{k-2}$ ad entrambi parti di equazione (4), e ragionando come prima si conclude che anche $a_2 = 0$. Continuando in questo modo, si conclude che ogni $a_j = 0$. C.V.D.

Ora possiamo dimostrare il risultato principale sugli autovettori generalizzati.

Proposizione 4. *Gli autovettori generalizzati di T generano V.*

Dimostrazione. Si procede per induzione sulla dimensione n di V, il caso $n = 1$ essendo banale. Dunque sia $n > 1$, e supponiamo che il risultato valga per applicazioni lineari su spazi di dimensioni minore di n. Sia λ un autovalore di T. (Per Proposizione 1 un tale λ esiste.) Mostriamo che vale la scomposizione

$$V = \mathbf{Ker}(T - \lambda I)^n \oplus \mathrm{Imm}(T - \lambda I)^n$$

ove gli addendi sono il nucleo ed immagine di $(T-\lambda I)^n$. Per vedere questo controlliamo prima che la somma è diretta, ossia che $\mathbf{Ker}(T - \lambda I)^n \cap \mathrm{Imm}(T - \lambda I)^n = \{0\}$. Se $v \in \mathbf{Ker}(T - \lambda I)^n \cap \mathrm{Imm}(T - \lambda I)^n$ allora $(T - \lambda I)^n v = 0$ e pure esiste $w \in V$ tale che $(T - \lambda I)^n w = v$. Se si applica $(T - \lambda I)^n$ ad entrambi parte di quest'ultima equazione si trova che $(T - \lambda I)^{2n} w = (T - \lambda I)^n v = 0$, onde Lemma 3 dà $(T - \lambda I)^n w = 0$, cioè $v = 0$. Dunque la somma è diretta. Ma $(T - \lambda I)^n$ è un'applicazione lineare da V in V e $\mathrm{dim} V = n$ quindi la somma delle dimensioni di $\mathbf{Ker}(T-\lambda I)^n$ e $\mathrm{Imm}(T-\lambda I)^n$ è uguale alla dimensione di V. Perciò il sottospazio di V generato da $\mathbf{Ker}(T-\lambda I)^n$ e $\mathrm{Imm}(T-\lambda I)^n$ coincide con V. Si nota poi che $\mathbf{Ker}(T-\lambda I)^n \neq 0$ perchè λ è un autovettore di T e da questo e quanto sopra discende che $\dim \mathrm{Imm}(T-\lambda I)^n < n$. Questo ci permette di impiegare l'ipotesi indottiva in V, e lo facciamo in riguardo l'applicazione lineare indotta su $\mathrm{Imm}(T - \lambda I)^n$ da T. Questo è lecito perchè T manda $\mathrm{Imm}(T - \lambda I)^n$ in se stessa: se $v \in \mathrm{Imm}(T - \lambda I)^n$ allora

$$(T - \lambda I)^n (Tv) = T((T - \lambda I)^n v) = T(0) = 0$$

poiche T commuta con $(T - \lambda I)$. Ma l'ipotesi indottiva ci garantisce che gli autovettori generalizzati di T ristretto ad $\mathrm{Imm}(T - \lambda I)^n$ generano $\mathrm{Imm}(T - \lambda I)^n$. Tale autovettori generalizzati sono anche autovettori generalizzati di T considerato come applicazione lineare su V. Quindi il secondo addendo della la somma diretta è generato da autovettori generalizzati di T, e il primo addendo addirittura consiste esclusivamente di autovettori generalizzati di T (quelli con autovalori λ). Quindi, V stesso, essendo generato da due sottospazi ciascuno degli quali è generato da autovettori generalizzati di T è pure esso generato così. C.V.D.

Corollario 5. *Sia V e T come sopra. Se l'unico autovalori di T è 0, allora T è nilpotente, cioè esiste un intero positivo $k \leq n$ tale che $T^n = 0$.*

Dimostrazione. Esercizio B (facile).

La proposizione seguente generalizza Proposizione 2.

Proposizione 6. *Non-zero autovettori generalizzati che corrispondono ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.*

Siano $v_1, \ldots, v_m$ autovettori generalizzati di T che corrispondono ad autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Se si ha una relazione

$$a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0 \tag{5}$$

con numeri complessi $a_1, \ldots, a_m$ vogliamo vedere che ogni a_i deve essere 0. A tale scopo, sia k l'intero positivo più piccolo tale che $(T - \lambda_1 I)^k v_1 = 0$. Se si applica $(T - \lambda_1 I)^{k-1}(T - \lambda_2 I)^n \cdots (T - \lambda_m I)^n$ ad entrambi parte di equazione (5), allora tenendo conto di Lemma 3 si trova che l'unico termine che può sopravivere è quello che coinvolge v_1 che ci dà

$$a_1(T - \lambda_1 I)^{k-1}(T - \lambda_2 I)^n \cdots (T - \lambda_m I)^n(v_1) = 0.$$

Ora si può riscrivere $(T - \lambda_2 I)^n(T - \lambda_3 I)^n \cdots (T - \lambda_m I)^n$ nella forma

$$(T - \lambda_1 I + (\lambda_1 - \lambda_2)I)^n(T - \lambda_1 I + (\lambda_1 - \lambda_3)I)^n \cdots (T - \lambda_1 I + (\lambda_1 - \lambda_m)I)^n,$$

e quando si svilupa $T - \lambda_1 I)^{k-1}$ per questo prodotto ogni termine conterrà $(T - \lambda_1 I)^k$ tranne il termine $(T - \lambda_1)^{k-1}(\lambda_1 - \lambda_2)^n \cdots (\lambda_1 - \lambda_m)^n I$. Ma per ipotesi tale termine non annulla v_1, mentre tutti gli altri termini lo annullano. L'esito di questo calcolo è che necessariamente $a_1 = 0$. Ragionando in modo analogo si conclude che tutti gli $a_i = 0$ per $i = 1, 2, \ldots, m$, ossia che $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti. C.V.D.

Possiamo riassumere e precisare i risultati ottenuti con il seguente teorema.

Teorema 7. *Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ gli autovalori distinti di T e siano $U_1, \ldots, U_m$ gli insiemi di autovettori corrispondenti. Allora si ha*

(a) $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$;

(b) *T manda ciascuno dei U_j in se stesso: $T(U_i) \subset U_i$;*

(c) *Ogni $(T - \lambda_j I)|_{U_j}$ è nilpotente, cioè esiste un intero positivo n_j tale che $(T - \lambda_j I)^{n_j} u = 0$ per ogni $u \in U_j$.*

(d) *Ogni $T|_{U_j}$ (ossia T considerato come applicazione lineare da U_j in se stesso) ha un solo autovalore e tale autovalore è λ_j.*

Dimostrazione. Parte (a) discende subito da Proposizioni 4 e 6.

Per vedere (b), sia $v \in U_j$. Allora $(T - \lambda_j I)^k v = 0$ per qualche intero positivo k, e dunque

$$(T - \lambda_j I)^k (Tv) = T(T - \lambda_j I)^k v = T0 = 0$$

onde $Tv \in U_j$.

Parte (c) discende dalla definizione di un autovettore generalizzato e Lemma 3.

Per dimostrare (d) sia λ' un autovalore di $T|_{U_j}$ con autovettore (non-zero) $v \in U_j$. Allora $T - \lambda_j I)v = (\lambda' - \lambda_j)v$, onde $(T - \lambda_j)^k v = (\lambda' - \lambda_j)^k v$ per ogni intero positivo k. Ma v è un autovalore generalizzato di T che corrisponde all'autovalore λ_j, onde $(T - \lambda_j)^k v = 0$ per qualche intero positivo k. L'unica possibilità dunque è $\lambda' = \lambda_j$. C.V.D.

Ora possiamo introdurre il polinomio minimo di T. Si sa che $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V,V)$ è di dimensione n^2 su $\mathbf{C}$, e perciò esiste un intero positivo **minimo** k tale che

$$I, T, T^2, \ldots, T^k$$

sono linearmente dipendente (come elementi di $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V,V)$, oppure, ciò che è equivalente previa una scelta di base, come matrici $n \times n$ su $\mathbf{C}$. Dunque esistono numeri complessi unicamente determinati tale che

$$a_0 I + a_1 T + \cdots + a_{k-1}T^{k-1} + T^k \equiv 0$$

come applicazione di V in V. (Il fatto che il coefficiente di T^k sia normalizzato ad essere 1 e la minimalità di k inchiodano il polinomio unicamente, come si verifica facilmente.) Il polinomio

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_{k-1}z^{k-1} + z^k$$

si chiama il **polinomio minimo** di T. Per definizione esso è il polinomio unitario (coefficiente di termini più alto uguale 1) di grado minimo tale che $p(T) \equiv 0$. Ora chiariremo il rapporto tra il polinomio minimo e la scomposizione di V in somma diretta di autovettori generalizzati.

Teorema 8. *Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ gli autovalori distinti di T, e siano U_j l'insieme (sotto-spazio) di autovettori generalizzati associati ad λ_j. Siano α_j l'intero positivo minimale tale che $(T - \lambda_j I)^{\alpha_j} v = 0$ per ogni $v \in U_j$. Sia*

$$p(z) = (z - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (z - \lambda_m)^{\alpha_m}.$$

Allora

(a) $p(z)$ è il polinomio minimo di T;

(b) $p(z)$ ha grado al più $n = \mathrm{dimenisione}\, V$;

(c) Se $q(z)$ è un polinomio tale che $q(T) \equiv 0$, allora $q(z)$ è moltiplo di $p(z)$.

Dimostrazione. Dimostriamo (b) per prima. Si osserva che ogni α_j è al più uguale alla dimensione di U_j. Ma $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ e perciò la somma degli α_j, cioè il grado di $p(z)$ è al più $n = \dim(V)$, ciò che dimostra (b).

Ora dimostriamo (c). Sia $q(z)$ un polinomio tale che $q(T) \equiv 0$. Per vedere che $q(z)$ è moltiplo di $p(z)$ basta dimostrare che esso è moltiplo di ogni $(z - \lambda_j)^{\alpha_j}$. A tale scopo, fissiamo un indice j e scriviamo il polinomio $q(z)$ nella forma fattorizzata

$$q(z) = c(z - r_1)^{\delta_1} \cdots (z - r_M)^{\delta_M} (z - \lambda_j)^{\delta}$$

con $c \in \mathbf{C}$ e gli r_j numeri complessi diversi da λ_j, ed gli interi $\delta_i > 0$ mentre $\delta \geq 0$. Se $c = 0$ allora $q(z) \equiv 0$ ed è certamente moltiplo di $p(z)$ (da 0). Quindi supponiamo che $c \neq 0$. Sia $v \in U_j$. Allora pure $(T - \lambda_j I)^{\delta} \in U_j$ (poichè sappiamo che U_j sia stabile sotto l'azione di T ed I). Ma

$$c(T - r_1 I)^{\delta_1} \cdots (T - r_M I)^{\delta_M} (T - \lambda_j I)^{\delta} v = q(T)v = 0$$

mentre $(T - r_1 I)^{\delta_1} \cdots (T - r_M I)^{\delta_M}$ è iniettivo su U_j (perchè l'unico autovalore di $T|_{U_j}$ è λ_j). Quindi si ha $(T - \lambda_j I)^{\delta} v = 0$. Ma questo vale per v arbitrario in U_j, e quindi per definizione di α_j si conclude che $\alpha_j \leq \delta$, onde q è moltiplo di $(z - \lambda_j)^{\alpha_j}$, e vale (c).

A questo punto non è difficile dimostrare (a). Sia $v \in U_j$. Se si commuta il termini di $(T - \lambda_1 I)^{\alpha_1} \cdots (T - \lambda_m I)^{\alpha_m}$ di modo che la prima a destra sia $(T - \lambda_j I)^{\alpha_j}$ si conclude che $p(T)(v) = 0$. Ma gli $U_1, \ldots, U_m$ generano V quindi $p(V) = (0)$. Dunque $p(z)$ è un polinomio unitario (coefficiente conducente =1) che annulla T, ossia tale che $p(T) = 0$ come operatore su V. Ma da (c) non ¸e polinomio di grado minore di $p(z)$ che ha tale proprietà. Quindi $p(z)$ deve essere il polinomio minimo di T. C.V.D.

Definizione. La **molteplicità** di un autovalore λ di T è la dimensione dello sotto-spazio di V costituito dagli autovettori generalizzati che corrispondono a λ.

Dalla definizione discende subito da Teorema 7 (a) che la somme delle molteplicità di tutti gli autovalori di T coincide con la dimensione di V. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ gli autovalori distinti di T, e siano $\beta_1, \ldots, \beta_m$ le molteplicità corrispondenti. Allora

Definizione. Il polinomio caratteristico di T è il polinomio

$$(z - \lambda_1)^{\beta_1} \cdots (z - \lambda_m)^{\beta_m}$$

A questo punto (e con questo approccio) il celebre Teorema di Cayley-Hamilton diventa facile.

Teorema 9 (Cayley-Hamilton). *Sia $q(z)$ il polinomio caratteristico di T. Allora $q(T) = 0$.*

Dimostrazione. Con gli U_j, α_j e β_j come sopra, abbiamo visto che $\alpha_j \leq \beta_j$ per ogni j. Quindi il polinomio caratteristico è moltiplo del polinomio minimo, e perciò deve annullare T. C.V.D.

Ora possiamo ottenere un tipo di "forma canonica" semplice per un'applicazione lineare $T : V \longrightarrow V$. Il primo caso è quello di un'applicazione nilpotente.

Lemma 10. *Sia $T : V \longrightarrow V$ nilpotente ($T^n = 0$). Allora esiste una base B di V tale che $[T] = M_B^B(T)$ soddisfa*

$$[T]_{ij} = 0 \quad \text{per } i \geq j,$$

cioè $[T]$ ha solo zeri su e sotto la diagonale principale.

Dimostrazione. Si scelga una base per $\operatorname{Ker} T$. Poi si aggiungano vettori tale da costituire una base di $\operatorname{Ker} T^2$, poi per $\operatorname{Ker} T^3$ e cosìvia,fino ad arrivare ad una base per $V = \operatorname{Ker} T^n$. È chiaro che la matrice di T rispetto tale base ha la forma cercata. (Se non è chiaro, è un Esercizio!). A questo punto la "forma canonica triangolare superiore" per la matrice di un'applicazione lineare arbitraria su uno spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ è una conseguenza facile di quanto sopra.

Teorema 11(Forma Triangolare). *Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ gli autovaloridistinti di $T : V \longrightarrow V$. Allora esiste una base per lo $\mathbf{C}$-spazio vettoriale V rispetto alla quale la matrice di T assume la forma*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & A_m \end{pmatrix}$$

ove A_j è una matrice del tipo

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & * & \ldots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

di dimensione uguale a $\dim U_j$.

Dimostrazione. Questo discende subito dal lemma precedente, ed il fatto che $(T - \lambda_j)|_{U_j}$ è nilpotente per Teorema 7 (c). C.V.D.

Teorema 11 è una versione debole della forma canonica di Jordan per trasformazione su spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbf{C}$. Avremo occasione di ritornare a questo punto.

Il teorema spettrale

Il teorema citato sopra ha nulla a che fare con gli spiriti maligni, ma descrive la struttura di operatori normali in termini dei loro spettri, cioè l'insieme dei loro autovalori. Supponiamo ora che lo spazio V sia dotato di un prodotto scalare, ossia una forma Hermitiana definita positiva, come discusso in classe, e che scriviamo nella forma $\langle v, w \rangle$. Si ricorda che **l'aggiunta** di un'applicazione lineare $T : V \longrightarrow V$ è l'operatore T^* definito da $\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle$. In termini matriciali questo corrisponde al passagio da la matrice di T alla trasposta del coniugata di tale matrice. L'applicazione T è detto **auto-aggiunta** se $T = T^*$ e **normale** se T commuta con T^*, cioè se $TT^* = T^*T$. È chiaro che applicazioni auto-aggiunte sono normali.

Esercizio. Identificare le applicazione normali e quelle auto-aggiunte nel caso in cui $\dim V = 1$.

Lemma 12. *Se T è normale allora $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^* A$.*

Dimostrazione. Se T è normale e $v \in V$ si ha

$$\langle Tv, Tv \rangle = \langle T^* T v, v \rangle = \langle TT^* v, v \rangle = \langle T^* v, T^* v \rangle$$

Dunque $Tv = 0$ se e solo se $T^*v = 0$.

Esercizio. Con la considerazione di matrici 2×2 appropriate, dare un esempio di due operatori normali S e T su uno spazio normato (hermitiano) tale che $S + T$ non sia normale. Mostrare invece che se T è normale lo è pure $T - \lambda I$ per ogni scelta di λ. Trovare condizioni necessarie e sufficienti acchè la somma di S e T sia normale.

Proposizione 13. *Ogni autovettore generalizzato di un operatore normale è un autovettore nel senso stretto dell'operatore.*

Proposizione 14. *Autovettori di un operatore normale che corrispondono ad autovalori distinti sono ortogonali (rispetto la forma hermitiana per la quale l'operatore è normale).*

Dimostrazione. Siano λ ed α autovalori distinti di un operatore normale T con autovalori u e v rispettivamente. Dunque, $(T - \lambda I)v = 0$ ci cà anche $T^* - \overline{\lambda} I)v = 0$ per Lemma 12 applicato ad $T - \lambda I$. Perciò v è un autovettore di T^* con autovalore $\overline{\lambda}$. Ora un calcolo mostra che

$$\begin{aligned}
(\alpha - \lambda)\langle u, v\rangle &= \langle \alpha u, v\rangle - \langle u, \overline{\lambda} v\rangle \\
&= \langle Tu, v\rangle - \langle u, T^* v\rangle \\
&= \langle Tu, v\rangle - \langle Tu, v\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Quindi, $\langle u, v\rangle = 0$. C.V.D.

Proposizione 15. *Lo spazio V ammette una base ortonormale costituita da autovettori di T se e solo se T è operatore normale.*

Dimostrazione. Supponiamo che ci sia una base di vettori ortonormali costituita di autovettori di T. Rispetto tale base la matrice di T diventa diagonale. La matrice di T^* si ottiene tramite la trasposta della matrice dei coniugati degli elementi della matrice di T, onde anche essa è diagonale. Ma si verifica facilemente che il prodotto di matrici diagonali è commutativo, quindi T e T^* commutano, cioè T è normale.

Viceversa, sia T operatore normale. Per ogni autovalore di T si sceglie (Gram-Schmidt!!) una base ortonormale per la collezione di autovettori associati. L'unione di questi basi rimane una collezione ortonormale, perchè autovettori per autovalori distinti sono ortogonale (grazie a Proposizione 14). Inoltre giacchè $U_1 \oplus \cdots \oplus U_m = V$ tale unione costituisce una base di V. C.V.D.

Esercizi del 26-04-01
Esempi di autovettori generalizzati

Usando le cifre del numero di matricola e dati anagrafici crea una successione di 6 interi positivi $s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6$ tutti diversi da zero, e tale che s_2, s_4 e s_6 sono a due a due distinti (ma s_1, s_3 ed s_5 non sono necessariamente distinti). Esempio: se il numero di matricola è 450702 e i dati anagrafici sono 04 06 81, allora la successione sarebbe 457246, le cifre 5, 2, e 6 essendo distinti fra di loro.

1. Scrivere la tua successione di 6 numeri: $s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6$. Sia V lo spazio vettoriale di tutte le funzioni della forma

$$V = \left\{ f_1(t)e^{s_2 t} + f_3(t)e^{s_4 t} + f_5(t)e^{s_6 t} \right\}$$

ove $f_i(t)$ è un polinomio con coefficienti complessi in t di grado al più s_i. Verificare (velocemente) che V è spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ Calcolare la dimensione dello spazio V in quanto $\mathbf{C}$-spazio vettoriale, verificare che $D = d/dt$ è un applicazione lineare che manda V in V e calcolare la matrice dell'operatore $D = d/dt : V \longrightarrow V$. (Si fa la derivata formalmente come avete sempre fatto.) Trovare gli 3 autovalori di questa applicazione, e gli spazi di autovettori generalizzati che corrispondo ad essi. Scrivere un'equazione differenziale omogeneo di grado $s_1 + s_3 + s_5 + 3$ di cui ogni elemento di V è una soluzione.