Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

I° **foglio di esercizi**

ESERCIZIO 1. Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha

(a) $2x - 7 = |x + 1|$;
(b) $|4x + 5| = |8x - 3|$;
(c) $|x - 3|^2 - 4|x - 3| > 12$;
(d) $1 - x < (1 - |x|)^2$;
(e) $\sqrt{(3x - 2)^2} = 2 - 3x$;
(f) $\left|\dfrac{x + 5}{2 - x}\right| < 6$;
(g) $\dfrac{x - 1}{x + 2} < \dfrac{2x + 1}{x + 1}$;
(h) $|x - |x|| \geq 1$;
(i) $\dfrac{|x| - x}{x^2 - |x| + 2} < 1$;
(j) $\log\left|\dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right| < 0$;
(k) $\log\left|\dfrac{x - 1}{x^2 + 1}\right| < 0$;
(l) $\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} > 0$;
(m) $\sqrt{\cos x - \sin x} > 1$;
(n) $0 < \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \leq 1$.
(o) $\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x + \cos x} \leq 0$.

ESERCIZIO 2. Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha

(a) $\sin 2x + \sin 4x = 0$;
(b) $\operatorname{tg} 2x - 2\cos x = 0$;
(c) $\cos^2 2x - \cos^2 x = 0$;
(d) $\sin 2x(2\sin x - 1) = 2\cos x$;
(e) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} + x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} - x) + 4$;
(f) $\sin(\frac{2\pi}{3} + x) + \sin(\frac{\pi}{3} - x) = 1$;
(g) $\sin x > 2\cos^2 x - 1$;
(h) $\sin 3x = 1 - 3\sin x - \cos 2x$.

ESERCIZIO 3. Si indichino con t_C e t_F le misure della temperatura fatte rispettivamente in gradi Celsius e Fahrenheit. Sapendo che

	t_C	t_F
ghiaccio fondente	0	32
ebollizione	100	212

si scrivano la funzione lineare che esprime t_F in funzione di t_C e la sua inversa. Si esprima in gradi Fahrenheit la temperatura umana normale (36.5^oC).

ESERCIZIO 4. Si disegnino i seguenti sottoinsiemi del piano $\mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
&(a)\ \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x+y}{x-y} \geq 0 \right\};\\
&(b)\ \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{y-x^2}{x+y} > 0 \right\};\\
&(c)\ \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y<0,\ x^2+y^2=1 \right\};\\
&(d)\ \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy \geq \tfrac{1}{2},\ x^2+y^2=1 \right\};\\
&(e)\ \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \sin x - y \leq 0,\ y \leq 2 \right\};\\
&(f)\ \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \cos x \leq y \leq \sin x + 2 \right\};\\
&(g)\ \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x \leq y \leq 2\sin(x-3),\ x \in [0,5] \right\}.
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 5. Si Considerino i sottoinsiemi del piano

$$
S_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x>0, y < \frac{1}{2x} \right\} \qquad \text{ed} \qquad S_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 < y < \sqrt{x} \right\}
$$

e si disegni nel piano il sottoinsieme $S_1 \cap S_2$.

ESERCIZIO 6. Per ciascuna delle seguenti disuguaglianze, si determini un intero n_0 tale che la disuguaglianza sia soddisfatta per $n > n_0$.

$$
\begin{aligned}
&(a)\ \left| \frac{2n}{2n-1} - 1 \right| < 0.01;\\
&(b)\ \left| \frac{3n^2+4}{2n^2+1} - \frac{3}{2} \right| < 0.01;\\
&(c)\ \left| \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right| < 0.01.
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 7. Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ è definita la funzione

$$
(x - \sin x)^{\sin x}.
$$

ESERCIZIO 8. Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ è definita la funzione

$$
\log(\log(\cos x + \sin x)).
$$