Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

IX foglio esercizi

Esercizio 1. Nei seguenti sistemi lineari, discutere l'insieme delle soluzioni al variare del parametro t, o dei parametri t e τ, in $\mathbb{R}$.

$$(1)\quad \begin{cases} x+3y &= t \\ tx-4y &= 4 \\ x-ty &= t \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x+y+2tz &= 0 \\ 2y+tz &= 0 \\ tx+\frac{3}{2}z &= 0 \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} 2x-3y &= 0 \\ -x+2y &= t \\ x-t^2y &= t \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} x+ty-z &= 1 \\ tx+y+z &= 2 \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} x+2y+z &= \tau \\ y+tz &= \tau \\ x+y+(1-\tau)z &= t+\tau \end{cases} \qquad (6)\quad \begin{cases} x+y+z &= \tau \\ \tau y+tz &= 1 \\ x+(1-\tau)y+z &= t-1 \end{cases}$$

Soluzioni. (1) Un'unica soluzione se $t \in \{-3,-2,2\}$; nessuna soluzione altrimenti. (2) Un'unica soluzione se $t \notin \{-1,1\}$; infinite soluzioni altrimenti. (3) Un'unica soluzione se $t \in \{-1,0,1\}$; nessuna soluzione altrimenti. (4) Infinite soluzioni per $t \neq -1$; nessuna soluzione per $t=-1$. (5) Un'unica soluzione se $t \neq \tau$; nessuna soluzione se $t=\tau$ e $t+\tau \neq 0$; infinite soluzioni se $t=\tau=0$. (6) Un'unica soluzione se $t\tau \neq 0$; nessuna soluzione se $t=0$; infinite soluzioni se $\tau=0$ e $t=1$; nessuna soluzione se $\tau=0$ e $t \neq 1$.

Esercizio 2. Siano S_1 ed S_2 soluzioni dei sistemi lineari Σ_1 e Σ_2. Dire, negli esempi seguenti, quando Σ_1 e Σ_2 sono sistemi equivalenti.

$$(1)\quad S_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad S_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$(2)\quad S_1=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}+\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad S_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$(3)\quad S_1=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}+\alpha_1\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+\beta_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad S_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}+\beta_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$(4)\quad S_1=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}+\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\beta_1\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} \qquad S_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$$

Soluzioni. (1) Sì; (2) No; (3) Sì; (4) No.

Esercizio 3. Data la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$, determinare (1) l'insieme delle matrici B, 2×2, tali che $AB=0$ e (2) l'insieme delle matrici C tali che $AC=A$.

Soluzione. (1) $\begin{pmatrix}-2\alpha & -2\beta\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\alpha & -2\beta\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}$.

Esercizio 4. Determinare i valori di t che rendono linearmente indipendenti i vettori degli esempi seguenti.

$$(1) \quad \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ t \end{pmatrix} \quad \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t-1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ t \end{pmatrix} \quad \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Soluzioni. (1) $t \notin \{1, 2\}$. (2) Ogni valore di t. (3) $t \neq 2$. (4) Nessun valore di t.

Esercizio 5. Posto $t = 2$ negli esempi (1), (3) e (4) dell'esercizio precedente, determinare i coefficienti di una combinazione lineare nulla dei vettori considerati.

Esercizio 6. Nell'esempio (2) dell'esercizio 4, determinare l'insieme dei vettori $\mathbf{u_3}$ che rendono $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3})$ una base di E^3 per ogni valore di t.

Soluzione. $\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, con $\beta \neq 0$

Esercizio 7. Determinare i valori di t che rendono i vettori $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ nell'esempio (1) dell'esercizio 4 una base ortogonale di E^3.

Soluzione. $t = -1$.

Esercizio 8. Determinare una base ortonormale $(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3})$ di E^3 in cui $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$ siano rispettivamente paralleli ai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 9. Determinare i vettori $\mathbf{u}$ di E^3 che formano un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con i vettori $\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e tali che $||\mathbf{u}|| = 1$.