Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

V^o foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{se } x \in [-4, 4] \\ ax^2 & \text{se } |x| > 4 \end{cases}$$

Si determini il valore di a per cui la funzione f risulti continua su tutto $\mathbb{R}$ e si disegni un grafico indicativo dell'andamento di f.

ESERCIZIO 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 1 & \text{se } x < -2 \\ a - (x+1)^2 & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$$

Si determini il valore di a per cui la funzione f risulti continua su tutto $\mathbb{R}$ e si disegni un grafico indicativo dell'andamento di f.

ESERCIZIO 3. Ricordando che, per $x \in (0, \frac{\pi}{4})$, si ha $0 < \sin x < x$, si deduca da ciò che

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0.$$

Si mostri che, per ogni numero reale x_0 fissato, si ha[†]

$$\lim_{x \to x_0} (\sin x - \sin x_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} (\cos x - \cos x_0) = 0.$$

Si deduca da ciò la continuità delle funzioni trigonometriche su tutta la retta reale.

ESERCIZIO 4. Si mostri che $\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$ e si deduca da ciò il $\lim_{x \to 0^+} x^x$.

ESERCIZIO 5. Si calcolino i limiti

$$(a)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4 - 2x^2 + 4x\sqrt[3]{x}}{2x^4 - \sqrt[3]{x^{10}}};$$

$$(b)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{4x\sqrt[3]{x} - x}{\sqrt[3]{2x^4} + 1};$$

$$(c)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}};$$

$$(d)\ \lim_{x \to 0} \frac{x \log(1-x)}{\sin x};$$

$$(e)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{3 \log x}{2\sqrt[3]{x^2}};$$

$$(f)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{3 \cos x}{5\sqrt[5]{x^3}};$$

$$(g)\ \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2};$$

$$(h)\ \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x;$$

$$(i)\ \lim_{x \to 0} \frac{\log_{10}(1+x)}{x};$$

$$(j)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{3 - 2x}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$(k)\ \lim_{x \to 0} 2^{\frac{\sin 2x}{\sin 3x}};$$

(†) Si usino le formule di prostaferesi per le funzioni trigonometriche.