Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

VI^o foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. *[Maturità Scientifica 1988] Si dimostri, avvalendosi della definizione di derivata come limite del rapporto incrementale al tendere a zero dell'incremento della variabile indipendente, che la derivata della funzione $f(x) = \sin^3 x$ è la funzione $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x$ e si generalizzi la questione per la funzione $f(x) = \sin^n x$ con n intero positivo*$^{(\dagger)}$.

Svolgimento. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{se } x \in [-4, 4] \\ ax^2 + c & \text{se } |x| > 4 \end{cases}$$

Si determini il valore di a per cui la funzione f risulti continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e si disegni un grafico indicativo dell'andamento di f.

Svolgimento. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo*

$$f(x) = \begin{cases} b - ax & \text{se } x < 0 \\ e^{2x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Si determinino a e b affinchè la funzione f risulti continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e si disegni un grafico indicativo dell'andamento di f.

Svolgimento. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo*

$$f(x) = \begin{cases} a(x-3)^2 - 1 & \text{se } x > 2 \\ b - (x-1)^2 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

Si determinino i valori di a e b per cui la funzione f risulti continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e si disegni un grafico indicativo dell'andamento di f.

Svolgimento. La funzione è continua e derivabile se $x \neq 2$ per qualsiasi valore di a e b, perchè i due rami sono polinomi di secondo grado nella variabile x. In base alla definizione della funzione f, si ha

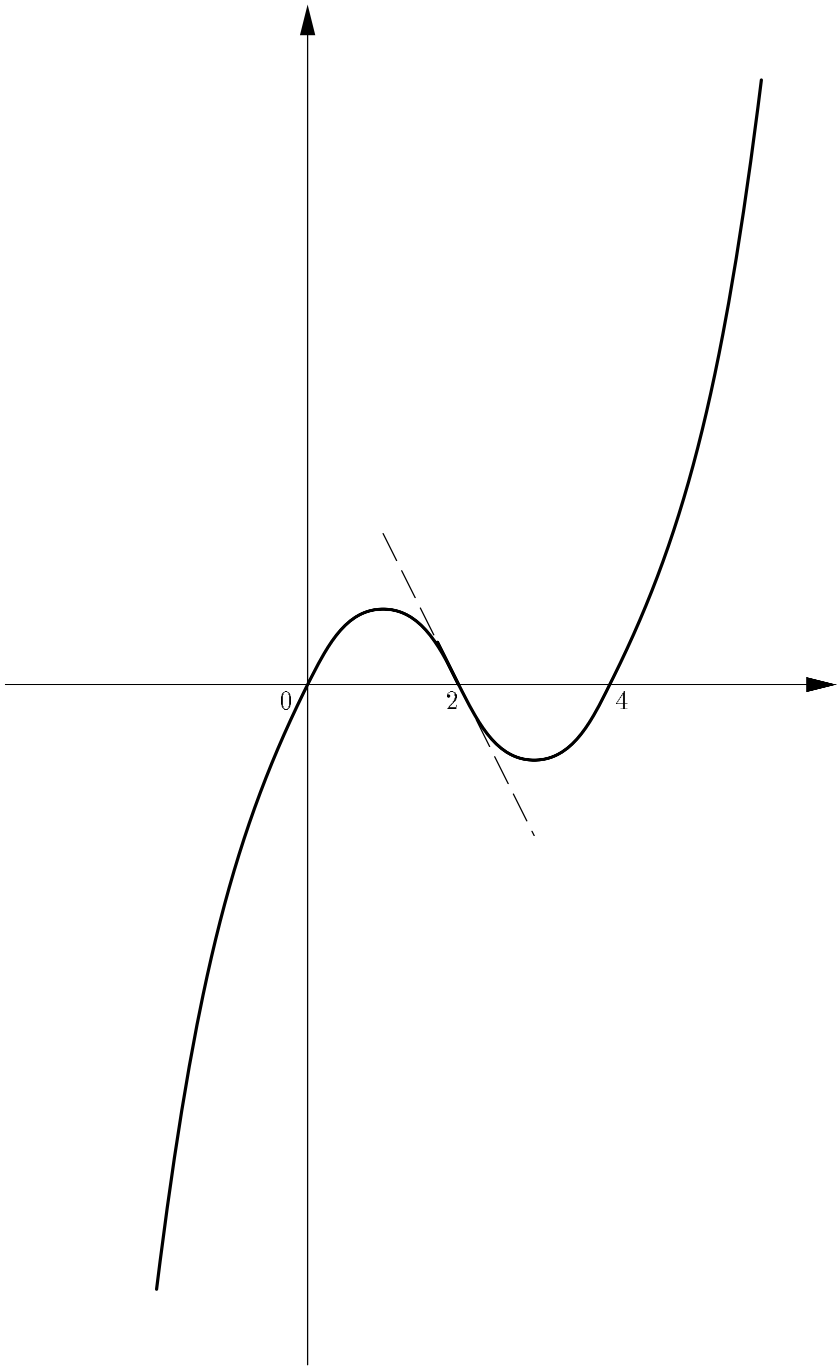
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = a - 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = b - 1.$$

Dunque f è continua nel punto $x = 2$ (e quindi su tutta la retta reale) se, e solo se, $a - 1 = f(2) = b - 1$, ovvero se, e solo se, $a = b$. Sotto tale ipotesi, il limite del rapporto incrementale di f coincide in ogni punto con il limite della derivata di f (Regola di de L'Hôpital). Osservando che

$$f'(x) = \begin{cases} 2a(x-3) & \text{se } x > 2 \\ -2(x-1) & \text{se } x < 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{matrix} \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = -2a \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = -2 \end{matrix}$$

$^{(\dagger)}$ Si usi l'identità $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

si conclude che f è continua e derivabile su tutta la retta reale se, e solo se, $a = b = 1$. Il grafico di f è quindi



Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 5. *Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & se\ x < 1 \\ x^2 + bx + c & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

Si determinino i valori di b e c per cui la funzione f risulti continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e si disegni un grafico indicativo dell'andamento di f.

Svolgimento. $\square$

ESERCIZIO 6. *Si consideri la funzione $f(x) = e^{3x}\cos 3x$. Si mostri che la derivata prima di f si può scrivere nella forma $ke^{3x}\cos(3x+\alpha)$, ove $k > 0$ ed $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ sono opportune costanti da determinarsi esplicitamente. Si mostri che la derivata seconda di f si può scrivere nella forma $he^{3x}\cos(3x+2\alpha)$, ove $h > 0$ ed α è la costante che compare nella formula della derivata prima.*

Svolgimento. $\square$

ESERCIZIO 7. *Si determini l'insieme ove la funzione $f(x)$ è derivabile e se ne calcoli la derivata prima*

$$
\begin{aligned}
&(a)\ f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}};\\
&(b)\ f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}};\\
&(c)\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}};\\
&(d)\ f(x) = \log\frac{1}{x^2};\\
&(e)\ f(x) = \log(\operatorname{tg} x);\\
&(f)\ f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right);\\
&(g)\ f(x) = \sin(e^{x^2});\\
&(h)\ f(x) = x2^x;\\
&(i)\ f(x) = \frac{e^x}{\cosh x};\\
&(j)\ f(x) = \sin x\log(\sin x);\\
&(k)\ f(x) = \cos(x^2);\\
&(l)\ f(x) = (\cos x)^2.
\end{aligned}
$$

Svolgimento. $\square$

ESERCIZIO 8. *In ciascuno dei casi seguenti, si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel punto di ascissa $x = 1$.*

$$
\begin{aligned}
&(a)\ f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}};\\
&(b)\ f(x) = \frac{1}{2x+1};\\
&(c)\ f(x) = x - \frac{1}{x};\\
&(d)\ f(x) = \log\frac{1}{x^2};\\
&(e)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}};\\
&(f)\ f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-2};\\
&(g)\ f(x) = e^{x^2};\\
&(h)\ f(x) = x2^{-x}.
\end{aligned}
$$

Svolgimento. □

ESERCIZIO 9. *Si studino le funzioni che compaiono nei testi degli esercizi precedenti e si tracci per ciascuna un grafico indicativo.*

Svolgimento. □

ESERCIZIO 10. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathscr{C}^2$ in (a, b). Si mostri che f ha un minimo relativo (risp. un massimo relativo) in $x_0 \in (a, b)$ se $f'(x_0) = 0$ ed $f''(x_0) > 0$ (risp. se $f'(x_0) = 0$ ed $f''(x_0) < 0$).*

Svolgimento. Sia $f''(x_0) > 0$. Poichè la derivata seconda di f è continua esiste un numero reale $\delta > 0$ per cui $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ [Teorema di permanenza del segno]. Quindi, sull'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ la derivata prima di f è una funzione crescente (in senso stretto) che si annulla in x_0. Dunque, deve essere $f'(x) < 0$ per $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ed $f'(x) > 0$ per $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ e perciò deve essere f decrescente in $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ed f crescente in $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ e da ciò si conclude che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ovvero che x_0 è un punto di minimo relativo per f.

Il ragionamento è analogo nel caso di un massimo relativo ed è lasciato al lettore. □

ESERCIZIO 11. *Ricordiamo che una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ si dice convessa nel punto $x_0 \in (a, b)$, se è derivabile in x_0 ed esiste un intervallo centrato in x_0 in cui il grafico della funzione resta al di sopra della retta tangente in x_0; ovvero esiste $\delta > 0$ per cui $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$*(†).

(a) *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathscr{C}^2$ in (a, b). Si mostri che f è convessa in $x_0 \in (a, b)$ se la differenza $d(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$ ha un minimo relativo in x_0, e quindi se $f''(x_0) > 0$.*

(b) *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathscr{C}^2$ in (a, b). Si mostri che f è concava in $x_0 \in (a, b)$ se la differenza $d(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$ ha un massimo relativo in x_0, e quindi se $f''(x_0) < 0$.*

(c) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e di classe $\mathscr{C}^2$ in (a, b). Si mostri che se f è convessa in ogni punto di (a, b) allora il grafico di f in $[a, b]$ sta al di sotto della retta per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$; ovvero si ha $f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) - f(a) \leq 0$ per ogni $x \in [a, b]$.*

Svolgimento. (a). Il grafico di f sta al di sopra della retta tangente in x_0 sull'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se, e solo se, $d(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0) \geq 0$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Poichè $d(x_0) = 0$, ciò significa esattamente che x_0 è un punto di minimo relativo per d. Osserviamo che $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ e $d''(x) = f''(x)$ per ogni $x \in (a, b)$; quindi, per l'esercizio precedente, d ha un minimo relativo in x_0 se $d''(x_0) = f''(x_0) > 0$.

(b). Il ragionamento è analogo a quanto appena esposto.

(c). Poichè f è convessa in ogni punto di (a, b), deve aversi $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Consideriamo ora la differenza

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a) \qquad \text{per} \quad x \in [a, b]$$

e si osservi che $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ed $\varphi''(x) = f''(x)$ per ogni $x \in (a, b)$. Allora la funzione ϕ' è monotona crescente in (a, b) e si annulla in un punto $c \in (a, b)$ [Teorema del valor medio (Lagrange)]. Quindi φ è decrescente in (a, c) e crescente in (c, b), ed essendo $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$, si conclude che $\varphi(x) \leq 0$ per ogni $x \in [a, b]$ ovvero che il grafico della funzione f sta al di sotto della retta dell'enunciato. □

(†) Analogamente, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ si dice *concava* nel punto $x_0 \in (a, b)$, se è derivabile in x_0 ed esiste un intervallo centrato in x_0 in cui il grafico della funzione resta al di sotto della retta tangente in x_0; ovvero esiste $\delta > 0$ per cui $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.