Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

$VIII^o$ foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. Si calcolino

$$(a)\quad \int_3^{+\infty} 4\frac{5-x}{x^3-12x+16}\,dx;$$

$$(b)\quad \int_5^{+\infty} 4\frac{x-2}{x^3-12x-16}\,dx;$$

$$(c)\quad \int_1^{+\infty} \frac{2e^x-e^{2x}}{1-e^{3x}}\,dx;$$

$$(d)\quad \int_2^{+\infty} \frac{e^x-4}{e^{2x}-e^{-x}}\,dx;$$

$$(e)\quad \int_3^{+\infty} \frac{5x-2}{x^3-x^2-4x+4}\,dx;$$

$$(f)\quad \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{[x]!}\,dx;$$

$$(g)\quad \int_1^{2} x\log(x-1)\,dx;$$

$$(h)\quad \int_2^{+\infty} \frac{x-3}{x^3-x}\,dx.$$

ESERCIZIO 2. Si dica per quali valori del parametro α converge l'integrale

$$(a)\quad \int_1^{+\infty} x^\alpha\left(\frac{1-\cosh(1/x)}{\sqrt{1/x}-\log(1+\sqrt{1/x})}\right)dx;$$

$$(b)\quad \int_1^{+\infty} x^\alpha\left(\frac{1-\cos(1/x)}{\operatorname{tg}\sqrt{1/x}-\sqrt{1/x}}\right)dx;$$

$$(c)\quad \int_1^{+\infty} x^\alpha\left(\frac{1-e^{-1/x^2}}{\sin\sqrt{1/x}}\right)dx;$$

$$(d)\quad \int_0^{+\infty} \left(\alpha+\tfrac{1}{x}\right)^x dx;\qquad (\alpha>0)$$

$$(e)\quad \int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\left(1+\tfrac{\alpha}{x}\right)^x dx;$$

$$(f)\quad \int_1^{+\infty} e^{\frac{x^2\alpha}{x+\alpha(\alpha-1)}}\,dx;$$

$$(g)\quad \int_1^{+\infty} \left|\tfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x-\tfrac{1}{x}\right|^\alpha dx;$$

$$(h)\quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2+\log x}{(x+\cos x)^\alpha}\,dx;$$

$$(i)\quad \int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha(1-x)^\alpha}\,dx.$$

ESERCIZIO 3. [*Maturità Scientifica 1987*] In un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy si consideri la funzione $y=\sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$ e se ne disegni il grafico. Considerato l'arco AB della curva, A essendo il punto di flesso e B quello a tangente parallela all'asse delle ordinate, si determini il volume del solido ottenuto dalla rotazione della regione finita di piano compresa tra l'arco AB, la retta OA e l'asse delle ascisse, di un intero giro attorno alla asse medesimo.

ESERCIZIO 4. Si disegni nel piano cartesiano il sottoinsieme

$$S=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\le x\le 1,\ \frac{1}{1+x^2}\le y\le \tfrac{1}{2}\sqrt{4-3x}\,\right\}.$$

Si calcolino l'area di S ed il volume del solido che si ottiene ruotando l'insieme S attorno all'asse delle ascisse.

ESERCIZIO 5. Si disegni nel piano cartesiano il sottoinsieme

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 2,\ \tfrac{x}{1+x} \leq y \leq 1 - x + \tfrac{x^2}{2} \right\}.$$

Si calcolino l'area di S ed il volume del solido che si ottiene ruotando l'insieme S attorno all'asse delle ascisse.

ESERCIZIO 6. Si disegnino i sottoinsiemi del piano cartesiano così definiti

$$D_1 = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 < x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^{-\frac{1}{3}} \end{array} \right\} \quad \text{e} \quad D_2 = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \leq y \leq 1 \\ 1 \leq 2x \leq 5 - 3y^2 \end{array} \right\}$$

e si determini il volume del solido ottenuto ruotando l'insieme $D_1 \cup D_2$ attorno all'asse orizzontale.

ESERCIZIO 7. Si disegnino i sottoinsiemi del piano cartesiano così definiti

$$D_1 = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 < x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^{-\frac{1}{4}} \end{array} \right\} \quad \text{e} \quad D_2 = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \leq y \leq 1 \\ 1 \leq x \leq 3 - 2y^2 \end{array} \right\}$$

e si determini il volume del solido ottenuto ruotando l'insieme $D_1 \cup D_2$ attorno all'asse orizzontale.

ESERCIZIO 8. Si enunci il cosiddetto 'criterio dei carabinieri' per i limiti di successioni e si mostri come si possa utilizzarlo per calcolare il limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita ricorsivamente ponendo

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\pi}{4} \\ a_{n+1} = \displaystyle\int_0^{a_n} \frac{\sqrt{x^3}[1 - \cos(x^2)]}{2 + \sin x}\, dx. \end{cases}$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge?

ESERCIZIO 9. Si enunci il cosiddetto 'criterio dei carabinieri' per i limiti di successioni e si mostri come si possa utilizzarlo per calcolare il limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita ricorsivamente ponendo

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\pi}{4} \\ a_{n+1} = \displaystyle\int_0^{a_n} \frac{x^3 \sin(x^2)}{2 + \cos x}\, dx. \end{cases}$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge?