Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

VII° foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. Si calcolino

$$(a)\ \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{1/\sin^2 x};$$

$$(b)\ \lim_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}^2 x)^{1/(1-\cos x)};$$

$$(c)\ \lim_{x\to+\infty} x^2\left|\tfrac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x-\tfrac{1}{x}\right|;$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\log(1+x)+1-x-\cos x};$$

$$(e)\ \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2\log(1-\sin x)}}{\sin\sqrt{|x|^3}};$$

$$(f)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x)+\sin x-1+\cosh x}{\sin x-\sinh x};$$

$$(g)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{x^2}+\frac{3}{2}x\sinh x}{[\log(1-x)]^4};$$

$$(h)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cosh x-e^{x^2}+\frac{1}{2}x\sin x}{[\log(1+x)]^4};$$

$$(i)\ \lim_{x\to+\infty} x^4\left(2e^{1/x^2}-2\cosh\tfrac{1}{x}-\frac{\sin(1/x)}{x}\right);$$

$$(j)\ \lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x-\sinh x}{x^3-\sin x(\cos x-\cosh x)};$$

$$(k)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+x^2)-x^2}{\sin^4 x};$$

$$(l)\ \lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}-2\cos x-3\sinh x}{\mathrm{tg}^4 x};$$

$$(m)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{tg}x\sqrt{x(1-\cos x)}}{(\cosh x-1)\sqrt{\log(1+x)}};$$

$$(n)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1-x^2)\sqrt{x-\sin x}}{(\sinh x-x)\sqrt{\mathrm{tg}x}};$$

$$(o)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\log(1+x)\cosh x}{x^2\log(1-x)};$$

ESERCIZIO 2. Si consideri la funzione

$$F(x)=\int_0^x\left(\frac{t^2-1}{t+2}\right)^2 dt$$

al variare di x in $(-1,1)$. Si determinino i coefficienti del polinomio $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, tale che

$$P(0)=0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-P(x)}{x^3}=0.$$

ESERCIZIO 3. Si consideri la funzione

$$F(x)=\int_0^x\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^3 dt$$

al variare di x in $(-1,1)$. Si determinino i coefficienti del polinomio $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, tale che

$$P(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - P(x)}{x^3} = 0.$$

ESERCIZIO 4. Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_1^x \frac{2t^2 - \sqrt{t} - 1}{\sqrt{t} + 2} dt$$

al variare di x nella semiretta $[0, +\infty)$. Si determinino i coefficienti del polinomio $P(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3$, tale che

$$\lim_{x \to 1} \frac{F(x) - P(x)}{(x-1)^3} = 0.$$

ESERCIZIO 5. Si calcolino

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{\sin^2(t)}{t} dt}{\displaystyle\int_0^x [1 - \cos t + 2\log(1+t)] dt} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0+} \frac{\displaystyle\int_0^x [\mathrm{tg}^2 t + 2e^t - 2] dt}{\displaystyle\int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt}.$$

ESERCIZIO 6. Si calcolino

(a) $\displaystyle\int_1^2 x^{-2} dx;$

(b) $\displaystyle\int_2^5 \sqrt{x-1} dx;$

(c) $\displaystyle\int_1^6 (3x+1)^{-1/2} dx;$

(d) $\displaystyle\int_0^1 (2 - x^2)^2 dx;$

(e) $\displaystyle\int_2^4 \frac{2x}{x-1} dx;$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg} x}{1+x^2} dx;$

(g) $\displaystyle\int_0^1 x e^{-x^2} dx;$

(h) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx;$

(i) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx;$

(j) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x} dx;$

(k) $\displaystyle\int_{e^{-2}}^{e^{-1}} \frac{1}{x \log x} dx;$

(l) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx;$

(m) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx;$

(n) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx;$

ESERCIZIO 7. Siano $f(t) = 2t^2 - t + 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ ed F una primitiva di f. Se $F(0) = 2$, si calcoli $F(2)$.

ESERCIZIO 8. Data la funzione

$$F(x) = \int_0^{2x} e^{-t^2} dt$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, si calcoli $F'(x)$.