Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

X foglio esercizi

Esercizio 1. Determinare le equazioni parametriche della retta, o delle rette, ρ in $\mathbb{R}^3$ che verifica le condizioni degli esempi seguenti.

(1) ρ è parallela ai piani $x - 2y - z + 2 = 0$ e $2x - 2y + 1 = 0$ e passante per $P_0(1, 1, 0)$.

(2) ρ è parallela al piano $\sigma_1 : x + y + z = 0$, è contenuta in $\sigma_2 : x + y - z = 0$ e la sua distranza dall'origine vale 2.

(3) ρ è contenuta nel piano $2x - 2y + z - 1 = 0$, passa per il punto $P_0(1, 1, 1)$ ed è perpendicolare a $\rho' : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$

(4) ρ è perpendicolare alla retta $\rho' : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$, è equidistante dai piani $x - y + 2 = 0$ e $x - y - 3 + 0$, e interseca ρ'.

(5) ρ passa per il punto di intersezione delle rette $\rho' : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ e $\rho'' : \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ ed è perpendicolare a queste rette.

(6) ρ passa per l'origine, è contenuta nel piano xy, e forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con la retta ρ'' dell'esempio precedente.

(7) ρ forma un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con il piano xy e con il piano yz, e passa per il punto $P(1, 0, 1)$.

Esercizio 2. Determinare l'equazione cartesiana del piano, o dei piani, σ che verifica le condizioni degli esempi seguenti.

(1) σ contiene i punti $P_0(0, 1, 1)$, $P_1(1, 3, 3)$, e $P_2(3, 0, 0)$.

(2) σ è perpendicolare alla retta $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ e passa per $P(1, 2, 3)$.

(3) σ contiene la retta $\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ ed è parallelo al segmento P_0P_1, dove P_0 e P_1 hanno rispettivamente coordinate $(1, 1, 2)$ e $(3, 0, 2)$.

(4) σ è parallelo alle rette $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 3 \end{cases}$, ed è equidistane da esse.

(5) σ forma un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con il piano $x - z = 0$ e contiene la retta $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

(6) σ è equidistante dai punti $P(0, 2, 1)$ e $Q(2, 0, -1)$ ed inclinato di $\frac{\pi}{4}$ rispetto al segmento PQ.

Esercizio 3. Determinare l'insieme delle coppie $(P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2))$ dove P_1 e P_2 sono punti della retta $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ equidistanti dal piano $x = 1$.

Esercizio 4. Data la retta $\rho : \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ e i punti $P_1(-1, 4, 0)$ e $P_2(1, 1, 1)$, determinare i punti P di ρ tali che il triangolo P_1P_2P ha area k, dove k è una costante positiva.

Esercizio 5. Date le rette $\rho_1 : \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ e $\rho_2 : \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$, determinare un segmento P_1P_2 perpendicolare a ρ_1 e a ρ_2, con $P_1 \in \rho_1$ e $P_2 \in \rho_2$.

Esercizio 6. Si determinino i punti P_1 e p_2, appartenenti alla retta $\rho : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ aventi distanza 2 dall'intersezione di ρ con il piano $\sigma : x + y - 2z + 1 = 0$. Si determini inoltre la retta passante per le proiezioni ortogonali di P_1 e P_2 su σ.

Esercizio 7. Dati i vettori $\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, determinare le componenti del vettore $3\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} + 2\mathbf{e_3}$ nella base $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_1} \times \mathbf{u_2})$.

Esercizio 9. Trovare una base ortonormale $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3})$ di E^3 in cui $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$ siano paralleli al piano xy e inclinati di $\frac{\pi}{3}$ rispetto a $\mathbf{e_1}$ e $\mathbf{e_2}$. Dato il vettore di componenti $2, 1, 2$ nella base canonica, determinarne le componenti nella base $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3})$.

Esercizio 9. Per ognuna delle matrici seguenti, determinare gli autovalori e i relativi spazi di autovettori dell'endomorfismo ϕ di tale matrice nella base canonica.

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10. Per ognuna delle matrici seguenti, dire se l'endomorfismo ϕ di tale matrice nella base canonica è diagonalizzabile.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 11. Si determini $a \in \mathbb{R}$ in modo che che il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia autovettore della matrice $\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Sostituito il valore ricavato in tale matrice, se ne determinino gli autovalori e i relativi spazi di autovettori.