Maurizio Candilera

Temi d'esame di Geometria I

Corso di laurea in Fisica

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata - Via Belzoni, 7 - 35100 PADOVA

Introduzione.

In queste pagine sono raccolte le risoluzioni dei compiti di *Geometria I* per la Laurea in Fisica, degli appelli d'esame relativi a vari anni accademici nei quali ho avuto l'occasione di tenere le lezioni del corso.

Molto rapidamente, dopo aver detto cosa contengono queste pagine, vorrei dire che cosa *non* è questo volumetto.

- Non è una guida per prepararsi a svolgere l'esame di Geometria, perchè manca di tutti quegli esercizi introduttivi che costituiscono il bagaglio indispensabile per affrontare esercizi un po' più complessi, quali quelli proposti in sede d'esame.
- Non è un repertorio completo dei possibili esercizi che si possono trovare in sede d'esame, anche perchè sarebbe impossibile produrre un tale repertorio.
- Non è un "formulario" ove trovare procedimenti misteriosi da immagazzinare mnemonicamente ed applicare in modo pedissequo.

Molto semplicemente, questo volumetto è quello che dice il suo titolo: una raccolta di esercizi svolti, alcuni dei quali possono essere interessanti di per sé, e che costituiscono un'integrazione agli argomenti presentati durante il corso. Forse, l'unica cosa di cui possono essere indicativi, sono le piccole manie o le idiosincrasie dell'autore.

Temo che, come ogni opera dell'uomo (e mia in particolare), queste pagine non siano esenti da errori, dei quali mi scuso. Ringrazio in anticipo chiunque mi volesse segnalare gli errori trovati, onde eliminarli in una futura ristampa (?). Spero comunque che, nonostante ciò, la lettura di queste pagine possa essere utile a qualcuno per comprendere meglio i contenuti del corso di Geometria.

Ringrazio Francesco Bottacin e Mauro Costantini per avermi segnalato alcuni errori e imprecisioni contenuti in una prima stesura.

Il testo è stato composto utilizzando $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX dell'American Mathematical Society. Le (poche) figure introdotte sono state preparate con Mathematica^{TM} ed inserite nel testo utilizzando i macros di P. Galko (13 agosto 1990). Un grazie a tutti.

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica

prova scritta del 2 luglio 1993 .

ESERCIZIO 1 *Si considerino gli spazi vettoriali reali V e W con le rispettive basi: $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$.*

(a) Si scriva la matrice, rispetto alle basi date, dell'applicazione lineare $\phi: V \to W$, così definita:

$$\begin{array}{cc} \phi(v_1) = w_1 - w_2, & \phi(v_2) = 2w_2 - 6w_3, \\ \phi(v_3) = -2w_1 + 2w_2, & \phi(v_4) = w_2 - 3w_3 \end{array}.$$

(b) Si determinino le dimensioni dei sottospazi $\ker\phi$ ed $\operatorname{im}\phi$ e si scrivano delle basi per tali sottospazi.

(c) È vero o falso che $w_1 + w_2 + w_3 \in \operatorname{im}\phi$?

Svolgimento: (a) La matrice è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Il sottospazio $\operatorname{im}\phi$ di W è generato dalle immagini degli elementi della base $\mathcal{V}$ di V. Poichè $\phi(v_3) = -2\phi(v_1)$ e $\phi(v_2) = 2\phi(v_4)$, il sottospazio $\operatorname{im}\phi$ di W è generato da $\phi(v_1)$ e $\phi(v_4)$, e questi due generatori sono indipendenti, come si può verificare facilmente osservando che il minore di A estratto dalle prime due righe e dalla prima e quarta colonna è diverso da zero. Ne consegue che $\operatorname{im}\phi$ ha dimensione 2 e quindi che $\dim\ker\phi = \dim V - \dim\operatorname{im}\phi = 2$.

Da quanto osservato in precedenza, discende che $2v_1 + v_3$ e $v_2 - 2v_4$ appartengono a $\ker\phi$ ed inoltre sono chiaramente indipendenti (perchè?); si conclude

$$\ker\phi = L(2v_1 + v_3, v_2 - 2v_4) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{im}\phi = L(w_1 - w_2, w_2 - 3w_3).$$

(c) Il vettore $w_1 + w_2 + w_3$ appartiene ad $\operatorname{im}\phi$ se, e solo se, è combinazione lineare di $w_1 - w_2$ e $w_2 - 3w_3$; ovvero se i tre vettori in questione sono linearmente dipendenti. Ciò è falso. Infatti, data un'applicazione D, trilineare, alternante e non-banale su W, si ha

$$D(w_1 + w_2 + w_3, w_1 - w_2, w_2 - 3w_3) = 7\, D(w_1, w_2, w_3) \neq 0,$$

e quindi $w_1 + w_2 + w_3 \notin \operatorname{im}\phi$. □

ESERCIZIO 2 *Si considerino i sistemi lineari omogenei:*

$$\begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & & -x_4 & = 0 \\ & 3x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & & & +x_4 & = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \lambda x_1 & +2x_2 & -3\lambda x_3 & & = 0 \\ (\lambda+1)x_1 & +2x_2 & -3\lambda x_3 & +x_4 & = 0 \\ & 2\lambda x_2 & -3x_3 & +2\lambda x_4 & = 0 \end{cases}.$$

Si determinino i valori di λ per cui i due sistemi ammettono soluzioni non banali in comune.

Svolgimento: Il primo tra i due sistemi è un sistema omogeneo di rango 3, come si verifica osservando che il minore estratto dalle prime tre colonne è diverso da zero. Dunque le soluzioni di tale sistema formano un sottospazio vettoriale di dimensione 1 di $\mathbb{R}^4$, generato dal vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Si verifica facilmente che il vettore w non è soluzione del secondo sistema, per nessun valore di λ, perchè sostituendo le coordinate di w nella terza equazione si ottiene la condizione $-3 = 0$, che non è mai verificata. Dunque i sistemi non hanno soluzioni non-banali in comune. □

ESERCIZIO 3 *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e sia $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una sua base. Si consideri su V l'applicazione bilineare simmetrica g di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base data.

(a) *Si verifichi che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V relativamente a g.*

(b) *Si calcoli l'indice di inerzia $i(g)$.*

(c) *Si dica se esistono vettori isotropi non nulli relativamente a g e, in caso affermativo, si determini un sottospazio isotropo di dimensione massima.*

Svolgimento: Poichè $\det G = 10 \neq 0$, l'applicazione bilineare g è non-degenere.

Costruiamo una base ortogonale $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$ di V, relativamente a g. Da un'osservazione della matrice G si nota che v_1 e v_3 sono vettori non-isotropi, mutuamente ortogonali; poniamo quindi $w_1 = v_1$, $w_2 = v_3$ e cerchiamo un vettore (necessariamente non-isotropo; perchè?) $w_3 = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \in L(w_1, w_2)^\perp$. Le coordinate x_1, x_2, x_3 di w_3 devono soddisfare al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases};$$

e quindi $w_3 = v_1 + 3v_2 - 3v_3$, e si ha $g(w_3, w_3) = 30$.

(b) Poichè g ristretta a $L(w_3)$ è definita positiva, mentre la restrizione di g a $L(w_1, w_2)$ è definita negativa, si conclude che $i(g) = -1$.

(c) In V esistono vettori isotropi, perchè g non è definita. In particolare un sottospazio isotropo di dimensione massima deve avere dimensione 1 (perchè contenuto nel proprio ortogonale) ed è facile osservare che un sottospazio isotropo massimale è

$$L(\sqrt{10}w_1 + w_3) = L((1 + \sqrt{10})v_1 + 3v_2 - 3v_3).$$

□

ESERCIZIO 4 *Sia $M_2(C)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi nel campo C (di caratteristica diversa da 2). Si dimostri che l'applicazione $g: M_2(C) \times M_2(C) \to C$ definita ponendo*

$$g(A, B) = \det(A + B) - \det A - \det B \quad ,$$

è bilineare e simmetrica.

(a) *Vi sono vettori isotropi relativamente a g ?*

(b) *Tramite la base canonica di $M_2(C)$*

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \epsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si scriva la matrice di g e si dica se è o meno degenere.

(c) *Se g è non–degenere, si determini una base ortogonale relativamente a g.*

Svolgimento: Si potrebbe verificare direttamente che g è bilineare (simmetrica lo è evidentemente); oppure è sufficiente osservare che l'applicazione che associa ad una matrice A il suo determinante, $\det A$, è una forma quadratica, ovvero un polinomio omogeneo di grado 2 nelle entrate di A.

(a) Qualunque matrice degenere (non-invertibile) è un vettore isotropo relativamente a $g^{(*)}$; ad esempio il vettore ϵ_1 del punto (b).

(b) La matrice di g relativamente alla base data è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che è invertibile perchè il suo determinante è uguale ad 1. Dunque g è non-degenere.

(c) È facile verificare che $\epsilon_1+\epsilon_4$, $\epsilon_1-\epsilon_4$, $\epsilon_2+\epsilon_3$, $\epsilon_2-\epsilon_3$, sono una base ortogonale di $M_2(C)$, relativamente a g.$^{(**)}$ □

ESERCIZIO 5 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Sia*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

la matrice di un'applicazione bilineare $g: V \times V \to \mathbb{R}$, rispetto alla base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di V.

(a) È vero o falso che, per ogni vettore $v \in L(v_1)^\perp$, la condizione $g(v, v) = 0$ implica $v = 0$?

(b) Si fissi una base $\{w_1, w_2\}$ di $L(v_1)^\perp$ e si identifichi tale spazio con lo spazio affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tramite la corrispondenza $\Phi(x_1w_1 + x_2w_2) = {}^t(1, x_1, x_2)$. Si descriva l'immagine tramite Φ del sottoinsieme $\mathcal{C} = \{\, v \in L(v_1)^\perp \mid g(v, v) = 1 \,\}$.

Svolgimento: (a) Un vettore $v = t_1v_1+t_2v_2+t_3v_3$ appartiene ad $L(v_1)^\perp$ se, e solo se, $t_1+2t_2+2t_3 = 0$ e quindi, posto

$$w_1 = 2v_1 - v_2 \qquad \text{e} \qquad w_2 = 2v_1 - v_3,$$

si ha $L(v_1)^\perp = L(w_1, w_2)$.

La restrizione di g ad $L(v_1)^\perp$ non è definita, perchè $g(w_1, w_1) = -3 < 0$ e $g(w_1 - w_2, w_1 - w_2) = 2 > 0$. Dunque è falso affermare che l'unico vettore isotropo di $L(v_1)^\perp$ sia il vettore nullo, perchè ciò è equivalente al fatto che la restrizione di g ad $L(v_1)^\perp$ sia definita positiva o definita negativa.

(b) La matrice di g, ristretta ad $L(v_1)^\perp$, rispetto alla base $\{w_1, w_2\}$, descritta la punto precedente, è uguale ad $U = \left(\begin{smallmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -3 \end{smallmatrix}\right)$. Dunque, nella corrispondenza Φ, $\mathcal{C}$ è l'insieme dei punti propri e reali della conica di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ di equazione affine

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_1x_2 + 1 = 0,$$

che è un'iperbole in tale spazio affine, perchè la sua restrizione alla retta impropria è la forma quadratica di matrice U, che è non-degenere e non-definita e quindi vi sono due punti reali distinti della conica $\mathcal{C}$ sulla retta impropria. □

$^{(*)}$ È vero o falso che le matrici non-invertibili di $M_2(C)$ sono tutti e soli i vettori isotropi relativamente a g?

$^{(**)}$ Si verifichi che, per qualunque applicazione bilineare simmetrica g, si ha

$$g(v, v) = g(w, w) \quad \Longleftrightarrow \quad g(v + w, v - w) = 0.$$

Ciò spiega come sia stata costruita la base ortogonale descritta nel punto (c).

ESERCIZIO 6 *Sia $\mathbb{C}$ il campo complesso. Si determini la forma canonica di Jordan dell'endomorfismo ϕ di $\mathbb{C}^4$, che ha matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica $\{e_1, \dots, e_4\}$ di $\mathbb{C}^4$.

Svolgimento: Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(x) = \det(A - x) = (x+3)^4$, e quindi vi è il solo autovalore -3, con molteplicità 4 e nullità 1, poichè $A + 3$ ha rango 3. Dunque la matrice di Jordan di ϕ è

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dal calcolo delle potenze di $A + 3$ si verifica che e_3 non appartiene a $\ker(\phi+3)^3$ e quindi una base rispetto a cui la matrice di ϕ è uguale a J è

$$(\phi+3)^3(e_3) = -4e_2, \quad (\phi+3)^2(e_3) = -9e_2 + 4e_4, \quad (\phi+3)(e_3) = -e_1 + 2e_2 + 6e_4, \quad e_3.$$

□

ESERCIZIO 7 *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino la retta r ed il piano π, di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \qquad e \qquad \pi : \; x - 2y + z = 1.$$

(a) Si determinino le rette passanti per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, contenute nel piano π ed aventi distanza da r uguale ad $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) Si determinino (i coseni de) gli angoli formati da coppie di rette soddisfacenti alla condizione descritta nel punto (a).

Svolgimento: (a) La retta r passa per il punto $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Una retta s, passante per P, è completamente determinata dalla conoscenza di un vettore $w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ del suo spazio direttore. Il vettore w è parallelo al piano π se, e solo se, le sue coordinate soddisfano all'equazione omogenea associata all'equazione di π; ovvero se $a - 2b + c = 0$. Inoltre, le coordinate di w devono soddisfare alle condizioni che vengono dal fatto che r ed s siamo a distanza fissata, ovvero

$$\delta_0(r,s) = \frac{|V(P-R, v, w)|}{\|v \times w\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{ovvero} \quad \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} c \\ -c \\ b-a \end{pmatrix} \right\|.$$

Se ne deduce che le coordinate di w devono essere soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ (a-b)^2 - 2c^2 = 0 \end{cases}.$$

Dunque vi sono due rette s_1 ed s_2 soddisfacenti alle condizioni richieste, parallele rispettivamente ai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3+\sqrt{2} \\ 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 3-\sqrt{2} \\ 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(b) In base a quanto visto al punto precedente, il coseno dell'angolo ϑ tra s_1 ed s_2 è

$$\cos\vartheta = \frac{|w_1 \cdot w_2|}{\|w_1\|\,\|w_2\|} = \frac{7}{\sqrt{97}}.$$

□

ESERCIZIO 8 *Nello spazio euclideo tridimensionale standard, si considerino le rette*

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad ed \qquad s : \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 2 \\ z - 1 = 0 \end{cases}.$$

(a) si determini il punto $Q = r \cap s$.

(b) Si scriva l'equazione cartesiana del piano π parallelo ad r ed s e passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) Si scelgano due vettori v_r e v_s, di lunghezza 1, che generino i sottospazi direttori di r ed s rispettivamente e si determini il volume (non orientato) del parallelepipedo di vertici $P, Q, Q + v_r, Q + v_s$.

Svolgimento: (a) L'intersezione tra le due rette è il punto $Q = r \cap s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, unica soluzione comune ai due sistemi lineari che definiscono le rette r ed s.

(b) La retta r è parallela al vettore $w_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la retta s è parallela al vettore $w_s = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dunque, il piano π deve passare per il punto P ed essere parallelo ai vettori w_r e w_s; deve essere perciò costituito dai punti $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dello spazio per cui i tre vettori $X - P$, w_r e w_s sono linearmente dipendenti. L'equazione cercata è quindi

$$V(X - P, w_r, w_s) = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \det\begin{pmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 3x + 2y - 3 = 0.$$

(c) Infine, osserviamo che w_r è un vettore di lunghezza 1, mentre un vettore di lunghezza 1 parallelo a w_s è $v_s = \frac{w_s}{\|w_s\|} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dunque il volume cercato è

$$|V(P - Q, w_r, v_s)| = \left| \frac{1}{\sqrt{13}} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Ogni altra scelta dei vettori v_r e v_s soddisfacenti alle condizioni dell'enunciato non cambia il volume non-orientato. □

ESERCIZIO 9 *Si consideri nel piano proiettivo reale la conica $\mathcal{C}$ di equazione omogenea*

$$x_0^2 + 3x_1^2 - 4x_0x_2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 = 0 \ .$$

Si classifichi tale conica nel piano affine che si ottiene prendendo come retta impropria la retta r, di equazione omogenea $x_0 - x_2 = 0$. Si determinino inoltre centro ed asintoti di tale conica.

Svolgimento: Considerando il sistema formato dalle equazioni omogenee di retta e conica, si verifica facilmente che l'intersezione tra r e $\mathcal{C}$ è costituita dai due punti Q_1 e Q_2, di coordinate omogenee $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Q_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$. Poichè l'intersezione tra $\mathcal{C}$ ed r è formata da due punti a coordinate reali, la conica $\mathcal{C}$ è un'iperbole del piano affine che ha r come retta impropria.

Il centro di $\mathcal{C}$ è il polo della retta r, ovvero il punto $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ le cui coordinate omogenee soddisfano alla condizione

$$(x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \rho(1, 0, -1), \qquad \text{per qualche } \rho \neq 0.$$

Dunque il centro è $P = \begin{pmatrix} 22 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ ed i due asintoti sono le rette

$$r_1 = P + Q_1 : x_0 - 5x_1 - x_2 = 0 \qquad \text{e} \qquad r_2 = P + Q_2 : 3x_0 + 15x_1 + 47x_2 = 0.$$

□

ESERCIZIO 10 *Nel piano affine reale, immerso nel piano proiettivo nel modo consueto, si trovino le equazioni di tutte le parabole tangenti simultaneamente alla retta impropria ed alla retta s, di equazione affine $3x + y + 8 = 0$, nei punti di coordinate omogenee $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ rispettivamente.*

Svolgimento: Poniamoci nel piano proiettivo ed utilizziamo coordinate omogenee. La retta impropria r_∞ ha equazione $x_0 = 0$, mentre l'equazione omogenea della retta s è $8x_0 + 3x_1 + x_2 = 0$.

Le parabole di cui si parla formano un fascio di coniche $\mathcal{F}$, che ha come coniche degeneri la coppia di rette r_∞ ed s e la retta $t = P_\infty + Q$ con molteplicità 2. La retta t ha equazione omogenea $x_1 - x_2 = 0$ e quindi la generica conica del fascio $\mathcal{F}$ ha equazione

$$\lambda x_0(8x_0 + 3x_1 + x_2) + \mu(x_1 - x_2)^2 = 0,$$

al variare dei parametri omogenei (λ, μ). □

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica

prova scritta del 15 luglio 1993 .

ESERCIZIO 1 *Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una sua base. Si considerino, al variare di λ tra i numeri reali, gli endomorfismi ϕ_λ di V definiti dalle condizioni*

$$\phi_\lambda(v_1) = (\lambda - 1)v_1 + 2v_2 - (\lambda + 1)v_3 \quad \phi_\lambda(v_2) = 2v_1 - \lambda v_3 \quad \phi_\lambda(v_3) = -\lambda v_1 - v_2 + (\lambda + 2)v_3$$

(a) Si determinino, al variare di λ le dimensioni di nucleo ed immagine di ϕ_λ.

(b) Si dica per quali valori di λ il vettore $v_1 + 2v_2 + 2v_3$ appartiene all'immagine di ϕ_λ.

Svolgimento: (a) Sia fissato $\lambda \in \mathbb{R}$. Rispetto alla base $\mathcal{V}$, l'endomorfismo ϕ_λ ha matrice

$$A_\lambda = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi_\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 2 & -\lambda - 1 \\ 2 & 0 & -\lambda \\ -\lambda & -1 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$$

e si ha $\dim \operatorname{im} \phi_\lambda = \operatorname{rk} A_\lambda$ e $\dim \ker \phi_\lambda = 3 - \operatorname{rk} A_\lambda$. Osservando che il minore di A_λ estratto dalle prime due righe e colonne è uguale a -4 e quindi diverso da zero indipendentemente da λ, si può affermare che $\operatorname{rk} A_\lambda \geq 2$ qualunque sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Inoltre, $\det A_\lambda = (\lambda + 2)(\lambda - 3)$ e dunque si può concludere che

$$\dim \operatorname{im} \phi_\lambda = \begin{cases} 2 & \text{se } \lambda = -2 \text{ o } \lambda = 3 \\ 3 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{e} \quad \dim \ker \phi_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda = -2 \text{ o } \lambda = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

(b) In base a quanto visto nel punto precedente, se $\lambda \neq -2$ e $\lambda \neq 3$, sicuramente il vettore $w = v_1 + 2v_2 + 2v_3$ appartiene ad $\operatorname{im} \phi_\lambda = V$. Altrimenti, $w \in \operatorname{im} \phi_\lambda$ se, e solo se, hanno soluzione i sistemi lineari non omogenei

$$\begin{cases} 2x + 2y - 4z = 1 \\ 2x - 3z = 2 \\ -3x - y + 5z = 2 \end{cases} \text{se } \lambda = 3 \quad \text{o} \quad \begin{cases} -3x + 2y + z = 1 \\ 2x + 2z = 2 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \text{se } \lambda = -2.$$

Ed in entrambo i casi il sistema dato non ha soluzione in quanto il rango della matrice completa è uguale a 3, mentre il rango della matrice dei coefficienti è 2. □

ESERCIZIO 2 *Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 4 e sia V^* il suo duale. Indichiamo con $\{v_1, \dots, v_4\}$ una base di V e con $\{v_1^*, \dots, v_4^*\}$ la base duale di V^*. Si considerino i sottospazi di V^**

$$Z = L(2v_1^* - 3v_2^* - v_4^*, 3v_2^* - 2v_3^* + v_4^*, v_1^* + v_4^*) \quad \text{e}$$
$$Z_\lambda = L(\lambda v_1^* + 2v_2^* - 3\lambda v_3^*, (\lambda+1)v_1^* + 2v_2^* - 3v_3^* + v_4^*, 2\lambda v_2^* - 3v_3^* + 2\lambda v_4^*),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

(a) Si calcolino, al variare di λ le dimensioni dei sottospazi $Z^\perp$, $Z_\lambda^\perp$ e $Z^\perp + Z_\lambda^\perp$.
(b) Si dica per quali valori di λ si ha $Z^\perp + Z_\lambda^\perp = Z^\perp \oplus Z_\lambda^\perp$.

Svolgimento: (a) Ricordiamo che, per ogni sottospazio W di V^*, si ha $\dim W^\perp = \dim V^* - \dim W$. Inoltre, $\dim Z = \operatorname{rk} A$ e $\dim Z_\lambda = \operatorname{rk} B_\lambda$, ove A e B_λ sono le matrici le cui colonne sono uguali ai coefficienti dei generatori di Z e Z_λ rispetto alla base data di V^*, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda+1 & 0 \\ 2 & 2 & 2\lambda \\ -3\lambda & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

È facile osservare che il minore estratto dalle prime 3 righe di A è diverso da zero, mentre i minori estratti dalle ultime tre righe e dalle righe 1, 2 e 4 di B_λ sono rispettivamente $6(1-\lambda)^2$ e $2\lambda(\lambda+2)$, che non sono mai entrambi nulli.

Si conclude che $\dim Z = 3 = \dim Z_\lambda$, qualunque sia $\lambda \in \mathbb{C}$. Inoltre, $Z^\perp = L(v_1 + v_2 + v_3 - v_4)$, e $(2\lambda v_2^* - 3v_3^* + 2\lambda v_4^*) \circ (v_1 + v_2 + v_3 - v_4) = -3 \neq 0$; perciò $Z^\perp \cap Z_\lambda^\perp = (0)$ qualunque sia $\lambda \in \mathbb{C}$. Dunque si ha

$$\dim Z^\perp = 1 = \dim Z_\lambda^\perp \quad \text{e} \quad \dim(Z^\perp + Z_\lambda^\perp) = 2, \quad \text{per ogni } \lambda \in \mathbb{C}.$$

(b) Quindi $Z^\perp + Z_\lambda^\perp = Z^\perp \oplus Z_\lambda^\perp$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. □

ESERCIZIO 3 *Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri l'applicazione bilineare simmetrica g di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica $\{e_1, \dots, e_4\}$.
(a) Si dica se g è non-degenere e se ne calcoli l'indice di inerzia.
(b) Si dica se lo spazio $(\mathbb{R}^4, g)$ è isometrico allo spazio $\mathbb{R}^4$ dotato dell'usuale prodotto scalare.
(c) Si dica se lo spazio $(\mathbb{R}^4, g)$ è isometrico allo spazio di Minkovski.

Svolgimento: Per vedere se g è non-degenere è sufficiente calcolare $\det A$, oppure si può osservare che, essendo un'applicazione bilineare simmetrica, g è non-degenere se, e solo se, esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ relativamente a g.

Il vettore $v_1 = e_1$ non è isotropo, perchè $g(v_1, v_1) = 3$, e quindi possiamo prenderlo come primo vettore di una base ortogonale; inoltre,

$$g(v_1, 2e_1 + 3e_2) = 0 \quad \text{e} \quad g(2e_1 + 3e_2, 2e_1 + 3e_2) = -3.$$

Posto $v_2 = 2e_1 + 3e_2$, si osservi che

$$g(v_1, e_3 - e_4) = g(v_2, e_3 - e_4) = 0 \quad \text{e} \quad g(e_3 - e_4, e_3 - e_4) = -5;$$

e, posto $v_3 = e_3 - e_4$, si ha

$$g(v_1, 5e_1 + 5e_2 - 2e_3 - 3e_4) = g(v_2, 5e_1 + 5e_2 - 2e_3 - 3e_4) = g(v_3, 5e_1 + 5e_2 - 2e_3 - 3e_4) = 0$$
$$\text{e} \quad g(5e_1 + 5e_2 - 2e_3 - 3e_4, 5e_1 + 5e_2 - 2e_3 - 3e_4) = 70.$$

Dunque, posto $v_4 = 5e_1 + 5e_2 - 2e_3 - 3e_4$, possiamo concludere che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$, relativamente a g. Inoltre, considerando la decomposizione $\mathbb{R}^4 = L(v_1, v_4) \oplus L(v_2, v_3)$, si deduce [cf. il Teorema di Sylvester] che g ha indice di inerzia $i(g) = 0$.

La conoscenza dell'indice di inerzia di g ci permette di rispondere negativamente ad entrambe le domande (b) e (c), perchè il prodotto scalare di $\mathbb{R}^4$ ha indice di inerzia 4, mentre l'applicazione bilineare dello Spazio di Minkowski ha indice di inerzia 2. Infatti, due spazi normati$^{(*)}$ reali sono isometrici se, e solo se, hanno la stessa dimensione e lo stesso indice di inerzia. □

ESERCIZIO 4 *Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri l'applicazione bilineare simmetrica g di matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & x \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica $\{e_1, \dots, e_4\}$.

Si determinino i numeri reali x per i quali g è non-degenere ed ha indice di inerzia uguale a 0.

Svolgimento: Si osservi che, indipendentemente dal valore di x, i sottospazi $L(e_1, e_2)$ ed $L(e_3, e_4)$ sono ortogonali tra loro e la restrizione di g ad $L(e_1, e_2)$ è definita positiva, come si vede facilmente osservando che la matrice della restrizione di g ad $L(e_1, e_2)$, rispetto alla base $\{e_1, e_2\}$, ha i minori diagonali entrambo positivi.

Dunque, g è non-degenere ed ha indice di inerzia uguale a 0 se, e solo se, la restrizione di g ad $L(e_3, e_4)$ è definita negativa. Poichè la matrice della restrizione di g ad $L(e_3, e_4)$, rispetto alla base $\{e_3, e_4\}$, è uguale a $N_x = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & x \end{pmatrix}$, ciò accade se, e solo se, $\det N_x > 0$, ovvero se, e solo se, $x < -16$. □

$^{(*)}$ Ricordiamo che nell'ambito del corso di Geometria il termine *spazio normato* stà ad indicare uno spazio vettoriale dotato di un'applicazione bilineare simmetrica non-degenere. Non si confonda quindi con l'omonimo termine utilizzato nel Corso di Analisi il cui significato coincide solo in casi particolari (quali?).

ESERCIZIO 5 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Siano poi Φ un automorfismo di V, N un endomorfismo di V e λ una costante di modulo minore di 1, legati dalla relazione: $\Phi N = \lambda N \Phi$. Si mostri che, sotto tali ipotesi, N è un endomorfismo nilpotente.*

Svolgimento: Osserviamo che, se $\lambda = 0$, allora, essendo Φ un automorfismo, si ha $N = 0$ e quindi la tesi è banalmente vera. Supponiamo quindi che si abbia $0 < |\lambda| < 1$.

Un endomorfismo di V è nilpotente se, e solo se, tutti i suoi autovalori sono uguali a zero. Dunque, facciamo vedere che, nelle ipotesi date, non può esistere un autovalore diverso da 0.

Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ un autovalore di N (esiste? perchè?) e sia v un autovettore (non-nullo) ad esso relativo. Allora, si ha

$$\lambda N \Phi(v) = \Phi N(v) = \Phi(\alpha v) = \alpha \Phi(v);$$

e quindi $\Phi(v)$ è un autovettore di N, relativo all'autovalore $\frac{\alpha}{\lambda}$. Facendo induzione sull'intero n si può dimostrare in modo analogo che $\Phi^n(v)$ è un autovettore di N, relativo all'autovalore $\frac{\alpha}{\lambda^n}$, qualunque sia n. Se α fosse diverso da 0, si otterrebbero così infiniti autovettori (non-nulli), ciascuno relativo ad un diverso autovalore. Ciò non può darsi in uno spazio vettoriale di dimensione finita quale è V, perchè autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

Si conclude perciò che ogni autovalore di N è nullo e quindi N è nilpotente. □

ESERCIZIO 6 *Si determini la forma canonica di Jordan relativa all'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ che, rispetto alla base canonica, ha matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si determini inoltre una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan.

Svolgimento: Indichiamo, come di consueto, con $\{e_1, \dots, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(x) = \det(A - x) = (x-2)^3(x-3)$. Dunque gli autovalori di ϕ sono 2 e 3 di molteplicità 3 ed 1, rispettivamente. Le matrici

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A - 3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

hanno entrambe rango 3 e quindi gli autovalori di ϕ hanno entrambi nullità 1. In particolare, $W_\phi(2) = L(e_2)$ e $W_\phi(3) = L(6e_2 - 3e_3 + 2e_4)$.

Con un calcolo diretto si verifica che $e_3 - e_1$ appartiene a $\ker(\phi - 2)^3$, ma non a $\ker(\phi - 2)^2$. Dunque degli autovettori generalizzati per ϕ, relativamente all'autovalore 2, sono

$$e_3 - e_1, \quad (\phi - 2)(e_3 - e_1) = e_4 - e_3, \quad (\phi - 2)^2(e_3 - e_1) = e_2.$$

Si conclude che la matrice di Jordan di ϕ è quella relativa alla base

$$\mathcal{V} = \{e_3 - e_1, e_4 - e_3, e_2, 6e_2 - 3e_3 + 2e_4\},$$

ovvero

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 7 *Nello spazio euclideo tridimensionale standard, si determinino le equazioni delle rette passanti per il punto* $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *incidenti la retta*

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

e che formano con quest'ultima un angolo di $\frac{\pi}{6}$.

Svolgimento: La retta r passa per il punto $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; dunque il generico punto della retta r ha coordinate affini $X_t = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix}$. Per determinare le rette passanti per P, incidenti r, e formanti un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con quest'ultima, è sufficiente determinare i valori del parametro t per cui il vettore $X_t - P$ forma un angolo (non-orientato) di $\frac{\pi}{6}$ col vettore v. Dunque, si tratta di determinare i valori di t per cui

$$\frac{|(X_t - P) \cdot v|}{\|v\| \, \|X_t - P\|} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Si verifica con un facile calcolo che la condizione scritta sopra è soddisfatta se, e solo se, t soddisfa all'equazione $t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2) = 0$.

Dunque vi sono due rette soddisfacenti alla condizione data; le due rette passano entrambe per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e sono rispettivamente parallele ai vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Le equazioni cartesiane di tali rette sono quindi

$$s_1 : \begin{cases} x - z = 1 \\ y + 2z = 0 \end{cases}, \qquad s_2 : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2y + z = 0 \end{cases}.$$

□

ESERCIZIO 8 *Nello spazio proiettivo tridimensionale si considerino tre rette* r, s *e* t, *di equazioni omogenee*

$$r : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_0 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_0 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si verifichi che le tre rette sono a due a due sghembe.

(b) Sia P *il punto di* r *di coordinate omogenee* $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Si mostri che per il punto* P *passa una retta* u_P, *secante sia* s *che* t.

(c) Si mostri che, per qualunque punto R *della retta* r *passa una, ed una sola, retta* u_R, *secante sia* s *che* t.

Svolgimento: (a) Due rette dello spazio proiettivo sono sghembe se la loro intersezione è il vuoto proiettivo. Dunque, le tre rette r, s e t sono a due a due sghembe se, e solo se, i sistemi omogenei che determinano $r \cap s$, $r \cap t$ ed $s \cap t$ hanno la sola soluzione banale. Le matrici dei coefficienti dei sistemi in questione sono

$$r \cap s : \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad r \cap t : \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad s \cap t : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

che hanno tutte e tre rango 4, come si può facilmente verificare.

(b) Poichè le rette r, s e t sono, a due a due, sghembe, e P è un punto di r, possiamo considerare i due piani distinti $P+s$ e $P+t$, di equazioni $P+s : 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$ e $P+t : 2x_0 - x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$ rispettivamente. La loro intersezione, $(P+s) \cap (P+t)$, è una retta (perchè?), che passa per P ed interseca sia s che t perchè è complanare con entrambe le rette. Dunque

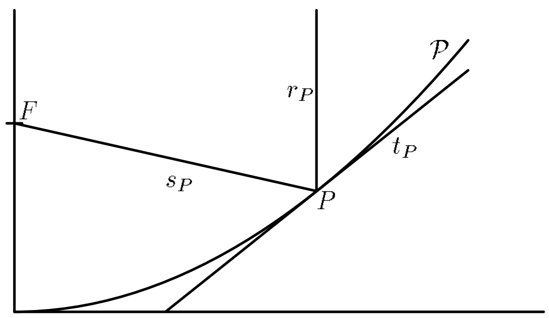
$$u_P = (P+s) \cap (P+t) : \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_0 - x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}.$$

(c) Quanto detto nel punto precedente per il punto P si può applicare a qualsiasi punto R di r, e quindi $u_R = (R+s) \cap (R+t)$, qualunque sia R in r. □

ESERCIZIO 9 *Sia $\mathcal{P}$ una parabola nel piano euclideo e sia P un suo punto (proprio). Si indichi con r_P la retta passante per P e parallela all'asse della parabola e sia $s_P \neq r_P$ la retta passante per P e formante con la tangente t_P a $\mathcal{P}$ in P un angolo (non-orientato) uguale all'angolo tra r_P e t_P.*

Si mostri che la retta s_P passa per il fuoco F della parabola $\mathcal{P}$.(*)

Svolgimento: Possiamo scegliere un riferimento (ortonormale) nel piano affinchè $\mathcal{P}$ abbia equazione affine $y = ax^2$. Facciamo uno schizzo della situazione.



Il fuoco F di $\mathcal{P}$ ha coordinate $F = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4a} \end{pmatrix}$ e l'asse è la retta di equazione $x = 0$, ed è quindi parallela al vettore $z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un generico punto di $\mathcal{P}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} \lambda \\ a\lambda^2 \end{pmatrix}$, al variare di λ tra i numeri reali, e la tangente a $\mathcal{P}$ in P è la retta di equazione $t_P : 2a\lambda x - y = a\lambda^2$. In particolare, t_P è parallela al vettore $v_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2a\lambda \end{pmatrix}$.

(*) Si può dare un'interpretazione "fisica" di questo esercizio. La retta r_P può essere pensata come un raggio di luce incidente lo specchio parabolico $\mathcal{P}$ ed s_P come il raggio riflesso.

Considerato quindi il vettore $F - P = \frac{1}{4a}\begin{pmatrix} -4a\lambda \\ 1-4a^2\lambda^2 \end{pmatrix}$, la tesi è verificata se si mostra che i vettori z ed $F - P$ formano lo stesso angolo non-orientato con v_P, ovvero se vale l'uguaglianza

$$\frac{|(F-P)\cdot v_P|}{\|F-P\|\,\|v_P\|} = \frac{|z\cdot v_P|}{\|z\|\,\|v_P\|}.$$

Infatti, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{|(F-P)\cdot v_P|}{\|F-P\|\,\|v_P\|} &= \frac{|-4a\lambda + 2a\lambda - 8a^3\lambda^3|}{\|v_P\|\sqrt{16a^2 + (1-4a^2\lambda^2)^2}} = \\ &= \frac{|2a\lambda|\,|1+4a^2\lambda^2|}{\|v_P\|\sqrt{(1+4a^2\lambda^2)^2}} = \frac{|2a\lambda|}{\|v_P\|} = \frac{|z\cdot v_P|}{\|z\|\,\|v_P\|}.\end{aligned}$$

□

ESERCIZIO 10 *Nel piano Euclideo si scrivano le equazioni delle parabole appartenenti al fascio di coniche determinato dai quattro punti di coordinate affini*

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Si determinino fuoco, asse, vertice e direttrice di ciascuna parabola.

Svolgimento: Due coniche degeneri del fascio hanno equazione affine $\mathcal{C}_1 : x(x-1) = 0$ (rette $A + B$ e $C + D$) e $\mathcal{C}_2 : (x-y)(x+y-4) = 0$ (rette $A + C$ e $B + D$). Dunque, la generica conica del fascio ha matrice

$$A_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -2\mu-\lambda & 2\mu \\ -2\mu-\lambda & 2\lambda+\mu & 0 \\ 2\mu & 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Tale matrice rappresenta una parabola se $\mu(2\lambda + \mu) = 0$ e quindi l'unica parabola non-degenere del fascio ha equazione

$$\mathcal{P} : y^2 - 4y + 3x = 0.$$

Si tratta di una parabola con l'asse parallelo all'asse delle ascisse; e poichè la parabola interseca l'asse delle ordinate nei punti A e B, l'asse deve passare per il punto medio tra questi, ovvero l'asse di $\mathcal{P}$ è la retta $h : y = 2$. Il vertice V, ovvero l'unico punto proprio appartenente ad $h \cap \mathcal{P}$, ha coordinate $V = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$.

Se una parabola ha equazione canonica $Y = aX^2$, il fuoco della parabola è un punto dell'asse che dista dal vertice $\frac{1}{4a}$. Poichè per la parabola $\mathcal{P}$, il coefficiente a è uguale a $-\frac{1}{3}$, il fuoco di $\mathcal{P}$ è il punto $F = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ 2 \end{pmatrix}$. Infine, la direttrice, che è la polare del fuoco, ha equazione $d : x = \frac{25}{12}$. □

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica

prova scritta del 14 settembre 1993 .

ESERCIZIO 1 *Si considerino, al variare di λ tra i numeri reali, i sistemi lineari:*

$$\Sigma_\lambda = \begin{cases} (\lambda-1)x & +2y & -\lambda z & =0 \\ 2x & & -z & =0 \\ -(\lambda+1)x & -\lambda y & +(\lambda+2)z & =0 \end{cases}.$$

(a) Si indichi con S_λ l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_λ. Si determini al variare di λ la dimensione del sottospazio S_λ.

(b) Si dica se l'unione dei sottoinsiemi S_λ, al variare di λ, genera tutto $\mathbb{R}^3$. In caso contrario, si determini la dimensione del sottospazio generato da tale unione.

Svolgimento: (a) Indichiamo con A_λ la matrice dei coefficienti del sistema Σ_λ. Le soluzioni di tale sistema omogeneo formano un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione $3-\operatorname{rk} A_\lambda$. Essendo $\det A_\lambda = (\lambda+2)(\lambda-3)$, ed osservando che il minore estratto dalle prime due righe e dalle ultime due colonne di A_λ è uguale a $\det\begin{pmatrix} 2 & -\lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2$, qualunque sia il numero reale λ; si può concludere che

$$\dim S_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda = -2, 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

In particolare, si ha $S_{-2} = L(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix})$ e $S_3 = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix})$.

(b) Per quanto visto sopra,

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{R}} S_\lambda = S_{-2} + S_3 = L(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

Dunque lo spazio generato dall'unione degli insiemi di soluzioni dei sistemi Σ_λ ha dimensione $2^{(*)}$ ed è quindi contenuto propriamente in $\mathbb{R}^3$. □

(*) Osservando che una delle equazioni che compaiono nel sistema Σ_λ è indipendente dal parametro, si poteva dedurre che lo spazio generato dall'unione degli insiemi di soluzioni doveva avere dimensione minore o uguale a 2.

ESERCIZIO 2 *Si consideri il semipiano H formato dai numeri complessi con parte immaginaria positiva. Si indichi con $SL(2,\mathbb{R}) = \{\gamma \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det\gamma = 1\}$ il gruppo simplettico di ordine 2 sul campo dei numeri reali. Si definisca un'azione di $SL(2,\mathbb{R})$ su H ponendo*

$$\gamma(t) = \frac{c+dt}{a+bt} \qquad \text{ove } t \in H \text{ e } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}).$$

(a) *Si mostri che $\gamma(t) \in H$ e che $\gamma_1(\gamma_2(t)) = [\gamma_1\gamma_2](t)$.*
(b) *Si mostri che qualunque sia $t \in H$, esiste $\gamma \in SL(2,\mathbb{R})$ tale che $\gamma(i) = t$, ove i è l'unità immaginaria.*
(b′) *Si deduca da (b) che per ogni coppia di numeri complessi $t_1, t_2 \in H$ esiste $\gamma \in SL(2,\mathbb{R})$ tale che $\gamma(t_1) = t_2$. [L'azione di $SL(2,\mathbb{R})$ su H è transitiva.]*
(c) *Sia i l'unità immaginaria. Si mostri che $\gamma(i) = i$ se, e solo se, $\gamma = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, per qualche $\theta \in [0, 2\pi)$.*

Svolgimento: (a) Siano $t = \alpha + i\beta \in H$ e $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$. Allora

$$\gamma(t) = \frac{(c+d\alpha)+id\beta}{(a+b\alpha)+ib\beta} = \frac{[(c+d\alpha)+id\beta][(a+b\alpha)-ib\beta]}{|(a+b\alpha)+ib\beta|^2};$$

e la parte immaginaria di $\gamma(t)$ è uguale a $\frac{\beta}{|(a+b\alpha)+ib\beta|^2}$, che è un numero reale positivo.

Osserviamo che, ad ogni $\gamma \in SL(2,\mathbb{R})$ si può associare la funzione $\alpha : H \to \mathbb{C}$, definita ponendo $\alpha(t) = a + bt \neq 0$. Facendo uso di tale notazione, per ogni $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, si può scrivere:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \gamma(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha(t)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Dati quindi $t \in H$ e $\gamma_1, \gamma_2 \in SL(2,\mathbb{R})$ ed indicate con α_1 ed α_2 le applicazioni associate, si ottiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_1(\gamma_2(t)) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\alpha_1(\gamma_2(t))}\gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\alpha_1(\gamma_2(t))}\frac{1}{\alpha_2(t)}\gamma_1\gamma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha_{1,2}(t)}[\gamma_1\gamma_2]\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ove $\alpha_{1,2}$ denota l'applicazione associata all'applicazione composta $\gamma_1\gamma_2$, che soddisfa all'uguaglianza

$$\alpha_{1,2}(t) = \alpha_1(\gamma_2(t))\,\alpha_2(t),$$

per ogni t in H.

(b) Sia $t = a + ib \in H$ ed osserviamo che le matrici del tipo $\gamma_{c,d} = \begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ sono tutte in $SL(2,\mathbb{R})$ ed una tale matrice trasforma il punto i in $d(c+id)$ e dunque, posto $d_0 = \sqrt{b}$ e $c_0 = \frac{a}{\sqrt{b}}$, si ha $\gamma_{c_0,d_0}(i) = t$.

(b′) Fissati t_1 e t_2 in H, siano γ_1 e γ_2 due matrici di $SL(2,\mathbb{R})$ tali che $\gamma_1(i) = t_1$ e $\gamma_2(i) = t_2$. Allora si ha

$$\gamma_2\gamma_1^{-1}(t_1) = \gamma_2(i) = t_2,$$

e dunque $\gamma_2\gamma_1^{-1}$ è una delle trasformazioni che mandano t_1 su t_2.

(c) Sia $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$; allora $\gamma(i) = i$ se, e solo se, $c + id = i(a + ib) = -b + ia$. Dunque, essendo γ una matrice ad entrate reali, se ne deduce che $a = d$, $c = -b$ e $a^2 + b^2 = \det\gamma = 1$. Se ne deduce che γ deve essere del tipo descritto nell'enunciato. □

ESERCIZIO 3 *Sia A una matrice simmetrica ad elementi nel corpo $\mathbb{R}$ dei numeri reali. È vero o falso che la matrice $\mathbf{1} + A^2$ è invertibile? E la matrice $\mathbf{1} - A^2$?*

Svolgimento: Poichè A è simmetrica, anche la matrice A^2 è simmetrica e rappresenta un'applicazione bilineare simmetrica semidefinita positiva, essendo ${}^t x\, A^2\, x = {}^t(Ax)\, Ax \geq 0$, perchè il prodotto scalare è definito positivo. Dunque, la matrice $\mathbf{1}+A^2$ rappresenta la somma di un'applicazione bilineare definita positiva con una semidefinita positiva e, quindi, è la matrice di un'applicazione bilineare simmetrica definita positiva e perciò non-degenere.

È ovviamente falso affermare che $\mathbf{1} - A^2$ è invertibile, come si vede facilmente prendendo $A = \mathbf{1}$.
□

ESERCIZIO 4 *Si chiama semipiano superiore di Siegel di ordine n l'insieme $\mathfrak{H}_n$ formato dalle matrici simmetriche $T = {}^tT$ in $M_n(\mathbb{C})$ con parte immaginaria definita positiva (ovvero $T = A + iB$ con A e B matrici reali simmetriche e B è la matrice di un'applicazione bilineare definita positiva).*

Si mostri che, se $T \in \mathfrak{H}_n$ allora $-T^{-1} \in \mathfrak{H}_n$.

Svolgimento: Sia $T = A + iB$ con A e B matrici reali. Poichè B è simmetrica e definita positiva, B è congruente alla matrice identica, ovvero esiste una matrice $P \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che ${}^tPBP = \mathbf{1}$. Se ne deduce che ${}^tPTP = C+i\mathbf{1}$ ove C è una matrice simmetrica reale. In particolare, si ha $(C+i\mathbf{1})(C-i\mathbf{1}) = \mathbf{1} + C^2$, che è una matrice invertibile reale (in quanto definita positiva). Dunque

$$({}^tPTP)^{-1} = (C - i\mathbf{1})(\mathbf{1} + C^2)^{-1},$$

da cui si deduce che la parte immaginaria di $-T^{-1}$ è congruente alla matrice $\mathbf{1} + C^2$, che è definita positiva, in quanto somma di una matrice definita positiva ($\mathbf{1}$) con una matrice semidefinita positiva (C^2) [cfr. anche l'Esercizio 3]. □

ESERCIZIO 5 *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e sia $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare simmetrica. Si dice che g è semidefinita positiva se, per ogni $v \in V$ si ha $g(v, v) \geq 0$.*

(a) Si mostri che, in tal caso, gli unici vettori isotropi relativamente a g sono i vettori del suo nucleo.

(b) Si fissi una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e si indichi con $g_1(v, w)$ il prodotto scalare definito relativamente a tale base. Si mostri che, se ϕ è un endomorfismo di V l'applicazione $g_\phi(v, w) = g_1(\phi(v), \phi(w))$ è semidefinita positiva.

(c) Nelle notazioni del punto precedente, si mostri che g_ϕ è definita positiva se, e solo se, ϕ è un isomorfismo.

Svolgimento: (a) Sia v un vettore isotropo relativamente a g; vogliamo mostrare che v appartiene al nucleo di g. Infatti, se esistesse un vettore w tale che $g(v, w) \neq 0$, allora per opportuni valori di t si avrebbe $g(tv + w, tv + w) = 2tg(v, w) + g(w, w) < 0$, contro l'ipotesi che g sia semidefinita positiva.

(b) e (c). Poichè g_ϕ è costruito componendo l'applicazione lineare ϕ con l'applicazione bilineare g_1, è ovvio che g_ϕ è un'applicazione bilineare simmetrica. Inoltre, $g_\phi(v, v) = g_1(\phi(v), \phi(v)) \geq 0$, qualunque sia $v \in V$ e si ha $g_\phi(v, v) = 0$ se, e solo se, $\phi(v) = 0$, ovvero se, e solo se, $v \in \ker \phi$. Dunque, g_ϕ è definita positiva se, e solo se, $\ker \phi = (0)$, ovvero se, e solo se, ϕ è un isomorfismo dello spazio vettoriale V. □

ESERCIZIO 6 *Si determini la forma canonica di Jordan relativa all'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ che, rispetto alla base canonica, ha matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determini inoltre una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan.

Svolgimento: Indichiamo, come di consueto, con $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Il polinomio caratteristico di ϕ è $\det(A - x) = (x-1)^2(x+1)^2$; e dunque ϕ ha i due autovalori 1 e -1, entrambo con molteplicità 2. Ambedue le matrici

$$A + 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A - 1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno rango 3 e dunque i due autovalori hanno entrambi nullità 1 ed i rispettivi spazi di autovettori sono

$$W_\phi(-1) = L(e_3) \qquad \text{e} \qquad W_\phi(1) = L(e_3 - 2e_4).$$

Infine, è facile osservare che $(\phi + 1)(e_1) = e_3$ e $(\phi - 1)(e_2 - 2e_3) = e_3 - 2e_4$.

Dunque, possiamo concludere che la matrice di Jordan dell'endomorfismo ϕ è

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed una base rispetto a cui ϕ ha tale matrice è $\{e_3, e_1, e_3 - 2e_4, e_2 - 2e_3\}$. □

ESERCIZIO 7 *Nello Spazio Euclideo E^n, di dimensione n, si considerino un punto P ed un numero reale positivo r. Siano poi*

$$B = B(P, r) = \{Q \in E^n \mid \|Q - P\| < r\} \quad \text{ed} \quad S = S(P, r) = \{Q \in E^n \mid \|Q - P\| = r\}$$

la sfera di centro P e raggio r ed il suo bordo. Per ogni punto $X \in B$, $X \neq P$, si consideri il punto X^* definito dalla condizione

$$X^* - P = \frac{r^2}{\|X - P\|^2}(X - P) \qquad \left[\begin{matrix} X \mapsto X^* \text{ è detta la} \\ \text{trasformazione di Kelvin} \end{matrix}\right]$$

(a) Si mostri che il punto X^* è esterno alla sfera ($X^* \notin B \cup S$).
(b) Si faccia uno schizzo di B, S e di due punti corrispondenti X ed X^*, nel caso in cui $n = 2$, $r = 1$ e $P = \underline{O}$ (origine di un sistema di riferimento nello spazio euclideo).
(c) Si fissino un punto $X \in B$ ed il suo corrispondente X^*. Si mostri che il rapporto

$$\rho(X) = \frac{\|Y - X^*\|}{\|Y - X\|}$$

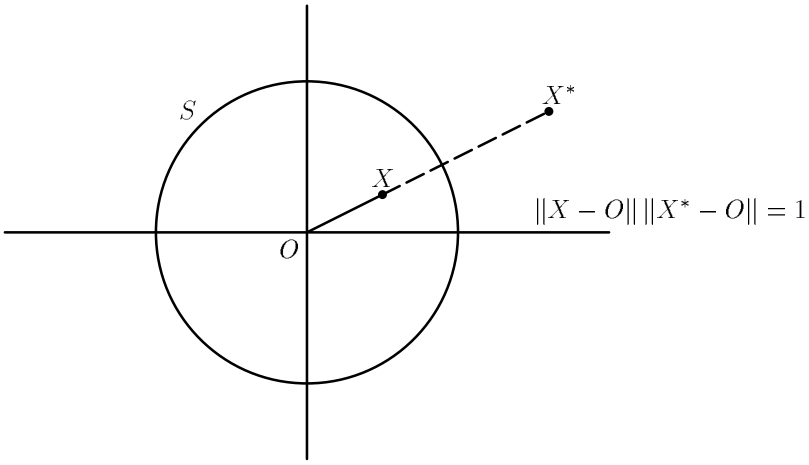
non dipende dalla scelta del punto Y sul bordo S della sfera.

Svolgimento: (a) In base alla definizione della trasformazione di Kelvin si ha

$$\|X^* - P\| = \frac{r^2}{\|X-P\|^2}\|X-P\| = r\,\frac{r}{\|X-P\|} > r,$$

perchè $X \in B$ se, e solo se, $\|X-P\| < r$.

(b) La situazione è approssimativamente illustrata nel seguente disegno.



(c) Sia fissato $Y \in S$ e si considerino i vettori $y = Y - P$, $x = X - P$ ed $x^* = X^* - P$. Si ha quindi $\dfrac{\|Y-X^*\|}{\|Y-X\|} = \dfrac{\|y-x^*\|}{\|y-x\|}$ e mostriamo che il quadrato di questo rapporto non dipende dalla scelta di Y, ma solo da X; a tale scopo indichiamo con g l'applicazione bilineare definita positiva dello spazio euclideo. In base alle relazioni tra x ed x^* che discendono dalla definizione della trasformazione di Kelvin, e grazie alla bilinearità di g, si ha

$$\begin{aligned}\frac{\|y-x^*\|^2}{\|y-x\|^2} &= \frac{g(y-x^*, y-x^*)}{g(y-x, y-x)} = \frac{g(y,y) - 2g(y,x^*) + g(x^*,x^*)}{g(y,y) - 2g(y,x) + g(x,x)} = \\ &= \frac{r^2 - 2\frac{r^2}{\|x\|^2} g(y,x) + \frac{r^4}{\|x\|^2}}{r^2 - 2g(y,x) + \|x\|^2} = \frac{r^2}{\|x\|^2},\end{aligned}$$

che è indipendente dalla scelta del punto $Y \in S$. □

ESERCIZIO 8 *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i tre punti P_1, P_2 e P_3, di coordinate affini*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini il sottoinsieme S formato dai punti X tali che il parallelepipedo determinato da P_1, P_2, P_3, X abbia volume (non-orientato) uguale a $2\sqrt{3}$.

(b) Si mostri che tale sottoinsieme è unione di due sottovarietà lineari disgiunte L_1 ed L_2 e si scrivano le equazioni cartesiane di tali sottovarietà.

(c) Si determini la distanza tra L_1 ed L_2.

Svolgimento: (a) Un punto dello spazio euclideo $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartiene ad S se, e solo se, il parallelepipedo determinato da P_1, P_2, P_3, X ha volume (non-orientato) uguale a $2\sqrt{3}$, e quindi se, e solo se,

$$|V(X - P_1, P_2 - P_1, P_3 - P_1)| = \left| \det \begin{pmatrix} x & y+2 & z-5 \\ 0 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \right| = |6x - 8y - 6z + 14| = 2\sqrt{3}.$$

(b) Quindi S è unione di due piani paralleli $\mathbb{L}_1$ ed $\mathbb{L}_2$, di equazioni cartesiane

$$\mathbb{L}_1 : 3x - 4y - 3z = -7 + \sqrt{3}, \quad \text{e} \quad \mathbb{L}_2 : 3x - 4y - 3z = -7 - \sqrt{3}.$$

(c) La distanza tra due sottovarietà lineari parallele è uguale alla distanza di un qualsiasi punto di una delle due varietà dall'altra. Preso dunque il punto $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{L}_1$, si ha

$$\delta_0(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2) = \delta_0(P, \mathbb{L}_2) = \frac{|3\frac{1}{\sqrt{3}} - 4\frac{7}{4} + 7 + \sqrt{3}|}{\sqrt{9 + 16 + 9}} = \sqrt{\frac{6}{17}}.$$

□

ESERCIZIO 9 *Sia t un numero complesso con parte immaginaria positiva e si consideri il punto P della retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ di coordinate omogenee $(t, 1)$. Si indichi con $\bar{P}$ il punto di coordinate $(\bar{t}, 1)$.*

(a) Si mostri che l'insieme H dei punti $(u, 1)$ di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tali che Im$(u) > 0$ è un disco di centro P nella retta affine complessa ottenuta scegliendo il punto $\bar{P}$ come iperpiano improprio.

(b) Si determini un riferimento proiettivo $\{\bar{P}, P, U\}$ affinchè il disco in questione abbia raggio 1.

Svolgimento: (a) Poichè t è un numero complesso con parte immaginaria positiva, i vettori $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \bar{t} \\ 1 \end{pmatrix}$ sono una base dello spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$. Dato $X = \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, allora

$$\begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \bar{t} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ove} \quad \alpha = \frac{u - \bar{t}}{t - \bar{t}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{t - u}{t - \bar{t}}.$$

Dunque la coordinata affine del punto X rispetto al riferimento proiettivo determinato dalla base $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \bar{t} \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{C}^2$, è $z = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{t-u}{u-\bar{t}} \in \mathbb{C}$. Dunque, posto $t = a + ib$ ed $u = x + iy$, con $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$|z|^2 = \frac{(a-x)^2 + (b-y)^2}{(x-a)^2 + (y+b)^2} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y > 0;$$

e quindi $X \in H$ se, e solo se, $|z| < 1$; ovvero se, e solo se, il punto X appartiene al disco di centro P e raggio 1 della retta affine complessa ottenuta togliendo il punto $\overline{P}$ a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

(b) In base a quanto visto nel punto precedente, il riferimento proiettivo $\{P, \overline{P}, U\}$ rispetto a cui H diventa un disco di raggio 1 del piano affine associato ha come punto unità il punto $U = \begin{pmatrix} t + \bar{t} \\ 2 \end{pmatrix}$.(*)

□

(*) Può essere un utile esercizio vedere quale sia l'effetto della scelta di un diverso punto unità sul raggio del disco corrispondente ad H.

ESERCIZIO 10 *Nel piano euclideo, si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione*

$$3x^2 + 2xy + y^2 - y = 0.$$

Dopo aver verificato che $\mathcal{C}$ è tangente all'asse x nell'origine, si determini (se esiste) un cerchio osculatore alla conica $\mathcal{C}$ nell'origine.

Si dica se esiste un cerchio iperosculatore alla conica $\mathcal{C}$ nell'origine.

Svolgimento: L'origine del piano è il punto di coordinate omogenee $O = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, che appartiene alla conica $\mathcal{C}$ ed ha come polare la retta di equazione $y = 0$, ovvero l'asse delle ascisse. Le coniche osculatrici a $\mathcal{C}$ in O, appartengono ai fasci determinati da $\mathcal{C}$ e dalle coniche degeneri di equazione affine $y(x-my) = 0$, al variare di m tra i numeri reali mentre il fascio iperosculatore ha come conica degenere l'asse delle ascisse con molteplicità 2, ovvero la conica di equazione affine $y^2 = 0$ ("$m = \infty$"!).

Vediamo se per qualche valore di $m \in \mathbb{R}$ vi sono circoli tra le coniche del fascio di equazione

$$\lambda(3x^2 + 2xy + y^2 - y) + \mu(yx - my^2) = 0;$$

ovvero se una tale conica passa per uno dei punti ciclici I, di coordinate omogenee $I = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$(*). La condizione di passaggio per il punto I dà la condizione $2\lambda(1 + i) + \mu(m + i) = 0$, che è equivalente al sistema lineare omogeneo $\begin{cases} 2\lambda + m\mu = 0 \\ 2\lambda + \mu = 0 \end{cases}$, che ha soluzioni non banali se, e solo se, $m = 1$.

Dunque il cerchio osculatore a $\mathcal{C}$ in O ha equazione $3x^2 + 3y^2 - y = 0$.

È facile quindi verificare che non vi possono essere circoli iperosculatori a $\mathcal{C}$ in O, perchè il fascio (reale) determinato da $\mathcal{C}$ e $y^2 = 0$ non contiene circoli. □

(*) E dunque passa anche per l'altro punto ciclico. Perchè?

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica
prova scritta del 28 settembre 1993 .

ESERCIZIO 1 *Si considerino, al variare di λ tra i numeri reali, i sistemi lineari:*

$$\Sigma_\lambda = \begin{cases} (\lambda-1)x_1 & +2x_2 & -\lambda x_3 & +2\lambda x_4 & = 0 \\ 2x_1 & & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ -(\lambda+1)x_1 & -\lambda x_2 & +(\lambda+2)x_3 & -2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +(\lambda-2)x_2 & -2x_3 & & = 0 \end{cases}.$$

(a) *Si indichi con S_λ l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_λ. Si determini al variare di λ la dimensione del sottospazio S_λ.*

(b) *Si dica se l'unione dei sottoinsiemi S_λ, al variare di λ, genera tutto $\mathbb{R}^4$. In caso contrario, si determinino le equazioni del sottospazio generato da tale unione.*

Svolgimento: (a) Indichiamo con A_λ la matrice dei coefficienti del sistema Σ_λ. Dal Teorema di Rouché-Capelli discende che $\dim S_\lambda = 4 - \operatorname{rk} A_\lambda$; e poichè $\det A_\lambda = 2(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3)$, si conclude $\dim S_\lambda = 0$ per $\lambda \neq 1, -2, 3$.

Consideriamo ora i valori di λ per cui S_λ ha dimensione positiva.

$\lambda = 1$. La matrice A_1 ha rango 3, come si può facilmente osservare considerando il minore che si ottiene cancellando la terza riga e la quarta colonna. In particolare, si ha $S_1 = L(v_1 + 2v_2 - 2v_4)$.

$\lambda = -2$. La matrice A_{-2} ha rango 3, come si può facilmente osservare considerando il minore che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna. In particolare, si ha $S_{-2} = L(2v_1 - v_2 + 4v_3)$.

$\lambda = 3$. La matrice A_3 ha rango 3, come si può facilmente osservare considerando il minore che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna. In particolare, si ha $S_3 = L(v_1 + 2v_2 + 2v_3)$.

Dunque $\dim S_\lambda = 1$ per $\lambda = 1, -2, 3$ e $\dim S_\lambda = 0$ altrimenti.

(b) Osserviamo che, qualunque sia λ, gli elementi di S_λ sono soluzioni dell'equazione $2x_1 - x_3 + x_4 = 0$ e dunque l'unione dei sottospazi S_λ non può generare tutto $\mathbb{R}^4$.

Inoltre si ha

$$\dim\left(\sum_{\lambda\in\mathbb{R}} S_\lambda\right) = \dim(S_1 + S_{-2} + S_3) = 3,$$

come si verifica direttamente osservando che i generatori di tali sottospazi sono linearmente indipendenti. Si conclude quindi che $\sum_{\lambda\in\mathbb{R}} S_\lambda$ è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $2x_1 - x_3 + x_4 = 0$. □

ESERCIZIO 2 *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^{2n}$, dotato dell'applicazione bilineare alternante*

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = {}^t x_1 y_2 - {}^t x_2 y_1,$$

ove x_1, x_2, y_1, y_2 sono elementi di $\mathbb{C}^n = M_{n\times 1}(\mathbb{C})$.

Siano A e B due matrici quadrate in $M_n(\mathbb{C})$ e si indichi con $W(A,B)$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^{2n}$, generato dalle colonne della matrice $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$.

(a) Si dia una condizione necessaria e sufficiente sulle matrici A e B in $M_n(\mathbb{C})$ affinchè il sottospazio $W(A,B)$ sia isotropo.

(b) Si dia una condizione necessaria e sufficiente sulla matrice $X \in M_n(\mathbb{C})$ affinchè $W(X,\mathbf{1})$ sia isotropo e $\mathbb{C}^{2n} = W(X,\mathbf{1}) \oplus W(\bar{X},\mathbf{1})$, ove $\bar{X}$ è la matrice che si ottiene da X coniugandone gli elementi. Si dica infine se, in tal caso, anche il sottospazio $W(\bar{X},\mathbf{1})$ è isotropo.

Svolgimento: (a) Gli elementi di $W(A,B)$ sono combinazione lineare delle colonne della matrice $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ e quindi si scrivono in modo unico come $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} z$ al variare di z in $\mathbb{C}^n$. Dunque $W(A,B)$ è un sottospazio isotropo se, e solo se, qualunque siano z e w in $\mathbb{C}^n$, si ha

$$\langle \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} z , \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} w \rangle = {}^t z ({}^t A, {}^t B) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} w = {}^t z ({}^t AB - {}^t BA) w = 0,$$

ove le matrici sono scritte a blocchi.

Poichè la condizione scritta sopra deve essere valida per qualunque coppia di vettori z e w in $\mathbb{C}^n$, si conclude che il sottospazio $W(A,B)$ è isotropo se, e solo se ${}^t AB - {}^t BA = 0$.

(b) Da quanto visto nel punto precedente $W(X,\mathbf{1})$ è isotropo se, e solo se ${}^t X - X = 0$, ovvero se, e solo se, X è una matrice simmetrica. In tal caso anche la matrice $\overline{X}$ è simmetrica e quindi anche $W(\overline{X},\mathbf{1})$ è isotropo.

Osserviamo che $\mathbb{C}^{2n} = W(X,\mathbf{1}) \oplus W(\bar{X},\mathbf{1})$ se, e solo se, la matrice $\begin{pmatrix} X & \overline{X} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ ha rango $2n$. Ed inoltre,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} X & \overline{X} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} &= \det \left[\begin{pmatrix} X & \overline{X} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \right] = \\ &= \det \begin{pmatrix} X - \overline{X} & \overline{X} \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = 2^n \det(\mathrm{Im} X), \end{aligned}$$

ove $\mathrm{Im}X$ indica la parte immaginaria della matrice X.

Si conclude che $\mathbb{C}^{2n} = W(X,\mathbf{1}) \oplus W(\bar{X},\mathbf{1})$ se, e solo se, $\mathrm{Im}X$ è una matrice non-degenere. □

ESERCIZIO 3 *Si consideri il campo $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale reale e si ponga su di esso l'applicazione bilineare $g\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, definita ponendo $g(z_1, z_2) = 2Re(z_1 z_2)$, per ogni coppia di numeri complessi z_1, z_2.*

(a) *Si mostri che g è bilineare e non-degenere.*

(b) *Si determini la matrice di g relativamente alla base $\{1, i\}$ di $\mathbb{C}$.*

(c) *Siano z_1 e z_2 due numeri complessi, linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$. Si scriva la matrice G di g relativamente all base $\{z_1, z_2\}$ e si mostri che vale l'identità*

$$\det G = \left[\det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{pmatrix}\right]^2.$$

Svolgimento: (a) L'applicazione g è la composizione del prodotto di $\mathbb{C}$, che è un'applicazione bilineare, con l'applicazione da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$ che associa ad ogni numero complesso la sua parte reale, che è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare. Dunque g è un'applicazione $\mathbb{R}$-bilineare.

Inoltre, dato un numero complesso z, diverso da zero, allora z o iz oppure entrambi, hanno parte reale non nulla e quindi g è non-degenere.

(b) La matrice di g, relativamente alla base data, è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c) Ricordiamo che, per qualsiasi numero complesso z, si ha $2\mathrm{Re}(z) = z + \overline{z}$. Dunque, la matrice di g, relativamente alla base $\{z_1, z_2\}$, è

$$G = \begin{pmatrix} z_1^2 + \overline{z}_1^2 & z_1 z_2 + \overline{z_1 z_2} \\ z_1 z_2 + \overline{z_1 z_2} & z_2^2 + \overline{z}_2^2 \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce

$$\begin{aligned} \det G &= (z_1^2 + \overline{z}_1^2)(z_2^2 + \overline{z}_2^2) - (z_1 z_2 + \overline{z_1 z_2})^2 = \\ &= z_1^2 \overline{z}_2^2 + \overline{z}_1^2 z_2^2 - 2 z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = \\ &= (z_1 \overline{z}_2 - z_2 \overline{z}_1)^2 = \left[\det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \overline{z}_1 & \overline{z}_2 \end{pmatrix}\right]^2. \end{aligned}$$

□

ESERCIZIO 4 *Sia $P \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice diagonalizzabile. Si mostri che $\mathbf{1} + P^2$ è invertibile.*

Svolgimento: Siano dunque X una matrice invertibile e D una matrice diagonale tali che $P = X^{-1}DX$. Allora si ha $P^2 = X^{-1}D^2X$ e quindi $\mathbf{1} + P^2 = X^{-1}(\mathbf{1} + D^2)X$. Dunque $\mathbf{1} + P^2$ è invertibile se, e solo se, $\mathbf{1} + D^2$ lo è. Si conclude facilmente osservando che $\mathbf{1} + D^2$ è una matrice diagonale, avente sulla diagonale numeri reali maggiori o uguali a 1 e quindi invertibile. □

ESERCIZIO 5 *Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 4. Si determinino (a meno di similitudine) le matrici di tutti gli automorfismi di V che coincidono con il proprio inverso.*

Svolgimento: Se un automorfismo ϕ di V coincide con il proprio inverso, il suo polinomio minimo divide $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. Dunque vi sono tre possibilità per il polinomio minimo degli automorfismi cercati, ovvero

$$\lambda_1(X) = X - 1, \quad \lambda_2(X) = X + 1, \quad \lambda_3(X) = X^2 - 1.$$

In ognuno dei tre casi il polinomio minimo è prodotto di fattori lineari distinti e quindi ogni automorfismo con un tale polinomio minimo è diagonalizzabile. Nei primi due casi il polinomio minimo determina completamente l'automorfismo corrispondente, essendo diagonalizzabile e con un unico autovalore. Nel caso in cui il polinomio minimo sia $\lambda_3(X)$, le dimensioni degli autospazi relativi ai due possibili autovalori possono variare da 1 a 3 e quindi vi sono tre diverse possibilità per un automorfismo avente $\lambda_3(X)$ come polinomio minimo.

Possiamo quindi concludere che vi sono cinque automorfismi soddisfacenti alla condizione data, le cui matrici, a meno di similitudine, sono

$$D_1 = \mathbf{1}_4, \quad D_2 = -\mathbf{1}_4, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 6 *Si determini la forma canonica di Jordan relativa all'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ che, rispetto alla base canonica, ha matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si determini inoltre una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan.

Svolgimento: Il polinomio caratteristico di ϕ è $\det(A - x) = (x+2)^4$ ed

$$A + 2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ha rango 3. Dunque ϕ ha il solo autovalore -2 con molteplicità 4 e nullità 1. Si conclude che la forma di Jordan della matrice di ϕ è

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Indichiamo con $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Calcolando $(A+2)^2$ e $(A+2)^3$, si verifica facilmente che il vettore e_2 appartiene a $\ker(\phi+2)^4$, ma non a $\ker(\phi+2)^3$. Se ne deduce che una base rispetto a cui ϕ ha matrice J è

$$(\phi+2)^3 e_2 = -e_3, \quad (\phi+2)^2 e_2 = 3e_3 - e_1, \quad (\phi+2)e_2 = 3e_1 + 2e_3 - e_4, \quad e_2.$$

□

ESERCIZIO 7 *Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri l'affinità di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}-1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

rispetto ad un sistema di riferimento ortonormale.

(a) Si mostri che A è la matrice di un'isometria dello spazio euclideo che ammette una retta r fatta tutta di punti uniti.

(b) Si trovi l'equazione delle retta r di cui al punto precedente.

(c) Si dica se A è la matrice di una rotazione di asse r ed in caso affermativo si determini l'angolo di rotazione.

Svolgimento: Indichiamo come di consueto con A' la matrice che si ottiene da A cancellando la prima riga e la prima colonna (la matrice che descrive l'azione dell'affinità sui vettori dello spazio affine). Poichè A' è una matrice ortogonale, ovvero ${}^tA'A' = \mathbf{1}$, si conclude che A è un'isometria dello spazio affine.

Un punto P di coordinate (omogenee) $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è unito se, e solo se, $AP = P$, ovvero se, e solo se, le coordinate di P soddisfano al sistema lineare $(A - \mathbf{1})P = 0$ che è riga-equivalente a

$$\begin{cases} (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)x - \frac{1}{\sqrt{2}}z = -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1)z = 1 - \sqrt{2} \end{cases}.$$

Poichè la matrice incompleta sistema ha rango 2, si tratta dell'equazione cartesiana di una retta r tutta fatta di punti uniti relativamente all'isometria di matrice A. Ciò conclude la verifica di (a) e (b).

(c) È immediato verificare che r è una retta passante per il punto $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ e parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (si fa sempre uso di coordinate omogenee). Dunque, l'isometria in questione è una rotazione se, e solo se, la sua restrizione ad un qualunque piano ortogonale all'asse r è una rotazione di tale piano (perchè?).

In ogni piano ortogonale all'asse vi è esattamente un punto unito e quindi è sufficiente considerare la restrizione dell'isometria al sottospazio direttore del piano. Il sottospazio direttore di ogni piano ortogonale all'asse è generato dai vettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, che formano una base ortonormale di tale spazio e la matrice dell'isometria ristretta a tale base è $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, che è la matrice di una rotazione di angolo $\vartheta = \frac{\pi}{4}$. □

ESERCIZIO 8 *Date due curve nel piano euclideo, incidenti in un punto P (non-singolare), si chiama angolo tra le due curve in P, l'angolo (non-orientato) formato dalle rette tangenti alle due curve in quel punto. Si determinino quindi le intersezioni tra le coniche*

$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y = 0 \qquad e \qquad \mathcal{D}: y^2 - 5x^2 + 2x + 2y = 0$$

e si calcolino gli angoli formati dalle due curve in tali punti.

Svolgimento: Per determinare le intersezioni tra le due coniche è utile determinare una conica degenere del fascio determinato da $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, in modo da ridurre il problema alla determinazione dell'intersezione tra una conica e due rette. Sommando le equazioni delle due coniche si ottiene la conica degenere di equazione $y^2 - 2x^2 - xy = (y + x)(y - 2x) = 0$; quindi i punti base del fascio, ovvero le intersezioni tra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, sono i punti di coordinate affini $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con molteplicità 3, e $P = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$. In O le due coniche hanno la stessa tangente e quindi $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ formano un angolo nullo. In P le due tangenti sono

$$t_{\mathcal{C}} : 5x - 7y - 18 = 0 \qquad \text{e} \qquad t_{\mathcal{D}} : 29x - 13y - 18 = 0;$$

quindi il coseno dell'angolo formato dalle due curve in P è uguale a

$$\cos\vartheta = \frac{|v \cdot w|}{\|v\|\,\|w\|} = \frac{236}{\sqrt{67710}},$$

ove v e w sono i vettori direttori delle due rette $t_{\mathcal{C}}$ e $t_{\mathcal{D}}$. □

ESERCIZIO 9 *Nel piano euclideo si classifichi la conica $\mathcal{C}$ di equazione*

$$7x^2 + \frac{11}{2}y^2 + 2xy + 16x + 13y + 12 = 0;$$

e si determinino assi, vertici, fuochi, l'eventuale centro e la forma canonica di $\mathcal{C}$.

Svolgimento: La matrice della conica $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 16 & 13 \\ 16 & 14 & 2 \\ 13 & 2 & 11 \end{pmatrix},$$

e si ha $\det A = -2 \cdot 3 \cdot 5^3$, $\det A' = 150$; dunque $\mathcal{C}$ è un'ellisse (non-degenere).

Il centro C è la soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} 7x + y = -8 \\ 2x + 11y = -13 \end{cases}, \qquad \text{ovvero} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico della matrice A' è $p_A(x) = \det(A' - x) = x^2 - 25x + 150$, e quindi gli autovalori di A' sono 10 e 15, i cui corrispondenti autovettori sono le direzioni degli assi, ovvero i punti della retta impropria di coordinate omogenee

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

e quindi gli assi dell'ellisse $\mathcal{C}$ sono le rette di equazioni

$$h_1 : x - 2y - 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad h_2 : 2x + y + 3 = 0;$$

ove h_2, la cui direzione corrisponde all'autovalore minore, è l'asse focale dell'ellisse, mentre h_1 è l'asse trasverso. I coefficienti della forma canonica dell'equazione di $\mathcal{C}$ sono gli autovalori di A', moltiplicati per $-\frac{\det A'}{\det A}$, e quindi la forma canonica è $2X^2 + 3Y^2 = 1$.

I fuochi dell'ellisse si trovano sull'asse h_2, a distanza $\frac{1}{\sqrt{6}}$ dal centro C, e quindi sono i punti $F_1 = -\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} \sqrt{30}-1 \\ 2+\sqrt{30} \end{pmatrix}$ ed $F_2 = -\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} \sqrt{30}+1 \\ \sqrt{30}-2 \end{pmatrix}$.(*) I vertici si trovano sugli assi h_1 ed h_2 a distanza $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dal centro C, rispettivamente. Lasciamo al lettore il compito di calcolarne le coordinate. □

ESERCIZIO 10 *Si mostri che, dato un parallelogramma nel piano affine reale, non vi sono parabole non degeneri passanti per tutti e quattro i vertici, mentre vi sono sempre sia ellissi che iperboli soddisfacenti a tale condizione.*

Svolgimento: Si scelga un riferimento nel piano affine per cui i quattro vertici del parallelogramma abbiano coordinate affini $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (è possibile? perchè?). Rispetto a tale riferimento, due coniche (degeneri) del fascio hanno equazioni $x(x-1) = 0$ ed $y(y-1) = 0$ e quindi la matrice di una generica conica del fascio è

$$A_{\lambda,\mu}\begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ \lambda & -2\lambda & 0 \\ \mu & 0 & -2\mu \end{pmatrix}.$$

È immediato verificare che le coniche del fascio sono tangenti alla retta impropria solo se uno dei parametri omogenei λ e μ è nullo ed in entrambo i casi si hanno coniche degeneri. Inoltre, le coniche del fascio sono ellissi se i due parametri hanno lo stesso segno, mentre sono iperboli se i due parametri sono di segno opposto. □

(*) Ricordiamo che in un'ellisse di equazione canonica $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$, con $0 < \alpha < \beta$, i fuochi si trovano sull'asse focale, a distanza $f = \sqrt{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}$ dal centro. I vertici sull'asse focale han distanza $\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$ dal centro, mentre i vertici sull'asse trasverso han distanza $\sqrt{\frac{1}{\beta}}$ dal centro.

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica

prova scritta del 4 febbraio 1994 .

ESERCIZIO 1 *Sia data una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dello spazio vettoriale reale V e si denoti, come di consueto, con $\{v_1^*, v_2^*, v_3^*, v_4^*\}$ la base duale di V^*. Si consideri al variare di λ tra i numeri reali, il sottospazio S_λ di V^* generato dai vettori*

$$\begin{aligned} (\lambda-1)v_1^* + 2v_2^* - \lambda v_3^* + 2\lambda v_4^*, \qquad & 2v_1^* - v_3^* + v_4^*, \\ -(\lambda+1)v_1^* - \lambda v_2^* + (\lambda+2)v_3^* - 2v_4^*, \qquad & 2v_1^* + (\lambda-2)v_2^* - 2v_3^*. \end{aligned}$$

(a) Si determini al variare di λ la dimensione del sottospazio $S_\lambda^\perp$ di V.
(b) Si determini l'intersezione di tutti i sottospazi S_λ di V^*.

Svolgimento: (a) Un vettore $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4$ di V appartiene al sottospazio $S_\lambda^\perp$ se, e solo se, le sue coordinate sono soluzioni del sistema lineare omogeneo di matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 & -\lambda & 2\lambda \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -\lambda-1 & -\lambda & \lambda+2 & -2 \\ 2 & \lambda-2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $\dim S_\lambda^\perp = \dim V - \operatorname{rk} A_\lambda$; e poichè $\det A_\lambda = 2(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3)$, si ottiene $\dim S_\lambda^\perp = 0$ per $\lambda \neq 1, -2, 3$.

Consideriamo ora i valori di λ per cui $S_\lambda^\perp$ ha dimensione positiva.

$\lambda = 1$. La matrice A_1 ha rango 3, come si può facilmente osservare considerando il minore che si ottiene cancellando la terza riga e la quarta colonna. Infatti si ha $\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 8$, ed inoltre $S_1^\perp = L(v_1 + 2v_2 - 2v_4)$.

$\lambda = -2$. La matrice A_{-2} ha rango 3, come si può facilmente osservare considerando il minore che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna. Infatti si ha $\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = -12$, ed inoltre $S_{-2}^\perp = L(2v_1 - v_2 + 4v_3)$.

$\lambda = 3$. La matrice A_3 ha rango 3, come si può facilmente osservare considerando il minore che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna. Infatti si ha $\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 3$, ed inoltre $S_3^\perp = L(v_1 + 2v_2 + 2v_3)$.

In conclusione, si ha $\dim S_\lambda^\perp = 1$ per $\lambda = 1, -2, 3$ e $\dim S_\lambda^\perp = 0$ altrimenti.

(b) Osserviamo che, qualunque sia λ, il vettore $2v_1^* - v_3^* + v_4^*$ è contenuto in S_λ e quindi l'intersezione di tali sottospazi deve contenere il vettore detto.

Inoltre, dalle usuali relazioni tra sottospazi ed i loro ortogonali, si ha

$$\bigcap_{\lambda\in\mathbb{R}} S_\lambda = \left(\sum_{\lambda\in\mathbb{R}} S_\lambda^\perp \right)^\perp = (S_1^\perp + S_{-2}^\perp + S_3^\perp)^\perp.$$

Utilizzando, ad esempio, i generatori dei sottospazi $S_1^\perp$, $S_{-2}^\perp$ e $S_3^\perp$, descritti nel punto precedente si verifica facilmente (come?) che $\dim(S_1^\perp + S_{-2}^\perp + S_3^\perp) = 3$ e quindi si può concludere che $\bigcap_{\lambda\in\mathbb{R}} S_\lambda = L(2v_1^* - v_3^* + v_4^*)$. □

ESERCIZIO 2 *Al variare di n tra gli interi positivi, si indichi con A_n la matrice quadrata di ordine n del tipo*

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & .. & .. & .. & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & .. & .. & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & .. & .. & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & .. & .. & .. & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & .. & .. & .. & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si dimostri che per ogni intero positivo n si ha $\det A_n = n + 1$.*
(b) *Si indichi con g_n l'applicazione bilineare simmetrica di $\mathbb{R}^n$ di matrice A_n rispetto alla base canonica. Si dica per quali valori di n esiste una base ortonormale relativamente a g_n.*

Svolgimento: (a) È immediato verificare che $\det A_n = n + 1$ quando $n = 1$ oppure $n = 2$. Cerchiamo quindi di dimostrare la formula generale facendo induzione sull'indice n. Supponiamo perciò che la formula sia vera per tutti i valori strettamente più piccoli di n e dimostriamo la sua validità per n (che non è restrittivo supporre maggiore o uguale a 3).

Considerando lo sviluppo di Laplace del determinante di A_n fatto secondo la prima riga della matrice, si ottene la relazione ricorsiva

$$\det A_n = 2 \det A_{n-1} - \det A_{n-2}.$$

Per l'ipotesi induttiva, se ne deduce $\det A_n = 2n - (n - 1) = n + 1$, che è quanto volevamo dimostrare.

(b) Qualunque sia n la matrice A_n è simmetrica e la catena dei minori principali è uguale a $2, \dots, n+1$, che sono tutti numeri positivi. Dunque, qualunque sia l'intero positivo n, l'applicazione bilineare g_n è definita positiva e perciò esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ relativamente a g_n. □

ESERCIZIO 3 *Sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base dello spazio vettoriale reale V e si consideri l'applicazione bilineare simmetrica $g: V \times V \to \mathbb{R}$ definita ponendo*

$$\begin{gathered} g(v_1, v_1) = 1, \quad g(v_1, v_2) = -2, \quad g(v_1, v_3) = 0, \quad g(v_1, v_4) = 0, \quad g(v_2, v_2) = -1, \\ g(v_2, v_3) = 1, \quad g(v_2, v_4) = 3, \quad g(v_3, v_3) = 2, \quad g(v_3, v_4) = 0, \quad g(v_4, v_4) = -4. \end{gathered}$$

(a) *Si determini una base ortogonale di V relativamente a g e si calcoli l'indice di inerzia di tale applicazione.*
(b) *È vero o falso che esiste una base ortonormale di V relativamente a g?*

Svolgimento: (b) Poichè $g(v_2, v_2) = -1 < 0$, l'applicazione bilineare g non è definita positiva e quindi non può esistere una base ortonormale di V relativamente a g.

(a) Osserviamo che i vettori v_1, v_3 e v_4 sono non-isotropi e a due, a due, ortogonali. Dunque una base ortogonale esiste ed è determinata se esibiamo un vettore non-isotropo v, appartenente a $L(v_1, v_3, v_4)^\perp$. In particolare, da ciò discende che g è non-degenere.

Un vettore $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4$ di V appartiene ad $L(v_1, v_3, v_4)^\perp$ se, e solo se, le sue coordinate sono soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_2 - 4x_4 = 0 \end{cases}.$$

Dunque $L(v_1, v_3, v_4)^{\perp} = L(v)$, ove $v = 8v_1 + 4v_2 - 2v_3 + 3v_4$, e tale vettore non è isotropo perchè $g(v, v) = -52$.

Infine, osserviamo che sui vettori della base ortogonale $\{v_1, v_3, v_4, v\}$, g assume due valori positivi e due valori negativi, se ne deduce che $V = L(v_1, v_3) \oplus L(v_4, v)$ è una decomposizione del tipo descritto nel Teorema di Sylvester, e quindi $i(g) = 0$. □

ESERCIZIO 4 *Sia T una matrice simmetrica di ordine n, ad elementi in $\mathbb{C}$. Si mostri che la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} T & 1 \\ 1 & -\overline{T} \end{pmatrix}$$

è invertibile.

Svolgimento: Si considerino la matrice $\overline{A}$ ottenuta coniugando tutti gli elementi della matrice A ed il prodotto

$$A\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 + T\overline{T} & 0 \\ 0 & 1 + T\overline{T} \end{pmatrix}.$$

Dunque, A è invertibile se, e solo se, la matrice $1 + T\overline{T}$ lo è.

Poichè T è una matrice simmetrica, la matrice $H = T\overline{T}$ è hermitiana(*); ed è la matrice di una forma hermitiana semidefinita positiva di $\mathbb{C}^n$, essendo

$${}^t z H \overline{z} = {}^t(Tz)\,\overline{(Tz)} \geq 0 \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}^n.$$

Quindi, per concludere che $1+T\overline{T}$ è invertibile, è sufficiente osservare che la matrice identica rappresenta una forma hermitiana definita positiva e che la somma di una forma hermitiana definita positiva con una semidefinita positiva è necessariamente una forma hermitiana definita positiva e quindi la sua matrice è non-degenere □

ESERCIZIO 5 *Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 9. Si determinino (se esistono) tutti gli endomorfismi ϕ di V soddisfacenti alle condizioni:*

$$\dim\ker(\phi - 2)^3 = 3, \qquad \dim\ker(\phi - 2) = 1, \qquad \dim\ker(\phi - 3)^2 = 4,$$
$$\dim\ker(\phi - 3) = 2, \qquad \dim\operatorname{im}\phi^2 = 7.$$

Svolgimento: Un endomorfismo $\phi : V \to V$, soddisfacente alle condizioni poste, deve avere come autovalori i numeri reali 0, 2 e 3, con molteplicità 2, 3 e 4 rispettivamente. Dunque, il suo polinomio caratteristico è uguale a

$$p_\phi(x) = x^2(x-2)^3(x-3)^4.$$

Per il polinomio minimo di un tale ϕ vi sono due possibilità compatibili con tutte le condizioni poste; ovvero

$$\lambda(x) = x(x-2)^3(x-3)^2 \qquad \text{e} \qquad \lambda'(x) = x^2(x-2)^3(x-3)^2.$$

Le matrici di Jordan, scritte a blocchi, che corrispondono ai diversi polinomi minimi sono, rispettivamente

$$\begin{pmatrix} J_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} J_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_0' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix},$$

(*) Ricordiamo che una matrice H è hermitiana se, e solo se, è la matrice di una forma hermitiana su $\mathbb{C}^n$ rispetto alla base canonica; ovvero se, e solo se, ${}^tH = \overline{H}$.

ove

$$J_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_0' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, vi sono solo due endomorfismi di V soddisfacenti alle condizioni date. □

ESERCIZIO 6 *Si consideri l'insieme Σ di tutte le matrici simmetriche di ordine n, ad elementi in $\mathbb{C}$.*

(a) Data una matrice $S \in \Sigma$ si mostri che la matrice $S\overline{S}$ ha tutti gli autovalori reali non-negativi.

(b) Data una matrice $S \in \Sigma$ si indichi con λ_S il massimo tra gli autovalori di $S\overline{S}$, e si definisca l'applicazione $|\ \ |: \Sigma \to \mathbb{R}$ ponendo $|S| = \sqrt{\lambda_S}$. Dato un vettore $z \in \mathbb{C}^n$, si consideri l'usuale norma $\|z\| = \sqrt{{}^t\overline{z}z}$. Si mostri che, dato $S \in \Sigma$, il numero reale $|S|$ è il valore massimo della funzione $\phi_S(z) = \frac{\|Sz\|}{\|z\|}$ quando z varia in $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

(c) Si mostri che l'applicazione $|\ \ |$ gode delle seguenti proprietà:

(i) $|S| = 0 \Leftrightarrow S = 0$;

(ii) $|S' + S| \leq |S'| + |S|$;

(iii) per ogni numero complesso c si ha $|cS| = |c|\,|S|$, ove $|c|$ indica l'usuale valore assoluto in $\mathbb{C}$.

Svolgimento: Fissata una matrice $S \in \Sigma$ si osservi che la funzione $\phi_S(z)$ è continua ed assume valori reali non-negativi; inoltre, soddisfa alla condizione $\phi_S(\alpha z) = \phi_S(z)$, per ogni $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Quindi è sufficiente considerare la restrizione della funzione ϕ_S al sottoinsieme $B = \{\, z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| = 1 \,\}$.

Poichè B è compatto (è chiuso e limitato in $\mathbb{C}^n$) e ϕ_s è una funzione continua, esiste un valore massimo per ϕ_s in B (Teorema di Weierstrass) e tale massimo λ è anche un massimo per la funzione su tutto $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

Sia dunque $v \in B$, tale che $\phi_S(v) = \lambda \geq \phi_S(z)$, per ogni $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Vogliamo mostrare che v è un autovettore di $S\overline{S}$, relativo all'autovalore $\lambda^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Indichiamo con $\langle -, - \rangle$ l'usuale forma hermitiana di $\mathbb{C}^n$, ovvero $\langle z, w \rangle = {}^t\overline{z}w$, e con $(-,-)_S$ la forma hermitiana

$$(z, w)_S = \langle S\overline{S}z, w \rangle = \langle z, S\overline{S}w \rangle = {}^t\overline{z}S\overline{S}w.$$

In particolare, si ha $\phi_S^2(z) = \dfrac{(z,z)_S}{\langle z, z \rangle}$, e v è un punto di massimo anche per ϕ_S^2.

Consideriamo un vettore $x \in \mathbb{C}^n$ e la funzione

$$f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{definita ponendo} \quad f_x(t) = \phi_S^2(v + tx).$$

Poichè f_x è una funzione derivabile (perchè?) ed ha un massimo nel punto $t = 0$, deve aversi $f_x'(0) = 0$. Vedremo che questa condizione, valida per ogni funzione f_x, implica che v sia un autovettore di $S\overline{S}$, relativo all'autovalore $\lambda^2 = \phi_S^2(v)$.

Si ha quindi

$$\begin{aligned} f_x'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\phi_S^2(v+tx) - \phi_S^2(v)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{(v+tx, v+tx)_S}{\langle v+tx, v+tx \rangle} - \lambda^2 \right) = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t[(v,x)_S - \langle \lambda^2 v, x \rangle + (x,v)_S - \langle x, \lambda^2 v \rangle] + o(t)}{t\langle v+tx, v+tx \rangle} = \\ &= \langle S\overline{S}v - \lambda^2 v, x \rangle + \langle x, S\overline{S}v - \lambda^2 v \rangle = 0. \end{aligned}$$

Poichè ciò accade qualunque sia $x \in \mathbb{C}^n$, si conclude che $S\overline{S}v = \lambda^2 v$ che è quanto volevamo.

Le considerazioni fatte in $\mathbb{C}^n$ si possono ripetere per la restrizione della funzione ϕ_S al sottospazio $L(v)^\perp$, da cui si deduce che esiste un autovettore $v' \in L(v)^\perp$ per $S\overline{S}$, relativo all'autovalore reale λ', con $0 \leq \lambda'^2 \leq \lambda^2$. Il ragionamento può continuare in $L(v,v')^\perp$ portando a costruire una base di $\mathbb{C}^n$ tutta costituita di autovettori per l'applicazione lineare $S\overline{S}$, a due a due ortogonali e di lunghezza 1 relativamente alla forma $\langle -, - \rangle$, ed ognuno degli autovettori è in corrispondenza ad un autovalore reale non-negativo ed il massimo tra tali autovalori è proprio $\lambda^2 = \max_{z\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \phi_S^2(z)$.

Ciò conclude la dimostrazione di (a) e (b).

Possiamo quindi concludere con la dimostrazione di (c). Per quanto visto, se $|S| = 0$, allora il massimo degli autovalori di $S\overline{S}$ è uguale a 0 e quindi, essendo diagonalizzabile, $S\overline{S} = 0$; da cui discende $S = 0$ (perchè?) e prova (i). Per quanto riguarda (ii), si osservi che, per ogni $z \in \mathbb{C}^n \setminus\{0\}$, si ha

$$\phi_{S+S'}(z) = \frac{\|Sz + S'z\|}{\|z\|} \leq \phi_S(z) + \phi_{S'}(z) \leq |S| + |S'|.$$

Infine, per quanto concerne (iii), si osservi che, per ogni $z \in \mathbb{C}^n \setminus\{0\}$ ed ogni $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, si ha

$$\phi_{cS}(z) = \frac{\|cSz\|}{\|z\|} = \frac{|c|\,\|Sz\|}{\|z\|} = |c|\,\phi_S(z).$$

Ciò conclude la dimostrazione(*). $\square$

ESERCIZIO 7 *Nello spazio proiettivo tridimensionale reale si considerino le tre rette r, s e t di equazioni omogenee*

$$r : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_0 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_0 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases},$$

ed i punti R_1 ed R_2 della retta r, di coordinate omogenee

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino le rette u_1 ed u_2, passanti rispettivamente per R_1 ed R_2 e secanti sia s che t.
(b) Si mostri che le due rette u_1 ed u_2 sono sghembe.

Svolgimento: (a) Le tre rette r, s e t sono a due, a due sghembe (fare la verifica!); dunque, fissato comunque un punto R della retta r, i due piani $R+s$ e $R+t$ si intersecano in una retta, perchè, se così non fosse, i due piani dovrebbero coincidere (questa è l'unica possibilità alternativa. Perchè?); le rette s e t sarebbero complanari e dunque non potrebbero essere sghembe. Le rette cercate sono quindi

$$u_1 = (R_1 + s) \cap (R_1 + t) : \begin{cases} 2(x_1 - x_3) - x_2 = 0 \\ x_1 - 2(x_0 - x_2 + 2x_3) = 0 \end{cases}$$

(*) Il lettore più attento è invitato ad osservare che gli argomenti della dimostrazione di (a) e (b) si possono ripetere sostituendo ad $S\overline{S}$ una qualsiasi matrice hermitiana H, non necessariamente definita, ed a ϕ_S^2 la funzione $\psi_H(z) = \frac{\langle Hz,z\rangle}{\langle z,z\rangle}$, ottenendo così una dimostrazione del fatto che esiste una matrice U, tale che ${}^t\overline{U} = U^{-1}$ e ${}^t\overline{U}HU = \Delta$, ove Δ è una matrice diagonale ad elementi reali. Questa è la generalizzazione alle matrici hermitiane del teorema spettrale per le matrici simmetriche reali.

e

$$u_2 = (R_2 + s) \cap (R_2 + t) : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}.$$

(b) Le rette u_1 ed u_2 sono sghembe, ovvero $u_1 \cap u_2 = \emptyset$ (vuoto proiettivo), perchè la loro intersezione è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$u_1 \cap u_2 : \begin{cases} 2(x_1 - x_3) - x_2 = 0 \\ x_1 - 2(x_0 - x_2 + 2x_3) = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases},$$

che ha rango 4. □

ESERCIZIO 8 *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino, al variare di t tra i numeri reali, le rette*

$$r_t : \begin{cases} 2tx - z = 2t \\ y - 3tz = t \end{cases} \qquad ed \qquad s : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determini al variare di t la distanza tra le rette r_t ed s e si dica se tale distanza resta limitata oppure diverge.

(b) Si dica se, al variare di t tra i numeri reali, le rette r_t sono tutte contenute in un medesimo piano.

Svolgimento: (a) La retta s passa per l'origine $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, mentre, al variare di t, la retta r_t passa per il punto $P_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 6t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$.

Dunque, al variare di t, la distanza tra le due rette è uguale a

$$d(t) = \delta_0(r_t, s) = \frac{|V(P_t - O, v_t, w)|}{\|v_t \times w\|}.$$

Osserviamo che nessun valore di t rende i vettori v_t e w paralleli, e quindi il denominatore $\|v_t \times w\|$ non è mai nullo e la funzione $d(t)$ è quindi definita e continua per ogni valore di t. Dunque, se $\lim_{t \to \infty} d(t)$ è finito, $d(t)$ è una funzione limitata.

Per calcolare il limite in questione diamo una descrizione analitica più precisa della funzione $d(t)$. Siano

$$f(t) := V(P_t - O, v_t, w) = \det \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 1 & 6t^2 & 2t \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = (18t^2 + 4t) + t(3 + 2t),$$

e

$$g(t) := \|v_t \times w\| = \sqrt{(18t^2 + 4t)^2 + (3 + 2t)^2 + (2 - 6t^2)^2}$$

e quindi $d(t) = \dfrac{|f(t)|}{g(t)}$; da cui si ottiene

$$\lim_{t \to \infty} d(t) = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

(b) La risposta è negativa come si può constatare facilmente osservando che le rette

$$r_0 : \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad r_1 : \begin{cases} 2x - z = 2 \\ y - 3z = 1 \end{cases}$$

sono sghembe e non possono quindi essere complanari. Infatti, il rango della matrice completa del sistema che descrive $r_0 \cap r_1$ è uguale a 4, mentre il rango della matrice del sistema incompleto è uguale a 3. □

ESERCIZIO 9 *Nel piano euclideo si classifichi la conica $\mathcal{C}$ di equazione*

$$x^2 + y^2 - 2xy - 6x - 10y + 9 = 0;$$

e si determinino assi, vertici, fuochi, l'eventuale centro e la forma canonica di $\mathcal{C}$.

Svolgimento: La matrice della conica $\mathcal{C}$, nel riferimento dato, è uguale ad

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -5 \\ -3 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

ove $\det A = -64$ e $\det A' = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$. Dunque $\mathcal{C}$ è una parabola (non-degenere).

La direzione dell'asse è il punto improprio P_∞ corrispondente all'autovettore relativo all'autovalore 0 di A', ovvero ad un generatore del nucleo di A'; mentre l'asse è la polare del punto (improprio) Q_∞ corrispondente alla direzione ortogonale (nel senso della metrica euclidea) a P_∞. Dunque

$$P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e l'asse ha equazione } h : x - y + 1 = 0.$$

Il vertice V della parabola $\mathcal{C}$ è il punto proprio di intersezione tra l'asse h ed il supporto della conica $\mathcal{C}$, ovvero la soluzione del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy - 6x - 10y + 9 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}, \quad \text{e quindi} \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il fuoco F della parabola è il punto di intersezione tra le tangenti isotrope a $\mathcal{C}$ diverse dalla retta impropria. Indicati con I ed $\overline{I}$ i punti ciclici, ovvero $I = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\overline{I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$, si osservi che la tangente t a $\mathcal{C}$ passante per I, deve contenere il punto proprio di intersezione tra il supporto (totale) di $\mathcal{C}$ e la polare di I (perchè?). Mentre la tangente a $\mathcal{C}$ passante per $\overline{I}$ deve essere la retta $\overline{t}$ avente come coefficienti dell'equazione cartesiana, i coniugati dei coefficienti dell'equazione di t; perchè $\mathcal{C}$ ha equazione reale.

Dunque, la polare di I è la retta $p : x - y + 1 - 4i = 0$, che interseca il supporto di $\mathcal{C}$ (nel punto improprio e) in $Q = \begin{pmatrix} 2i - 1 \\ -2i \end{pmatrix}$; la polare di Q è quindi la retta

$$t : (1 - i)x + (1 + i)y = 3 + i.$$

Si conclude che le coordinate del fuoco sono le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} (1 - i)x + (1 + i)y = 3 + i \\ (1 + i)x + (1 - i)y = 3 - i \end{cases} \quad \text{che è riga-equivalente a} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

e quindi $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

L'autovalore non-nullo c di A' è uguale a 2 e quindi il coefficiente di X^2 nella forma canonica dell'equazione di $\mathcal{C}$ è uguale a c, moltiplicato per $\sqrt{-\frac{c}{\det A}}$. Dunque la forma canonica dell'equazione di $\mathcal{C}$ è $2Y = \frac{1}{2\sqrt{2}}X^2$. □

ESERCIZIO 10 *Sia $\mathcal{F}$ un fascio di coniche nel piano proiettivo e sia r una retta non passante per nessuno dei punti-base del fascio $\mathcal{F}$. Si mostri che nel fascio $\mathcal{F}$ vi sono al più due coniche tangenti la retta r.*

Svolgimento: Fissiamo un riferimento nel piano proiettivo per cui la retta r abbia equazione $x_0 = 0$ ed indichiamo con $A_{\lambda,\mu}$ la matrice rispetto a tale riferimento della generica conica del fascio $\mathcal{F}$ al variare dei parametri omogenei (λ, μ).

La conica di matrice $A_{\lambda,\mu}$ è tangente ad r se, e solo se, $\det A'_{\lambda,\mu} = 0$, ove $A'_{\lambda,\mu}$ denota come di consueto la sottomatrice che si ottiene da $A_{\lambda,\mu}$ cancellando la prima riga e la prima colonna. Si osservi che $\det A'_{\lambda,\mu}$ è un polinomio omogeneo di grado 2 nelle variabili λ e μ (perchè?) e quindi, se non è identicamente nullo, si annulla al più per due coppie di valori dei parametri omogenei (λ, μ).

D'altro canto, se $\det A'_{\lambda,\mu}$ è identicamente nullo, ciò significa che prese due coniche qualunque del fascio $\mathcal{F}$, le sottomatrici corrispondenti A'_{λ_1,μ_1} e A'_{λ_2,μ_2}, sono degeneri ed hanno lo stesso nucleo (perchè?); ovvero le due coniche passano per lo stesso punto P della retta r. Da ciò discende che per P passa ogni conica del fascio, contro l'ipotesi che non vi fossero punti base sulla retta r. □

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica

prova scritta del 15 giugno 1994 .

ESERCIZIO 1 *Si considerino i sistemi lineari omogenei:*

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 - (\lambda+1)x_3 = 0 \\ 2\lambda x_2 + x_3 - \lambda x_4 = 0 \end{cases}.$$

Si determinino i valori di $\lambda \in \mathbb{C}$ per cui i due sistemi ammettono soluzioni non banali in comune.

Svolgimento: Le soluzioni comuni ad entrambo i sistemi lineari sono le soluzioni del sistema lineare che si ottiene giustapponendo i due sistemi in questione. Così facendo si ottiene un sistema lineare omogeneo di quattro equazioni in quattro incognite che ha soluzioni non banali se, e solo se, la matrice A_λ dei coefficienti del sistema è degenere. Poichè

$$\det A_\lambda = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda & 3 & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -(9\lambda^2 + 6),$$

vi sono soluzioni non-banali comuni ai due sistemi lineari solo se $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{2}{3}}$. □

ESERCIZIO 2 *Si indichi con $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $V = \mathbb{C}^4$ e si considerino i seguenti sottospazi (complessi) di V*

$$E = L(e_1, e_2) \quad e \quad D = L(e_3 - (1+3i)e_1, e_4 - 2ie_2).$$

(a) Si dimostri che $V = E \oplus D$.

(b) Si indichino con $\pi : E \oplus D \to E$ la proiezione canonica e con L il sottospazio reale di V generato dalla base canonica. Si dimostri che la restrizione di π ad L è un isomorfismo di spazi vettoriali reali.

(c) Si osservi che, tramite l'isomorfismo del punto precedente, la moltiplicazione per i dei vettori del sottospazio E diviene un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare dello spazio L in sé. Si scriva la matrice J di tale endomorfismo rispetto alla base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di L.

Svolgimento: (a) Poniamo $d_1 = e_3 - (1+3i)e_1$ e $d_2 = e_4 - 2ie_2$. Dato un vettore $v = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3 + z_4e_4$ di V, si ha

$$v = [z_1 + (1+3i)z_3]e_1 + (z_2 + 2iz_4)e_2 \; + \; z_3d_1 + z_4d_2,$$

da cui si deduce che $V = E + D = E \oplus D$, ove l'ultima uguaglianza è una conseguenza delle dimensioni di E e D (perchè?).

(b) Dal calcolo precedente si ottiene una descrizione esplicita dell'applicazione $\pi_{|L}$; infatti, se $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \in L$ –e quindi tutte le coordinate x_i sono in $\mathbb{R}$– allora $\pi(x) = [x_1 + (1+3i)x_3]e_1 + (x_2 + 2ix_4)e_2 \in E$. Inoltre, poichè L ed E sono spazi vettoriali *reali* della stessa dimensione, per verificare che $\pi_{|L}$ è un isomorfismo è sufficiente verificare che si tratta di un'applicazione iniettiva (o suriettiva). Poichè

$$\pi(x) = 0 \quad \text{se, e solo se,} \quad \begin{cases} x_1 + (1+3i)x_3 = 0 \\ x_2 + 2ix_4 = 0 \end{cases}$$

e, quando $x \in L$, tutte le coordinate x_i sono in $\mathbb{R}$, si conclude che $\pi(x) = 0$ se, e solo se, $x = 0$ e quindi $\pi_{|L}$ è un isomorfismo.

(c) In particolare da quanto visto nel punto precedente, si deduce che le matrici dell'isomorfismo $\pi_{|L}$ e del suo inverso, rispetto alle basi $\mathcal{L} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di L e $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, ie_1, ie_2\}$ di E sono

$$P = \alpha_{\mathcal{L},\mathcal{E}}(\pi_{|L}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P^{-1} = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{L}}(\pi_{|L}^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dunque, indicando con I la matrice della moltiplicazione per i nello spazio E, relativamente alla base $\mathcal{E}$, si conclude che(*)

$$J = P^{-1}IP = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 3 *Sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base dello spazio vettoriale reale V e si consideri l'applicazione bilineare simmetrica $g: V \times V \to \mathbb{R}$ definita ponendo*

$$g(v_1, v_1) = -2, \quad g(v_1, v_2) = -1, \quad g(v_1, v_3) = 0, \quad g(v_1, v_4) = 0, \quad g(v_2, v_2) = 1,$$
$$g(v_2, v_3) = -3, \quad g(v_2, v_4) = 5, \quad g(v_3, v_3) = -1, \quad g(v_3, v_4) = 0, \quad g(v_4, v_4) = -1.$$

(a) Si determini una base ortogonale di V relativamente a g e si calcoli l'indice di inerzia di tale applicazione.
(b) Si determini un sottospazio isotropo $U \subset V$ di dimensione massima.

Svolgimento: (a) La matrice di g, relativamente alla base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, è uguale a

$$G = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ed è facile verificare che g è non-degenere osservando che $\det G \neq 0$.

Per costruzione, i vettori v_1, v_3 e v_4 sono a due a due ortogonali e non-isotropi, dunque, per determinare una base ortogonale di V relativamente a g, è sufficiente determinare un vettore non isotropo v in $L(v_1, v_3, v_4)^\perp$. Osserviamo a margine che, se un tale vettore v esiste allora g è necessariamente non-degenere il che ci esonera dall'effettuare il calcolo di $\det G$.

Il vettore $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4$ appartiene a $L(v_1, v_3, v_4)^\perp$ se, e solo se, le sue coordinate sono soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_2 - x_4 = 0 \end{cases},$$

(*) Si osservi che, per determinare la matrice J dell'endomorfismo $j : L \to L$ indotto dalla moltiplicazione per i in E, si poteva ragionare anche nel modo seguente: dato un qualsiasi vettore $l \in L$, i due vettori $il \in iL \subset V$ e $j(l) \in L$ si proiettano, tramite π, sullo stesso vettore $i\pi(l) \in E$; quindi $j(l) - il \in D$ e tale condizione determina univocamente $j(l)$ (perchè?).

e quindi $L(v_1, v_3, v_4)^\perp = L(v_1 - 2v_2 + 6v_3 - 10v_4)$ e tale vettore non è isotropo, poichè si ha $g(v, v) = 142 > 0$.

Osservando che g assume valore positivo sul solo elemento v della base ortogonale $\{v_1, v_3, v_4, v\}$, possiamo concludere che l'indice di inerzia di g è uguale a $i(g) = -2$.

(b) Da quanto mostrato nel punto precedente, si deduce che non vi possono essere sottospazi isotropi $U \subset V$ di dimensione maggiore a 1; perchè ogni sottospazio di dimensione maggiore o uguale a 2 ha intersezione non banale con il sottospazio $L(v_1, v_3, v_4)$, che non può contenere vettori isotropi in quanto g è ivi definita negativa.

Un vettore isotropo non nullo è, ad esempio, $x = \sqrt{71}v_1 + v$ e quindi $U = L(x)$ è un sottospazio isotropo di V di dimensione massima. □

ESERCIZIO 4 *Sia T una matrice simmetrica reale definita positiva. È vero o falso che T^{-1} è simmetrica e definita positiva?*

Svolgimento: Ogni matrice simmetrica reale è ortogonalmente simile ad una matrice diagonale D; ovvero esistono una matrice P, tale che ${}^tP = P^{-1}$, ed una matrice diagonale D tali che $T = {}^tPDP$. Poichè T è definita positiva –ovvero è la matrice di un'applicazione bilineare definita positiva rispetto ad un'opportuna base– gli elementi posti sulla diagonale di D sono tutti numeri reali positivi.

A questo punto è sufficiente osservare che $T^{-1} = {}^tPD^{-1}P$ –perchè ${}^tP = P^{-1}$– e che l'inversa di D è ancora una matrice diagonale ove gli elementi posti sulla diagonale sono tutti numero reali positivi. □

ESERCIZIO 5 *Siano dati uno spazio vettoriale complesso V di dimensione $2n$, il sottospazio reale L generato da una base di V, ed un sottospazio complesso E di V di dimensione n su $\mathbb{C}$.*

(a) Fissato comunque un sottospazio complesso D di dimensione n, tale che $D \cap E = (0) = D \cap L$, si mostri che è ben definita l'applicazione $\lambda : E \to D$ che associa ad ogni elemento $e \in E$ l'elemento $\lambda(e) \in D$ tale che $e + \lambda(e) \in L$.

(b) Si dimostri che l'applicazione λ definita nel punto precedente è $\mathbb{R}$-lineare.

(c) Si dimostri che, se $\phi : E \to D$ è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare, allora il sottoinsieme di V costituito dai vettori del tipo $e + \phi(e)$, al variare di $e \in E$, è un sottospazio reale di V, di dimensione $2n$ su $\mathbb{R}$.

Svolgimento: (a) Poichè $\dim E = \dim D = n$ e $D \cap E = (0)$, se ne deduce che $V = D \oplus E$ e quindi che $L \subset D \oplus E$. Consideriamo ora le proiezioni $\pi : D \oplus E \to E$ e $\sigma : D \oplus E \to D$ e la restrizione di π ad L.

Se mostriamo che $\pi_{|L}$ è un isomorfismo (di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali) allora per ogni elemento $e \in E$ esiste un unico elemento $l \in L$ tale che $\pi(l) = e$ e quindi, in base alle definizioni date si ha $\lambda(e) = l - \pi(l) = \sigma(l)$, che permette di concludere che l'applicazione λ è ben definita ed $\mathbb{R}$-lineare (perchè?).

Poichè L ed E sono spazi vettoriali reali della stessa dimensione e $\pi_{|L}$ è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare, possiamo concludere che $\pi_{|L}$ è un isomorfismo se, e solo se, è iniettiva, ovvero se, e solo se, $\ker \pi_{|L} = (0)$. Osservando che $\ker \pi_{|L} = \ker \pi \cap L = D \cap L = (0)$ si conclude.

(b) Poichè $\lambda = \sigma \circ \pi_{|L}^{-1}$ è composizione di applicazioni $\mathbb{R}$-lineari, si conclude che si tratta di un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare.

(c) Sia $X = \{\, e + \phi(e) \,|\, e \in E \,\}$. Dati due vettori e, e' in E e due numeri reali α, α', poichè ϕ è $\mathbb{R}$-lineare, si ha

$$\alpha(e + \phi(e)) + \alpha'(e' + \phi(e')) = (\alpha e + \alpha' e') + \phi(\alpha e + \alpha' e') \in X,$$

e quindi X è un sottospazio reale di V.

Sia $\{u_1, \dots, u_{2n}\}$ una base di E come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Allora i vettori $u_j + \phi(u_j)$, per $j = 1, \dots, 2n$, sono una base di X come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Infatti è facile osservare che generano X (perchè?) ed inoltre sono linearmente indipendenti, come si verifica osservando che

$$\begin{aligned}\alpha_1(u_1 + \phi(u_1)) + \cdots + &\alpha_{2n}(u_{2n} + \phi(u_{2n})) = \\ &= (\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{2n} u_{2n}) + \phi(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{2n} u_{2n}) = 0\end{aligned}$$

se, e solo se, $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{2n} u_{2n}$ appartiene a $E \cap D = (0)$ e quindi se, e solo se,

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{2n} = 0$$

perchè $\{u_1, \dots, u_{2n}\}$ è una base di E. □

ESERCIZIO 6 *Si dica se è diagonalizzabile l'endomorfismo ϕ di $\mathbb{C}^4$ che ha matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ -10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

In caso affermativo si determini una base di $\mathbb{C}^4$ costituita da autovettori relativi a ϕ.

Svolgimento: Il polinomio caratteristico di ϕ è uguale a

$$p_\phi(x) = \det(A - x) = (x^2 + 3)(x^2 + 9),$$

che ha quattro radici complesse (non reali) distinte. Dunque il polinomio caratteristico è prodotto di fattori lineari distinti in $\mathbb{C}[x]$ e quindi ϕ è diagonalizzabile.

Gli autovalori di ϕ sono $\lambda = 3i$, $\overline{\lambda} = -3i$ e $\mu = \sqrt{3}i$, $\overline{\mu} = -\sqrt{3}i$; dunque, poichè A è una matrice reale, i corrispondenti autovettori sono a due a due coniugati. Infatti se x è un autovettore relativo all'autovalore λ, allora $A\overline{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda}\overline{x}$, e quindi $\overline{x}$ è un autovettore relativo all'autovalore $\overline{\lambda}$. Analogamente si ragiona per gli autovettori relativi all'autovalore μ.

Denotiamo come al solito con $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{C}^4$. Con un calcolo diretto si ottiene

$$W_\phi(3i) = L(e_1 + (1 + 3i)e_3) \quad \text{e} \quad W_\phi(\sqrt{3}i) = L(e_4 - \frac{\sqrt{3}}{2} i e_2),$$

da cui si deduce

$$W_\phi(-3i) = L(e_1 + (1 - 3i)e_3) \quad \text{e} \quad W_\phi(-\sqrt{3}i) = L(e_4 + \frac{\sqrt{3}}{2} i e_2).$$

□

ESERCIZIO 7 *Nello spazio euclideo standard di dimensione 3, si considerino i punti P_1, P_2, e P_3 di coordinate affini*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si indichino con π ed r il piano e la retta di equazioni

$$\pi : x + 2y - z = 1 \qquad r : \begin{cases} x + y = 3 \\ y - z = 1 \end{cases}.$$

Dato un punto X sulla retta r, si indichino con X_1, X_2, X_3 le proiezioni dei punti P_1, P_2, P_3 da X sul piano π.

Si determini, al variare di X in r, l'area del triangolo di vertici X_1, X_2, X_3.

Svolgimento: La retta r passa per il punto $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dunque, il generico punto X di r ha coordinate $X = X_0 + tv = \begin{pmatrix} -t \\ 3+t \\ 2+t \end{pmatrix}$, al variare di t in $\mathbb{R}$. Se ne deduce

$$X_1 = (X + P_1) \cap \pi = P_1 \qquad \text{perchè } P_1 \in \pi,$$
$$X_2 = (X + P_2) \cap \pi = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 2+t \end{pmatrix}, \quad X_3 = (X + P_3) \cap \pi = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2t \\ 6+2t \\ 7+2t \end{pmatrix}.$$

Dunque per le note proprietà del prodotto vettore l'area cercata è uguale a

$$\frac{1}{2}\|(X_2 - X_1) \times (X_3 - X_1)\| = \frac{1}{20}\sqrt{18(t+4)^2 + 4(3t+14)^2}.$$

□

ESERCIZIO 8 *Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si consideri l'affinità f di matrice*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si mostri che esiste una retta r tutta costituita da punti uniti per l'applicazione f e si determini l'equazione cartesiana di tale retta.

È vero o falso che ogni retta parallela ad r viene trasformata da f in una retta parallela ad r?

Svolgimento: Sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ un punto di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, allora $f(P) = P$ se, e solo se, $(X - \mathbf{1}_4)P = 0$, ove $\mathbf{1}_4$ denota la matrice identica di ordine 4. La matrice

$$X - \mathbf{1}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ha rango 2 (l'ultima riga è somma delle due righe centrali, che sono linearmente indipendenti perchè $\det\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$), e quindi P è un punto unito per f se, e solo se, le sue coordinate soddisfano al sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -1 \end{cases}.$$

Tale sistema lineare ha rango 2 ed è quindi l'equazione cartesiana di una retta dello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Questa è la retta r cercata.

Infine, l'ultima affermazione è vera perchè le affinità conservano la relazione di parallelismo e quindi, se s è una retta parallela ad r allora $f(s)$ è una retta parallela ad $f(r) = r$. □

ESERCIZIO 9 *Nel piano euclideo si classifichi la conica $\mathcal{C}$ di equazione*

$$2x^2 - y^2 + 4xy + 2y - 2 = 0;$$

e si determinino assi, vertici, fuochi, l'eventuale centro e la forma canonica di $\mathcal{C}$.

Svolgimento: Indichiamo come al solito con A la matrice della conica $\mathcal{C}$ e con A' la matrice che si ottiene da A cancellando la prima riga e la prima colonna. Si ha $\det A = 10$ e $\det A' = -6$, da cui si deduce che $\mathcal{C}$ è un'iperbole (non-degenere).

Le coordinate del centro C di $\mathcal{C}$ sono le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2x + y = 1 \end{cases},$$

e quindi $C = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Le direzioni degli assi sono gli autovettori della matrice A', mentre gli autovalori della stessa, moltiplicati per $-\frac{\det A'}{\det A}$, sono i coefficienti della forma canonica dell'equazione di $\mathcal{C}$. Il polinomio caratteristico di A' è

$$\det\begin{pmatrix} 2-x & 2 \\ 2 & -1-x \end{pmatrix} = (x-3)(x+2),$$

e quindi gli autovalori sono 3 e -2 i cui relativi spazi di autovettori sono generati da $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, rispettivamente. Dunque gli assi della conica sono le rette

$$h_1 : x - 2y + 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad h_2 : 2x + y + \frac{1}{3} = 0.$$

L'asse h_1 interseca il supporto dell'iperbole $\mathcal{C}$ e quindi i vertici sono i due punti di intersezione tra h_1 e $\mathcal{C}$, ovvero $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

La forma canonica dell'equazione di $\mathcal{C}$ è $\frac{9}{5}X^2 - \frac{6}{5}Y^2 = 1$. Dunque, i fuochi dell'iperbole giacciono sull'asse h_1 ed hanno distanza dal centro C uguale a $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ (*). Dunque, considerando il vettore unitario $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallelo all'asse h_1; i due fuochi di $\mathcal{C}$ sono i punti

$$F_{1,2} = C \pm \frac{5\sqrt{2}}{6} v_1 \quad \text{ovvero } F_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2\sqrt{10} - 2 \\ \sqrt{10} + 2 \end{pmatrix}, \quad F_2 = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2\sqrt{10} + 2 \\ \sqrt{10} - 2 \end{pmatrix}.$$

□

(*) In un iperbole, di equazione canonica $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$, con $\beta < 0 < \alpha$, la distanza dei fuochi dal centro è uguale a $\sqrt{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}$ (fare la verifica!).

ESERCIZIO 10 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Si mostri che $V = \operatorname{im}\phi \oplus \ker\phi$ se, e solo se, $\phi^2(V) = \phi(V)$.*

Svolgimento: Ricordiamo che $\ker\phi$ ed $\operatorname{im}\phi$ hanno dimensioni complementari, essendo

$$\dim\ker\phi + \dim\operatorname{im}\phi = \dim V.$$

($\Rightarrow$) Poichè $V = \operatorname{im}\phi \oplus \ker\phi$, se ne deduce che $\operatorname{im}\phi \cap \ker\phi = (0)$, e quindi che ϕ induce un'applicazione iniettiva da $\operatorname{im}\phi = \phi(V)$ in sè. Si conclude che $\operatorname{im}\phi^2 = \phi^2(V) = \phi(V)$.

($\Leftarrow$) Dato un vettore $x \in V$, si ha che esiste un vettore $y \in V$, tale che $\phi(x) = \phi^2(y)$. Dunque si ha $x = (x - \phi(y)) + \phi(y) \in \ker\phi + \operatorname{im}\phi$, da cui si deduce, per l'arbitrarietà di x, che

$$V = \ker\phi + \operatorname{im}\phi = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\phi.$$

$\square$

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica

prova scritta del 5 luglio 1994 .

ESERCIZIO 1 *Si considerino, al variare di λ tra i numeri reali, le applicazioni lineari $\phi_\lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di matrici*

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 & -\lambda & 2\lambda \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -\lambda-1 & -\lambda & \lambda+2 & -2 \\ 2 & \lambda-2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Si indichi con ϕ^*_λ l'applicazione trasposta definita, come di consueto, dalla condizione $\phi^*_\lambda(x^*) \circ x = x^* \circ \phi_\lambda(x)$ per ogni x in $\mathbb{R}^4$ ed ogni x^* nello spazio duale. Indicato infine con S_λ il sottospazio $(\mathrm{im}\phi^*_\lambda)^\perp$, si determini la dimensione di S_λ al variare di λ tra i numeri reali.

Svolgimento: Cominciamo ricordando che $S_\lambda = (\mathrm{im}\,\phi^*_\lambda)^\perp = \ker\phi_\lambda$. Infatti, dato $x \in \mathbb{R}^4$, si ha che $x \in (\mathrm{im}\,\phi^*_\lambda)^\perp$ se, e solo se, $\phi^*_\lambda(x^*) \circ x = 0$ per ogni x^* nello spazio duale. Quindi, se $x \in (\mathrm{im}\,\phi^*_\lambda)^\perp$, si ha $x^* \circ \phi_\lambda(x) = 0$ per ogni x^* nello spazio duale, e ciò accade se, e solo se, $\phi_\lambda(x) = 0$.

Si richiede quindi di calcolare la dimensione del nucleo di ϕ_λ, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$; e poichè $\dim\ker\phi_\lambda = 4 - \mathrm{rk}\,\phi_\lambda$, il problema si riduce al calcolo del rango della matrice A_λ, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Con un calcolo diretto si ottiene

$$\det A_\lambda = 2(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3);$$

quindi si ha $\dim S_\lambda = 0$ se λ è diverso da 1, -2, 3. Infine si può verificare (come?) che $\dim S_1 = \dim S_{-2} = \dim S_3 = 1$. □

ESERCIZIO 2 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C. Siano U ed E due sottospazi di V di dimensioni k ed $n-k$ rispettivamente, tali che $V = U \oplus E$. Fissato comunque $\psi \in Hom_C(U, E)$ si consideri il sottoinsieme di V*

$$U_\psi = \{\, u + \psi(u) \mid u \in U \,\}.$$

(a) Si mostri che U_ψ è un sottospazio di V di dimensione k e che $V = U_\psi \oplus E$.

(b) Si mostri che la corrispondenza $\psi \mapsto U_\psi$ induce una biiezione tra $Hom_C(U, E)$ e l'insieme S_E dei sottospazi X di V tali che $V = X \oplus E$.

Svolgimento: (a) Sia fissata $\psi \in \mathrm{Hom}_C(U, E)$. Dati u_1 ed u_2 in U ed α_1 ed α_2 in C, si ha

$$\alpha_1(u_1 + \psi(u_1)) + \alpha_2(u_2 + \psi(u_2)) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \psi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2),$$

perchè ψ è un'applicazione lineare, e dunque U_ψ è un sottospazio di V.

Consideriamo ora l'applicazione $j_\psi : U \to U_\psi$ definita ponendo $j_\psi(u) = u + \psi(u)$, al variare di u in U. È immediato verificare che j_ψ è un'applicazione lineare (farlo!); inoltre $j_\psi(u) = 0$ se, e solo se, $u = -\psi(u)$, ovvero se, e solo se, $u \in U \cap E = (0)$ da cui si conclude che j_ψ è iniettiva. Infine, poichè j_ψ è per costruzione suriettiva, si conclude che j_ψ è un isomorfismo e quindi che $\dim U_\psi = \dim U = k$.

Osserviamo poi che dato $v \in V$, si ha che $v = u + e$ per due opportuni vettori $u \in U$ ed $e \in E$. Dunque, $v = (u + \psi(u)) + (e - \psi(u))$, da cui si deduce che $V = U_\psi + E = U_\psi \oplus E$, dove l'ultima uguaglianza si ottiene osservando che

$$\dim(U_\psi \cap E) = \dim U_\psi + \dim E - \dim(U_\psi + E) = k + (n-k) - n = 0.$$

(b) Cominciamo osservando che l'applicazione $\mathrm{Hom}_C(U, E) \to S_E$ che associa a ψ il sottospazio U_ψ è iniettiva. Infatti, dall'uguaglianza $u + \psi(u) = u' + \psi'(u')$ per $u, u' \in U$, si deduce che $u - u' = \psi'(u') - \psi(u) \in U \cap E = (0)$; e quindi che $u = u'$ e $\psi(u) = \psi'(u)$. Da ciò si deduce che $U_\psi = U_{\psi'}$ se, e solo se, $\psi = \psi'$.

Vediamo infine che ogni sottospazio $X \in S_E$ è del tipo U_ψ per un opportuno $\psi \in \mathrm{Hom}_C(U, E)$. Fissati $X \in S_E$ ed $u \in U \subset X \oplus E$, esistono e sono univocamente determinati $\pi_X(u) \in X$ e $\pi_E(u) \in E$, tali che $u = \pi_X(u) + \pi_E(u)$. Dunque, si consideri l'applicazione lineare $\psi_X \in \mathrm{Hom}_C(U, E)$ definita ponendo $\psi_X(u) = -\pi_E(u)$ al variare di u in U. In base a quanto osservato, per ogni u in U, si ha $u + \psi_X(u) = u - \pi_E(u) = \pi_X(u) \in X$ e quindi $U_{\psi_X} \subseteq X$. Poichè U_{ψ_X} ed X sono sottospazi di V della stessa dimensione, se ne deduce che $U_{\psi_X} = X$ e la dimostrazione è conclusa. □

ESERCIZIO 3 *Siano V uno spazio vettoriale reale e $g : V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare definita positiva.*

(a) Se $\phi : V \to V$ è una funzione biiettiva tale che $g(\phi(v), \phi(w)) = g(v, w)$, per ogni $v, w \in V$, allora ϕ è un'applicazione lineare.

(b) È vero o falso che esistono biiezioni $\phi : V \to V$ che soddisfano alla condizione $g(\phi(v), \phi(v)) = g(v, v)$, per ogni $v \in V$, ma non sono applicazioni lineari?

Svolgimento: (a) Dati comunque v_1, v_2 in V ed α_1, α_2 in $\mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} g(\phi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2), \phi(w)) &= g(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \\ &= \alpha_1 g(v_1, w) + \alpha_2 g(v_2, w) = \\ &= \alpha_1 g(\phi(v_1), \phi(w)) + \alpha_2 g(\phi(v_2), \phi(w)) = \\ &= g(\alpha_1 \phi(v_1) + \alpha_2 \phi(v_2)), \phi(w)) \end{aligned}$$

qualunque sia $w \in V$. Poichè ϕ è biiettiva e g è non degenere, si deduce dall'uguaglianza precedente che $\phi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \phi(v_1) + \alpha_2 \phi(v_2)$ e quindi che ϕ è lineare.

(b) È vero ed un semplice esempio è il seguente. Cominciamo osservando che una funzione che soddisfi alla condizione $g(\phi(v), \phi(v)) = g(v, v)$, per ogni $v \in V$ induce una biezione della sfera unitaria $S = \{\, v \in V \mid g(v, v) = 1 \,\}$ di V. Dunque è sufficiente esibire una funzione ϕ, soddisfacente alla condizione $\phi(v) = \|v\| \phi(\frac{v}{\|v\|})$, che induce una biiezione di S e che non è lineare. Poniamoci quindi nelle ipotesi in cui $\dim V = 2$, ovvero supponiamo $V = \mathbb{R}^2$ e poniamo $\phi(x, y) = \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^6+y^6}}, \frac{y^3}{\sqrt{x^6+y^6}} \right)$, al variare di (x, y) in $S \subset \mathbb{R}^2$. È facile osservare che una tale biiezione di S non è indotta da un'applicazione lineare perchè ϕ lascia invarianti i sottospazi generati da $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$ in $\mathbb{R}^2$ e l'unica applicazione lineare che soddisfi a queste condizioni è l'identità, ma ϕ non è l'applicazione identica perchè non lascia invariante, ad esempio, il punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \in S$. □

ESERCIZIO 4 *Si indichi con g l'applicazione bilineare di $\mathbb{R}^4$ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si verifichi che g è non-degenere e si determini un sottospazio isotropo di dimensione massima.

(b) Si determini l'indice di inerzia di g ed una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ relativamente a g.

Svolgimento: (a) L'applicazione g è non-degenere perchè $\det A = 9 \neq 0$. Inoltre è facile verificare con un'ispezione diretta della matrice A che i vettori e_1 ed e_3 della base canonica sono isotropi ed ortogonali tra loro. Dunque il sottospazio da essi generato $U = L(e_1, e_3)$ è un sottospazio isotropo di $\mathbb{R}^4$, chiaramente di dimensione massima (perchè?).

(b) Poichè vi è un sottospazio isotropo di dimensione 2 relativamente a g, necessariamente l'indice di inerzia di tale applicazione è uguale a $i(g) = 0$. Infatti se nella decomposizione di Sylvester di $\mathbb{R}^4$ relativamente a g comparisse un sottospazio W, su cui g induce un'applicazione bilineare definita, di dimensione $\dim W > 2$, il sottospazio W dovrebbe intersecare U in un vettore diverso da zero (perchè?). Ma non è possibile che W contenga vettori isotropi diversi dal vettore nullo.

Resta da determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ relativamente a g. Osserviamo intanto che, scambiando tra loro i vettori e_2 ed e_3, la matrice di g assume la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

dove sono messi in evidenza i due sottospazi isotropi U e $U' = L(e_2, e_4)$. Inoltre, si determinano facilmente i vettori $v_2 = \alpha_1 e_2 + \beta_1 e_4$ e $v_4 = \alpha_2 e_2 + \beta_2 e_4$, che generano U' e tali che, rispetto alla base $\{e_1, e_3, v_2, v_4\}$, g abbia matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti è sufficiente porre $v_2 = \frac{1}{3}e_2 - \frac{2}{3}e_4$ e $v_4 = \frac{1}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_4$ affinchè le condizioni siano soddisfatte. Infine, è facile constatare che i vettori

$$w_1 = e_1 + v_2, \quad w_2 = e_1 - v_2, \quad w_3 = e_3 + v_4, \quad w_4 = e_3 - v_4,$$

formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ relativamente a g. □

ESERCIZIO 5 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 12 sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Si dica se esistono endomorfismi $\phi : V \to V$ soddisfacenti alle condizioni:*

$$\dim im(\phi-2)^2 = 10, \quad \dim im(\phi-3)^2 = 9, \quad \dim im(\phi-3)^3 = 8,$$
$$\dim im(\phi-1) = 10, \quad \dim im(\phi-1)^3 = 6.$$

In caso affermativo si determinino tali endomorfismi e se ne calcoli il determinante.

Svolgimento: Ricordando che, per qualsiasi endomorfismo $\psi : V \to V$, si ha

$$\dim\ker\psi = \dim V - \dim\operatorname{im}\psi,$$

si deduce dai dati del problema che il polinomio caratteristico di ϕ deve essere

$$p(x) = (x-1)^6(x-2)^2(x-3)^4,$$

mentre per il polinomio minimo vi sono due possibilità:

$$\lambda(x) = (x-1)^3(x-2)(x-3)^3 \qquad \text{e} \qquad \lambda'(x) = (x-1)^3(x-2)^2(x-3)^3.$$

Indichiamo con ϕ e ϕ' gli endomorfismi corrispondenti a $\lambda(x)$ e $\lambda'(x)$ rispettivamente. Allora, le matrici di Jordan di ϕ e ϕ', scritte a blocchi, sono rispettivamente

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix},$$

ove

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_2' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

In ambedue i casi il determinante è uguale a $\det\phi = \det\phi' = 2^2 3^4 = 324$. □

ESERCIZIO 6 *Si determini la forma canonica di Jordan relativa all'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ che, rispetto alla base canonica, ha matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si determini inoltre una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan.

Svolgimento: Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(x) = \det(B-x) = (x-1)^4$; inoltre la matrice $B-1$ ha rango 3 e quindi il polinomio caratteristico di ϕ coincide con il suo polinomio minimo. Poichè

$$(B-1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (B-1)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se ne deduce che e_1 è un vettore che appartiene a $\ker(\phi-1)^4$ ma non a $\ker(\phi-1)^3$. Dunque i vettori

$$(\phi-1)^3 e_1 = 24e_2, \quad (\phi-1)^2 e_1 = 12e_3 - 12e_4, \quad (\phi-1)e_1 = 2e_3 + 2e_4, \quad e_1,$$

formano una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 7 *Nel piano euclideo si consideri la corrispondenza che ad una retta r, passante per l'origine $O = (0,0)$, associa la retta r', passante per $U = (1,1)$ e perpendicolare ad r. Si descriva l'insieme $\mathcal{C}$ dei punti di intersezione tra r ed r', al variare di r tra le rette per l'origine.*

Svolgimento: Sia $r : ax + by = 0$ la generica retta per O. La retta corrispondente ad r è la retta r', di equazione affine $r' : b(x-1) - a(y-1) = 0$, e l'intersezione tra r ed r' è descritta dal sistema di equazioni

$$(*) \qquad \begin{cases} ax + by = 0 \\ b(x-1) - a(y-1) = 0 \end{cases}.$$

Dato un punto $P = (x,y)$ del piano, tale punto appartiene a $\mathcal{C}$ se, e solo se, esiste una coppia (a,b) –determinata a meno del prodotto per una costante non nulla– tale che ambedue le equazioni del sistema siano soddisfatte. Dunque, dato un punto P e considerando il sistema $(*)$ nelle incognite a, b; il punto P appartiene a $\mathcal{C}$ se, e solo se, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema si annulla, ovvero

$$P \in \mathcal{C} \quad \iff \quad \det\begin{pmatrix} x & y \\ 1-y & x-1 \end{pmatrix} = 0.$$

Dunque $\mathcal{C}$ è la conica di equazione affine

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - x - y = 0.$$

Dunque $\mathcal{C}$ è una circonferenza di centro $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. □

ESERCIZIO 8 *Date due curve nel piano euclideo, incidenti in un punto P (non-singolare), si chiama angolo tra le due curve in P, l'angolo (non-orientato) formato dalle rette tangenti alle due curve in quel punto. Si determinino quindi le intersezioni tra le coniche*

$$\mathcal{C}: x^2 - y + 2x - 8 = 0 \qquad e \qquad \mathcal{D}: x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$$

e si calcolino (i coseni de) gli angoli formati dalle due curve in tali punti.

Svolgimento: Per determinare le intersezioni tra le due coniche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ consideriamo il fascio di coniche determinato dalle due curve date e sostituiamo a queste delle coniche degeneri del fascio. Indicate con A e B le matrici di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, rispettivamente, la generica conica del fascio ha matrice

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} -16\lambda - 8\mu & 2\lambda + \mu & 4\mu - \lambda \\ 2\lambda + \mu & 2\lambda + \mu & 0 \\ 4\mu - \lambda & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

il cui determinante è $(2\lambda + \mu)(\lambda + 5\mu)^2$.

Dunque, la conica degenere del fascio che si ottiene ponendo $\mu = -2\lambda$, ha equazione (non-omogenea) $y(y+9) = 0$; ed intersecando le due rette che compongono tale conica degenere con $\mathcal{C}$ si ottengono i punti P, Q, ed R (quest'ultimo con molteplicità 2), di coordinate omogenee

$$P = {}^t(1,2,0), \quad Q = {}^t(1,-4,0), \quad R = {}^t(1,-1,-9).$$

La tangente ad una conica in un suo punto X coincide con la polare del punto X rispetto a tale conica, dunque la tangente r_P a $\mathcal{C}$ in P e la tangente s_P a $\mathcal{D}$ nello stesso punto hanno equazioni cartesiane

$$r_P : 6x - y - 12 = 0 \qquad \text{e} \qquad s_P : 3x + 4y - 6 = 0,$$

e quindi il coseno dell'angolo θ_P tra r_P ed s_P è $\cos\theta_P = \frac{14}{5\sqrt{37}}$. Analogamente, i coseni degli angoli θ_Q e θ_R tra le tangenti nei punti Q ed R sono $\cos\theta_Q = \frac{14}{5\sqrt{37}}$ e $\cos\theta_R = 1$. □

ESERCIZIO 9 *Nel piano euclideo si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione*

$$2x^2 - 2y^2 + xy - 12x + 12y = 0.$$

Si classifichi tale conica e si determinino gli assi, l'eventuale centro e gli asintoti. Si scriva infine la forma canonica dell'equazione di $\mathcal{C}$.

Svolgimento: La conica $\mathcal{C}$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -6 & 2 & \frac{1}{2} \\ 6 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

e si ha $\det A = -36$ e $\det A' = \det \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} = -\frac{17}{4}$. Dunque $\mathcal{C}$ è un'iperbole (non-degenere) ed il centro C di $\mathcal{C}$ ha coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 17 \\ 36 \\ 60 \end{pmatrix}$.

Le intersezioni della conica con la retta impropria sono i punti di coordinate omogenee $A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1+\sqrt{17} \\ 4 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1-\sqrt{17} \\ 4 \end{pmatrix}$. Poichè le direzioni che corrispondono a tali punti sono tra loro perpendicolari, $\mathcal{C}$ è un'iperbole equilatera, i cui asintoti hanno equazioni affini

$$t_1 : (-1-\sqrt{17})(x - \tfrac{36}{17}) + 4(y - \tfrac{60}{17}) = 0 \quad \text{e} \quad t_2 : (-1+\sqrt{17})(x - \tfrac{36}{17}) + 4(y - \tfrac{60}{17}) = 0.$$

La matrice A' ha autovalori $c_1 = \frac{\sqrt{17}}{2}$ e $c_2 = -\frac{\sqrt{17}}{2}$ i cui corrispondenti autovettori danno le direzioni degli assi della conica; ovvero i punti della retta impropria di coordinate omogenee $B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4-\sqrt{17} \end{pmatrix}$ e $B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4-\sqrt{17} \\ -1 \end{pmatrix}$. Dunque gli assi della conica $\mathcal{C}$ hanno equazioni affini

$$h_1 : (4-\sqrt{17})(x - \tfrac{36}{17}) - (y - \tfrac{60}{17}) = 0 \quad \text{e} \quad h_2 : (x - \tfrac{36}{17}) + (4-\sqrt{17})(y - \tfrac{60}{17}) = 0.$$

Infine, possiamo concludere che la forma canonica dell'equazione della conica $\mathcal{C}$ è

$$\mathcal{C} : \frac{17\sqrt{17}}{288}(X^2 - Y^2) = 1.$$

$\square$

ESERCIZIO 10 *Nel piano euclideo si consideri il triangolo* Δ *di vertici* A, B, C, *di coordinate affini*

$$A = (0,0), \quad B = (6,0), \quad C = (3,6),$$

e sia H *il punto di intersezione tra le altezze del triangolo* Δ.

(a) Si scriva la matrice della generica conica appartenente al fascio di punti base A, B, C *e* H.

(b) È vero o falso che tutte le coniche non degeneri di tale fascio sono iperboli equilatere$^{(*)}$*?*

Svolgimento: L'altezza del triangolo Δ passante per C è la retta di equazione $x = 3$, mentre l'altezza relativa al vertice A ha equazione $x - 2y = 0$ da cui si deduce che il punto H, intersezione tra queste due rette, ha coordinate affini $H = (3, \frac{3}{2})$. Dunque, due coniche degeneri del fascio di punti base A, B, C ed H hanno equazioni affini $\mathcal{C}_1 : y(x-3) = 0$ e $\mathcal{C}_2 : (2x+y-12)(x-2y) = 0$ e quindi la matrice della generica conica del fascio è

$$A_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -6\mu & -3\lambda+12\mu \\ -6\mu & 2\mu & \lambda - \frac{3}{2}\mu \\ -3\lambda+12\mu & \lambda-\frac{3}{2}\mu & -2\mu \end{pmatrix}.$$

Le coordinate omogenee delle intersezioni di una generica conica del fascio con la retta impropria sono determinate dall'equazione $2\mu x_1^2 + 2(\lambda - \frac{3}{2}\mu)x_1x_2 - 2\mu x_2^2 = 0$ ed è facile verificare che le soluzioni determinano due direzioni perpendicolari nel piano euclideo qualunque siano i valori dei parametri λ e μ. Dunque è vero che tutte le coniche (non-degeneri) del fascio sono iperboli equilatere. $\square$

(*) Un'iperbole si dice *equilatera* se gli asintoti sono tra loro perpendicolari.

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica

prova scritta del 7 settembre, 1994 .

ESERCIZIO 1 *È vero o falso che due matrici $A, B \in M_{n\times m}(C)$ sono riga-equivalenti se, e solo se, i sistemi omogenei $AX = 0$ e $BX = 0$ hanno lo stesso insieme di soluzioni?*

È vero o falso che due sistemi di equazioni lineari non-omogenei $AX = c$, $BX = d$ sono riga-equivalenti se, e solo se, hanno lo stesso insieme di soluzioni?

Svolgimento: È ben noto che due sistemi riga-equivalenti hanno lo stesso insieme di soluzioni. Passiamo quindi a discutere l'implicazione inversa, cominciando dai sistemi omogenei. Indichiamo con $A_1, \dots, A_n$ e $B_1, \dots, B_n$ le righe delle matrici A e B rispettivamente. Quali elementi dello spazio duale di C^m, le righe $A_1, \dots, A_n$ generano l'ortogonale del sottospazio $S \subseteq C^m$ formato dalle soluzioni del sistema $AX = 0$. Dunque, se i due sistemi omogenei $AX = 0$ e $BX = 0$ hanno lo stesso sottospazio S di soluzioni, ciò significa che si ha

$$L(A_1, \dots, A_n) = S^\perp = L(B_1, \dots, B_n);$$

e quindi le righe della matrice A sono combinazioni lineari delle righe della matrice B e viceversa. Dunque A e B sono riga-equivalenti e la prima affermazione è vera.

Nel caso di sistemi lineari non-omogenei, la condizione è invece falsa. Infatti i sistemi

$$0 = 1 \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases},$$

hanno lo stesso insieme ($\emptyset$) di soluzioni, ma non sono riga-equivalenti. □

ESERCIZIO 2 *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo C e k un intero positivo, minore di n. Dato un sottospazio E di diemnsione $n-k$, si consideri l'insieme S_E dei sottospazi $U \subset V$ tali che $U \oplus E = V$. Fissato un sottospazio $U_0 \in S_E$, si denotino con π_0 la proiezione canonica da $V = U_0 \oplus E$ su U_0 e con W lo spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_C(U_0, E)$.*

È noto che la restrizione di π_0 ad un qualsiasi sottospazio $U \in S_E$ induce un isomorfismo tra U ed U_0 e che la corrispondenza che a $\phi \in W$ associa il sottospazio $U_0 + \phi = \{\, x + \phi(x) \mid x \in U_0 \,\}$ è una biiezione tra W ed S_E.(*)

Si mostri che l'operazione $+ : S_E \times W \to S_E$, che alla coppia (U, ϕ) associa il sottospazio $U + \phi = \{\, u + \phi(\pi_0(u)) \mid u \in U \,\}$, rende la terna $(S_E, W, +)$ uno spazio affine di dimensione $k(n-k)$.

Svolgimento: Poichè $\dim W = \dim \mathrm{Hom}_C(U_0, E) = k(n-k)$, è sufficiente dimostrare che l'operazione $+$ soddisfa alle proprietà che caratterizzano gli spazi affini; ovvero:

(*i*) $(U + \phi) + \psi = U + (\phi + \psi)$.
Il generico elemento di $(U+\phi)+\psi$ è $u+\phi(\pi_0(u))+\psi(\pi_0(u+\phi(\pi_0(u))))$, ove $u \in U$. Poichè $\phi \in W$ e $U \cap E = (0)$, si ha che $\pi_0(u + \phi(\pi_0(u))) = \pi_0(u)$, e quindi si ha

$$u + \phi(\pi_0(u)) + \psi(\pi_0(u + \phi(\pi_0(u)))) = u + (\phi + \psi)(\pi_0(u)),$$

qualunque sia $u \in U$, da cui si ottiene l'uguaglianza enunciata sopra.

(*ii*) $U + \phi = U \iff \phi = 0$.

(*) Si veda ad esempio l'esercizio 2 del compito del 5 luglio 1994

Se $\phi = 0$ è ovvio che $U + \phi = U$; viceversa, se $U + \phi = U$, per ogni vettore $u \in U$, si ha che $u + \phi(\pi_0(u)) \in U$ e quindi che $\phi(\pi_0(u)) \in U \cap E = (0)$. Poichè π_0 è un isomorfismo tra U ed U_0, se ne deduce che $\phi = 0$.

(iii) *per ogni coppia $U, U' \in S_E$, esiste $\psi \in W$ tale che $U' = U + \psi$.*
In base a quanto enunciato, esistono gli omomorfismi $\phi, \phi' \in W$, tali che $U = U_0 + \phi$ e $U' = U_0 + \phi'$. Dunque, per quanto già provato $U_0 = U + (-\phi)$ e quindi

$$U' = [U + (-\phi)] + \phi' = U + (\phi' - \phi);$$

che è la tesi per $\psi = \phi' - \phi$.

□

ESERCIZIO 3 *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 e sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$, un'applicazione bilineare simmetrica non-degenere con indice d'inerzia $i(g) = 2$.*

(a) Si mostri che il sottoinsieme $H = \{\, v \in V \mid g(v, v) < 0 \,\}$ non è vuoto.

(b) Posto $\|v\| = \sqrt{-g(v, v)}$, per ogni $v \in H$, si mostri che, presi comunque $v, w \in H$, si ha

$$\frac{|g(v, w)|}{\|v\|\,\|w\|} \geq 1, \qquad \begin{pmatrix} \textit{Disuguaglianza di} \\ \textit{Schwarz inversa} \end{pmatrix}$$

ove il segno di uguaglianza vale se, e solo se, v e w sono linearmente dipendenti.

Svolgimento: (a) Poichè $i(g) = 2$, esiste una decomposizione $V = W_+ \oplus W_-$ ove $\dim W_+ = 3$, $\dim W_- = 1$ e la restrizione di g a W_+ (risp. W_-) è definita positiva (risp. definita negativa). Dunque $H \neq \emptyset$ perchè contiene, ad esempio, un generatore di W_-.

(b) Siano $v, w \in H$ e si consideri il sottospazio $L(v, w)$. Se $\dim L(v, w) = 1$, allora v e w sono proporzionali e la tesi è vera come uguaglianza dei due membri. Se $\dim L(v, w) = 2$, allora, essendo $i(g) = 2$, tale sottospazio contiene dei vettori isotropi non-nulli (perchè?) e quindi esistono dei numeri reali t, tali che

$$0 = g(v + tw, v + tw) = g(v, v) + 2g(v, w)t + g(w, w)t^2.$$

Dunque il discriminante del trinomio non può essere negativo, ovvero

$$g(v, w)^2 - g(v, v)g(w, w) \geq 0,$$

da cui si deduce la tesi.

Supponiamo infine che $|g(v, w)| = \|v\|\,\|w\|$ e, a meno di cambiare il vettore v con $-v$, supponiamo $g(v, w) \geq 0$. Dunque si ha

$$g(v + tw, v + tw) = -\|v\|^2 + 2\|v\|\|w\|t - \|w\|^2t^2 = -(\|v\| - t\|w\|)^2;$$

da cui si deduce che il vettore $z = v + \frac{\|v\|}{\|w\|}w$ è isotropo. Inoltre,

$$g(w, z) = g(w, v + \frac{\|v\|}{\|w\|}w) = \|v\|\|w\| + \frac{\|v\|}{\|w\|}g(w, w) = 0,$$

essendo $g(w, w) = -\|w\|^2$. Quindi z è un vettore isotropo appartenente ad $L(w)^\perp$, ma su tale sottospazio g induce una applicazione bilineare definita negativa (perchè?), da cui si deduce che $z = 0$, ovvero $v = -\frac{\|v\|}{\|w\|}w$. □

ESERCIZIO 4 *Ricordiamo che una matrice quadrata $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ si dice triangolare superiore se, e solo se, le entrate poste al di sotto della diagonale principale sono tutte nulle; ovvero se, e solo se, $i > j \Rightarrow b_{ij} = 0$.*

Siano dati uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, ed una sua base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$.

(a) Si mostri che se ϕ e ψ sono due endomorfismi di V tali che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ ed $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\psi)$ siano matrici triangolari superiori, allora anche $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\psi \circ \phi)$ è una matrice triangolare superiore.

(b) Se ϕ è un endomorfismo invertibile, allora $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ è una matrice triangolare superiore se, e solo se, $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi^{-1})$ lo è.

(c) È vero o falso che per ogni endomorfismo ϕ di V esiste una base $\mathcal{V}$ rispetto alla quale ϕ abbia matrice triangolare superiore?

Svolgimento: Si osservi che, qualunque sia $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$, la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ è triangolare superiore se, e solo se, $\phi(v_i) \in L(v_1, \dots, v_i)$ per $i = 1, \dots, n$.

(a) Dunque se ϕ e ψ hanno matrice triangolare superiore relativamente a $\mathcal{V}$, per $i = 1, \dots, n$, si ha

$$\psi(\phi(v_i)) \in \psi(L(v_1, \dots, v_i)) = L(\psi(v_1), \dots, \psi(v_i)) \subseteq L(v_1, \dots, v_i);$$

e quindi anche $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\psi \circ \phi)$ è triangolare superiore.

(b) Se poi ϕ è invertibile ed $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ è triangolare superiore, si ha che

$$(L(v_1, \dots, v_i) = L(\phi(v_1), \dots, \phi(v_i)) \qquad \text{per } i = 1, \dots, n.$$

Applicando ϕ^{-1} ad entrambo i membri dell'uguaglianza si ottiene la tesi.

(c) Infine, essendo $\mathbb{C}$ un campo algebricamente chiuso, dato un qualunque endomorfismo ϕ di V, è sufficiente considerare una base rispetto a cui ϕ ha matrice in forma di Jordan, che è triangolare superiore. □

ESERCIZIO 5 *Al variare di $x \in \mathbb{R}$, si considerino le applicazioni bilineari simmetriche $g_x : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ di matrice*

$$G_x = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & x^2+4 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Si dica per quali valori di x, l'applicazione g_x è non-degenere ed in tal caso, se ne calcoli l'indice d'inerzia $i(g_x)$.

Svolgimento: La catena dei minori diagonali di G_x è uguale a: 5, 10, 5, 1, $x^2 - 25$. Dunque se ne deduce che

- g_x è degenere se, e solo se, $x = \pm 5$.
- $i(g_x) = 5$ se e solo se, $x^2 - 25 > 0$, ovvero se, e solo se, $x < -5$ oppure $x > 5$.
- $i(g_x) = 3$ se e solo se, $x^2 - 25 < 0$, ovvero se, e solo se, $-5 < x < 5$. □

ESERCIZIO 6 *Si determini la matrice di Jordan dell'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ che, rispetto alla base canonica $\{e_1, \dots, e_4\}$, ha matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si determini una base di $\mathbb{R}^4$, rispetto a cui la matrice di ϕ coincide con la matrice di Jordan.

Svolgimento: Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(x) = \det(A - \mathbf{1}x) = (x-2)^4$, e la matrice $A - 2$ ha rango 3. Dunque ϕ ha il solo autovalore 2, con molteplicità 4 e nullità 1, e la forma di Jordan della matrice di ϕ è quindi uguale a

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Indichiamo, come di consueto, con $\{e_1, \dots, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ ed osserviamo che

$$(A-2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A-2)^3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Dunque il vettore e_1 non appartiene a $\ker(\phi-2)^3$ e quindi una base rispetto alla quale ϕ ha matrice di Jordan è

$$(\phi-2)^3(e_1) = 9e_1 + 27e_4, \quad (\phi-2)^2(e_1) = 9e_3, \quad (\phi-2)(e_1) = 3e_2, \quad e_1.$$

□

ESERCIZIO 7 *Nello spazio euclideo orientato E^3, si considerino i punti P, P_1, P_2, P_3 in posizione generale, ed i vettori $v_i = P_i - P$, $i = 1, \dots, 3$.*

Sia $\{w_1, w_2, w_3\}$ la base ortonormale che si ottiene applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ e si considerino, al variare di t in $[0,1]$ i punti

$$P_i(t) = P + tw_i + (1-t)v_i, \qquad i = 1, \dots, 3.$$

(a) Si mostri che, per ogni $t \in [0,1]$, i punti P, $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$ sono in posizione generale e si calcoli il volume (non-orientato) del parallelepipedo determinato da tali punti.

(b) Nell'ipotesi in cui la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ sia concorde con l'orientamento fissato, si mostri che, per ogni $t \in [0,1]$, la base $\{P_1(t) - P, P_2(t) - P, P_3(t) - P\}$ è concorde con l'orientamento fissato.

Svolgimento: In base al procedimento di Gram-Schmidt si ha

$$L(v_1, \dots, v_i) = L(w_1, \dots, w_i), \quad \text{per } i = 1, 2, 3;$$

quindi si ha

$$v_1 = \alpha_1 w_1, \quad v_2 = \alpha_2 w_2 + \beta_1 w_1, \quad v_3 = \alpha_3 w_3 + \beta_2 w_2 + \gamma_1 w_1;$$

ed inoltre, dal procedimento stesso discende che le costanti α_1, α_2, α_3 sono tutte positive.

Poichè $\{w_1, w_2, w_3\}$ è una base ortonormale, può essere utilizzata per il calcolo del volume; ovvero, data un'applicazione 3-lineare alternante e non-nulla D, si ha

$$V(P_1(t) - P,\ P_2(t) - P,\ P_3(t) - P) = \frac{D(P_1(t) - P,\ P_2(t) - P,\ P_3(t) - P)}{D(w_1, w_2, w_3)} = \\ = \prod_{i=1}^{3}[t + (1-t)\alpha_i].$$

Al variare di t in $[0,1]$, ognuno dei fattori del prodotto scritto sopra è strettamente positivo, quindi il volume non-orientato coincide con quello orientato ed è strettamente positivo. Ciò conclude la verifica di (a).

Per quanto riguarda (b), è sufficiente osservare che il volume testè calcolato altro non è che il determinante della matrice del cambiamento di base tra le basi ordinate $\{P_1(t)-P,\ P_2(t)-P,\ P_3(t)-P\}$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$. Poichè tale determinanate è positivo per ogni valore di $t \in [0,1]$, si conclude che tutte le basi $\{P_1(t) - P,\ P_2(t) - P,\ P_3(t) - P\}$ sono tra loro equiorientate. Infine, osservando che, per $t = 0$, si ha $P_i(t) - P = v_i$, per $i = 1,2,3$; si conclude che tutte le basi $\{P_1(t) - P,\ P_2(t) - P,\ P_3(t) - P\}$ sono concordi con l'orientamento fissato in E^3. □

ESERCIZIO 8 *Si considerino i punti P_1, P_2, P_3, P_4 della retta proiettiva, a due, a due distinti. Il birapporto $(P_1, P_2, P_3, P_4) := \frac{x_1}{x_0}$ è definito dalle condizioni*

$$P_1 = \sigma L(v_1), \quad P_2 = \sigma L(v_0), \quad P_3 = \sigma L(v_0 + v_1), \quad P_4 = \sigma L(x_0 v_0 + x_1 v_1).$$

Dati i punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ di coordinate omogenee

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad, Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

si calcolino i birapporti (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) e (Q_1, Q_2, Q_4, Q_3).

Svolgimento: Per calcolare il birapporto (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) dobbiamo determinare una base di $\mathbb{R}^2$ associata al riferimento proiettivo $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, e determinare le coordinate omogenee di Q_4 relativamente a tale base. Indicando con $\{e_1, e_2\}$ la base canonica, si ha

$$Q_1 = \sigma L(e_1 + e_2), \quad Q_2 = \sigma L(e_2), \quad Q_3 = \sigma L(2e_1 + e_2), \quad Q_4 = \sigma L(e_1 + 3e_2).$$

In particolare, $\alpha(e_1 + e_2) + \beta e_2 \in L(2e_1 + e_2)$ se $\alpha = 2$, $\beta = -1$, e quindi dobbiamo determinare le coordinate omogenee di Q_4 relativamente alla base $\{2(e_1 + e_2), -e_2\}$ di $\mathbb{R}^2$; ovvero le costanti $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ tali che

$$2x_1(e_1 + e_2) - x_0 e_2 \in L(e_1 + 3e_2).$$

Se ne deduce che $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (o qualunque altra coppia ad essa proporzionale) soddisfa alle condizioni poste e quindi

$$(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \frac{x_1}{x_0} = -\frac{1}{4}.$$

Con un calcolo analogo, si ottiene $(Q_1, Q_2, Q_4, Q_3) = -4$. □

ESERCIZIO 9 *Sia $\mathcal{P}$ una parabola del piano euclideo e siano h il suo asse e V il suo vertice. Si mostri che*

(a) se P è un punto dell'asse h, la polare di P è perpendicolare all'asse;

(b) se P è un punto dell'asse h, e p è la polare di P, allora la distanza di P da V è uguale alla distanza di p da V.

Svolgimento: (a) È sufficiente ricordare che, poichè $P \in h$, la polare di P deve passare per il polo di h, che è il punto improprio corrispondente alla direzione perpendicolare all'asse.

(b) Poniamoci in un sistema di riferimento (ortonormale) rispetto a cui $\mathcal{P}$ ha equazione canonica $2y = ax^2$. Dunque, possiamo supporre che l'asse h abbia equazione $x = 0$ (asse y) e che il vertice sia il punto $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Allora, dato un punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$, appartenente all'asse, la polare p di P ha equazione $y = -t$; ed è immediato verificare che $\delta_0(P, V) = \delta_0(p, V) = |t|$. $\square$

ESERCIZIO 10 *Sia $\mathcal{F}$ un fascio di coniche nel piano proiettivo e sia P un punto non appartenente al vertice di qualche conica degenere del fascio. Si mostri che le polari del punto P rispetto alle coniche del fascio $\mathcal{F}$ formano una fascio di rette del piano proiettivo.*(*)

Svolgimento: Sia fissato un riferimento in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e siano A e B le matrici di due coniche distinte $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ del fascio $\mathcal{F}$. Ogni conica del fascio $\mathcal{F}$ ha matrice $\lambda A + \mu B$ per opportuni valori dei parametri omogenei (λ, μ).

Si indichi con P la colonna delle coordinate omogenee dell'omonimo punto P. Allora, i punti $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, appartenenti alla polare di P rispetto alla conica di matrice $\lambda A + \mu B$, soddisfano all'equazione lineare omogenea

$$0 = {}^tP(\lambda A + \mu B)X = \lambda({}^tPAX) + \mu({}^tPBX).$$

Quindi, se le due rette di coordinate plückeriane ${}^tPA$ e ${}^tPB$ sono distinte, le polari di P, rispetto alle coniche del fascio $\mathcal{F}$ sono tutte e sole le rette appartenenti al fascio generato da tali rette. Altrimenti tutte le rette di coordinate plückeriane $\lambda^tPA + \mu^tPB$ sono tra loro coincidenti e, quindi, il punto P ha sempre la stessa polare rispetto ad ogni conica del fascio.

Per concludere, osserviamo che ${}^tPA$ e ${}^tPB$ rappresentano la stessa retta se, e solo se, le due righe sono linearmente dipendenti, ovvero se, e solo se, esistono due parametri omogenei $(\lambda_0, \mu_0) \neq (0, 0)$ tali che $\lambda_0{}^tPA + \mu_0{}^tPB = 0$. Ciò significa esattamente che la conica del fascio $\mathcal{F}$, di matrice $\lambda_0 A + \mu_0 B$ è una conica degenere e che P appartiene al vertice di tale conica. $\square$

(*) Lasciamo al lettore il compito di discutere la seguente affermazione, apparentemente *duale* dell'enunciato dell'esercizio proposto. *È vero o falso che, fissata una generica retta del piano proiettivo, i poli di tale retta rispetto alle coniche del fascio $\mathcal{F}$ sono tra loro allineati?*

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica

prova scritta del 26 settembre 1994 .

ESERCIZIO 1 *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

e si indichi con $\mathcal{X}$ *l'insieme*

$$\mathcal{X} = \{ X \in M_4(\mathbb{R}) \mid AX \text{ è riga-equivalente ad } A \} .$$

Si mostri che tutte le matrici $X \in \mathcal{X}$ *hanno un autovettore in comune e si determini tale autovettore.*

Svolgimento: Poichè i sistemi omogenei di equazioni lineari di matrice A ed AX sono riga-equivalenti, hanno lo stesso insieme di soluzioni e quindi ogni $X \in \mathcal{X}$ trasforma in sé lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$. Tale spazio di soluzioni ha dimensione 1, perchè il rango di A è uguale a 3 e questo è lo spazio di autovettori comune agli elementi di $\mathcal{X}$, generato dal vettore $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \\ -15 \end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 2 *Si determini l'insieme delle matrici reali di ordine 3 che siano simultaneamente antisimmetriche e nilpotenti.*

Svolgimento: Una generica matrice di ordine 3, antisimmetrica,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} ,$$

ha polinomio caratteristico uguale a $p_A(x) = x^3 + (a^2 + b^2 + c^2)x$. Se A deve essere nilpotente il suo polinomio caratteristico deve essere x^3 e quindi deve aversi $a^2 + b^2 + c^2 = 0$. Poichè A è una matrice reale ciò implica $A = 0$. □

ESERCIZIO 3 *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4, dotato di un'applicazione bilineare, simmetrica, non-degenere g, di indice di inerzia $i(g) = 2$.*

(a) Dato un vettore non-isotropo $u \in V$, si mostri che l'applicazione $\sigma_u : V \to V$, definita ponendo

$$\sigma_u(x) = x - 2\frac{g(x,u)}{g(u,u)}u, \quad \text{per ogni } x \in V,$$

è un'isometria di (V, g).

(b) Dati due vettori v, w di V, tali che $g(v,v) = g(w,w) < 0$, si mostri che esiste un vettore $z \in V$ tale che $\sigma_z(v) = \pm w$.

Svolgimento: (a). Per costruzione, σ_u è un'applicazione lineare e, con un calcolo diretto, si verifica che

$$\begin{aligned} g(\sigma_u(x),\sigma_u(y)) &= \\ &= g(x,y) - 2\frac{g(x,u)}{g(u,u)}g(u,y) - 2\frac{g(y,u)}{g(u,u)}g(x,u) + 4\frac{g(x,u)g(y,u)}{g(u,u)^2}g(u,u) = \\ &= g(x,y); \end{aligned}$$

e quindi g è un'isometria.

(b). Si osservi che, per definizione dell'isometria σ_z, si ha $\sigma_z(v) \in L(v,z)$. Dunque il vettore z cercato deve essere del tipo $z = v + bw$ e, quando l'applicazione è definita,

$$\sigma_{v+bw}(v) = v - 2\frac{g(v,v) + bg(v,w)}{(1+b^2)g(v,v) + 2bg(v,w)}(v + bw) = \pm w$$

se, e solo se, $b = \pm 1$. Uno almeno tra i due vettori $v + w$ e $v - w$ non è isotropo, perchè altrimenti anche v e w lo sarebbero contro le ipotesi(*). □

ESERCIZIO 4 *Si ricorda che una matrice X si dice idempotente se $X^2 = X$.*

(a) Si mostri che due matrici idempotenti A e B (di ordine n) sono simili se, e solo se, $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$.

(b) È vero o falso che due matrici nilpotenti A e B (di ordine n) sono simili se, e solo se, $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$*?*

Svolgimento: (a). Se una matrice A è idempotente allora il suo polinomio minimo $p_A(t)$ deve dividere $t^2 - t$ e quindi A è diagonalizzabile con autovalori uguali a 0 ed 1. È quindi chiaro che due matrici idempotenti A e B (di ordine n) sono simili se, e solo se, hanno lo stesso rango.

(b). L'affermazione è falsa, come si può verificare considerando le matrici nilpotenti

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che hanno entrambe rango 2, ma non sono simili, perchè la prima ha polinomio minimo $\lambda_A(t) = t^3$, mentre la seconda ha polinomio minimo $\lambda_B(t) = t^2$. □

(*) Si osservi che l'ipotesi sull'indice di inerzia è superflua ed era sufficiente la condizione che g fosse non-degenere. Tale condizione diventa invece necessaria se si suppone $g(v,v) = g(w,w) = 0$ (perchè?).

ESERCIZIO 5 *Si determini la matrice di Jordan dell'endomorfismo ϕ di $\mathbb{R}^4$ che, rispetto alla base canonica $\{e_1, \dots, e_4\}$, ha matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determini una base di $\mathbb{R}^4$, rispetto a cui la matrice di ϕ coincide con la matrice di Jordan.

Svolgimento: L'endomorfismo ϕ ha polinomio caratteristico $p_\phi(x) = (x-1)^4$ e $\mathrm{rk}(\phi - 1) = 3$; quindi il polinomio minimo di A coincide con il suo polinomio caratteristico e la matrice di Jordan di ϕ è

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolando le potenze della matrice $A - 1$, si può verificare che il vettore $e_3 \notin \ker(\phi - 1)^3$ e quindi una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan è costituita dai vettori

$$(\phi - 1)^3(e_3) = 6e_2, \quad (\phi - 1)^2(e_3) = 3e_1 + 6e_2, \quad (\phi - 1)(e_3) = -(e_1 + e_2 + e_4), \quad e_3.$$

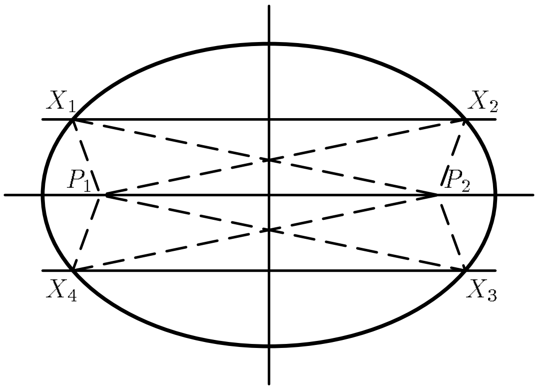
□

ESERCIZIO 6 *Nel piano euclideo standard si considerino i punti $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Al variare del numero reale positivo α, si dicano quanti sono i punti X tali che il triangolo P_1, P_2, X abbia perimetro $2(3 + \sqrt{5})$ ed area α.*

Svolgimento: I punti $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tali che il triangolo P_1, P_2, X abbia perimetro $2(3 + \sqrt{5})$ sono il supporto reale un'ellisse di fuochi P_1 e P_2, determinata dalla condizione $\|X - P_1\| + \|X - P_2\| = 2(3 + \sqrt{5}) - \|P_1 - P_2\|$; ovvero l'ellisse di equazione affine

$$5x^2 - 7y^2 + 16xy - 18x + 36y + 45 = 0.$$

Un tale triangolo ha area α se, e solo se, la sua altezza è uguale a $\frac{2\alpha}{\|P_1 - P_2\|}$, ovvero se, e solo se, X appartiene all'intersezione tra l'ellise data e le rette parallele all'asse focale (e quindi al vettore $P_2 - P_1$), distanti $\alpha/\sqrt{5}$ da tale asse. Facciamo uno schizzo della situazione.



Vi sono quindi 4 punti per $0 < \alpha/\sqrt{5} <$ semiasse trasverso, due soli punti quando l'altezza del triangolo è uguale al semiasse trasverso. Non vi sono dei triangoli di perimetro dato con l'altezza superiore al semiasse trasverso. □

ESERCIZIO 7 *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le rette*

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad ed \quad s : \begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ z = 1 \end{cases}.$$

(a) Si determini una retta t che sia perpendicolare ed incidente ad entrambo le rette r ed s.
(b) Si determini il piano π equidistante da r ed s.

Svolgimento: (a). La retta r è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre la retta s è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Un vettore perpendicolare ad entrambe è $v \times w = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e quindi la retta t è intersezione tra il piano σ_r, contenente r e parallelo al vettore $v \times w$, ed il piano σ_s, contenente r e parallelo al vettore $v \times w$; ovvero

$$t : \begin{cases} y - z = 0 \\ 2x - y + 5z = 5 \end{cases}.$$

(b). Indicati con R e S i punti $R = r \cap t = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 5/6 \\ 5/6 \end{pmatrix}$ ed $S = s \cap t = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, il piano π è perpendicolare al vettore $v \times w$ e passa per il punto medio $P = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 11/12 \\ 11/12 \end{pmatrix}$ del segmento RS. Si ha quindi π : $-2(x - 2/3) + (y - 11/12) + (z - 11/12) = 0$, ovvero $\pi : -2x + y + z = 1/2$. □

ESERCIZIO 8 *Si consideri la retta proiettiva reale $\mathbb{P}(\mathbb{C})$, ove $\mathbb{C}$ è il corpo dei numeri complessi, considerato come spazio vettoriale reale. Dato un numero complesso $\alpha \neq 0$, si indichi con ϕ_α la proiettività di $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ determinata dall'applicazione lineare*

$$\begin{aligned} f_\alpha : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \alpha z \end{aligned}$$

(a) Fissato il riferimento $\{\langle 1 \rangle, \langle i \rangle, \langle 1+i \rangle\}^{(*)}$ in $\mathbb{P}(\mathbb{C})$, si scriva la matrice di ϕ_{2i-3}.
(b) È vero o falso che ogni proiettività di $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ è del tipo ϕ_α per qualche $\alpha \in \mathbb{C}$?

Svolgimento: (a). I numeri complessi 1 e i formano una base associata al riferimento proiettivo $\{\langle 1 \rangle, \langle i \rangle, \langle 1+i \rangle\}$ e, rispetto a tale base, l'endomorfismo ϕ_{2i-3} ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b). Dato $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ la matrice di ϕ_α, relativamente al riferimento dato, è uguale a $\begin{pmatrix} b & -a \\ a & b \end{pmatrix}$. È quindi evidente che la proiettività di matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è del tipo proposto. □

$^{(*)}$ Col simbolo $\langle z \rangle$ si indica il sottospazio vettoriale reale di $\mathbb{C}$ generato dal numero complesso z.

ESERCIZIO 9 *Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ consideri il fascio $\mathcal{F}$, generato dalle coniche di equazioni omogenee*

$$x_1^2 - 4x_0^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0 \qquad e \qquad x_1^2 - 9x_0^2 + x_2^2 + 4x_0x_1 + 4x_0x_2 = 0$$

Si determini una retta r affinchè il fascio $\mathcal{F}$ sia un fascio di iperboli nel piano affine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) - r$.

Svolgimento: Le coniche date hanno rispettivamente matrici

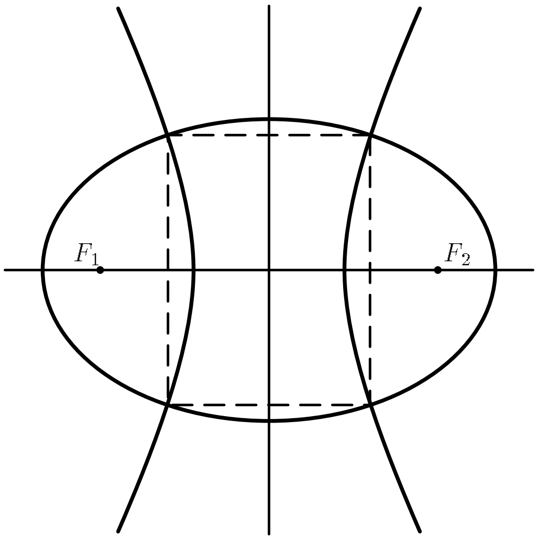
$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, la matrice $A - B$ rappresenta una conica degenere del fascio dato, di equazione $x_0(5x_0 - 3x_1 - 3x_2) = 0$ ed i punti base del fascio stanno su queste due rette. Mentre la retta $x_0 = 0$ interseca le due coniche in punti complessi non reali, la retta $r : 5x_0 - 3x_1 - 3x_2 = 0$ contiene due punti base reali del fascio e quindi, la scelta di questa retta come retta impropria rende $\mathcal{F}$ sia un fascio di iperboli del piano affine $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) - r$. □

ESERCIZIO 10 *Nel piano euclideo, si considerino un'iperbole $\mathcal{C}$ ed un ellisse $\mathcal{D}$ aventi gli stessi fuochi. Indicato con $\mathcal{F}$ il fascio di coniche determinato da $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, si mostri che tutte le coniche non degeneri di $\mathcal{F}$ sono coniche a centro, concentriche.*

Quanti circoli non-degeneri vi sono nel fascio $\mathcal{F}$?

Svolgimento: Poichè $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ hanno gli stessi fuochi, devono necessariamente avere gli stessi assi e lo stesso centro e quindi ogni conica del fascio deve avere tale punto come polo della retta impropria. Inoltre, poichè gli assi delle due coniche sono assi di simmetria per entrambe, i punti base del fascio sono simmetrici rispetto a tali assi e quindi formano un rettangolo del piano euclideo. È chiaro che vi è un solo circolo circoscritto a tale rettangolo.(*) Tracciamo uno schizzo della situazione.



□

(*) In base all'ultima osservazione sulle simmetrie dei punti base del fascio, si può fissare un sistema di coordinate affichè le coniche degeneri del fascio abbiano equazioni $x^2 - 1 = 0$ ed $y^2 - a = 0$ $(a > 0)$. In tal modo i risultati precedenti si ottengono con facili calcoli.

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica
prova scritta del 24 febbraio 1995 .

ESERCIZIO 1 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, e siano dati tre sottospazi U, W, Z, di dimensione 2, tali che*

$$V = U \oplus W = W \oplus Z = U \oplus Z.$$

Si dica se esiste o meno una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di V tale che

$$U = L(v_1, v_2), \qquad W = L(v_3, v_4), \qquad Z = L(v_1 + v_4, v_2 + v_3).$$

Svolgimento: Una tale base esiste. Si consideri $Z \subset U \oplus W$ e si osservi che, essendo $U \cap Z = (0) = Z \cap W$, le restrizioni delle proiezioni $p_{U|Z} : Z \to U$ e $p_{W|Z} : Z \to W$ sono omomorfismi iniettivi. Osservando poi che $\dim U = \dim W = \dim Z$, si conclude che le due applicazioni sono isomorfismi. Quindi, data una base $\{z_1, z_2\}$ di Z e posto

$$v_1 = p_U(z_1),\ v_2 = p_U(z_2), \qquad v_3 = p_W(z_2),\ v_4 = p_W(z_1),$$

si ha $U = L(v_1, v_2)$, $W = L(v_3, v_4)$ e quindi $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di V e, per costruzione, $z_1 = v_1 + v_4$ e $z_2 = v_2 + v_3$. □

ESERCIZIO 2 *Siano dati uno spazio vettoriale V, di dimensione $n \geq 2$, ed un endomorfismo ϕ di V. Supponiamo che esista un sottospazio proprio $V_1 \subset V$su cui ϕ induca un endomorfismo ed indichiamo con ϕ_1 la restrizione di ϕ a V_1. Se V_2 è un sottospazio tale che $V = V_1 \oplus V_2$, si indichi con ϕ_2 l'applicazione composta*

$$V_2 \xrightarrow{\phi|_{V_2}} V \xrightarrow{p_2} V_2,$$

ove $p_2 : V_1 \oplus V_2 \to V_2$ è la proiezione canonica.

Si mostri che

$$p_\phi(X) = p_{\phi_1}(X)\, p_{\phi_2}(X) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tr}\phi = \operatorname{tr}\phi_1 + \operatorname{tr}\phi_2,$$

ove $p_\phi(X)$ (risp. $\operatorname{tr}\phi$) è il polinomio caratteristico (risp. la traccia) dell'endomorfismo ϕ.

Svolgimento: Siano $\mathcal{V}_1 = \{v_1, \dots, v_r\}$ una base di V_1 e $\mathcal{V}_2 = \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base di V_2 e si consideri la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di $V = V_1 \oplus V_2$ che si ottiene unendo le due basi. Scrivendo la matrice (a blocchi) di ϕ rispetto a tali basi, si ha

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

ove $A_1 = \alpha_{\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_1}(\phi_1)$ ed $A_2 = \alpha_{\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_2}(\phi_2)$. Da ciò si deduce la tesi. □

ESERCIZIO 3 *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n, ϕ un endomorfismo di V e D un'applicazione n-lineare alternante non-nulla su V.*

(a) Si mostri che l'applicazione D'_ϕ, definita ponendo

$$D'_\phi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{j=0}^{n}D(x_1,\dots,\phi(x_j),\dots,x_n),$$

per ogni n-upla di vettori di V, è n-lineare e alternante.

(b) Sia $\{v_1,\dots,v_n\}$ una base di V, si mostri che il quoziente $\dfrac{D'_\phi(v_1,\dots,v_n)}{D(v_1,\dots,v_n)}$ non dipende né dalla scelta della base, né dalla scelta di D.

(c) Fissata una base $\mathcal{V}=\{v_1,\dots,v_n\}$ di V, si calcoli il quoziente $\dfrac{D'_\phi(v_1,\dots,v_n)}{D(v_1,\dots,v_n)}$ a partire dalla matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$.

Svolgimento: (a). L'applicazione D'_ϕ è n-lineare poichè lo sono tutti gli addendi della somma che la definisce, in quanto ogni addendo è composizione dell'applicazione lineare ϕ con l'applicazione n-lineare D. Per mostrare che D'_ϕ è alternante è sufficiente verificare che si annulla non appena due tra gli argomenti coincidono. Supponiamo allora che si abbia $x_i=x=x_j$, per una coppia di indici $i\neq j$. Poichè D è alternante, si ha

$$\begin{aligned}D'_\phi(x_1,\dots,x,\dots,x,\dots,x_n)&=\\&=D(x_1,\dots,\phi(x),\dots,x,\dots,x_n)+D(x_1,\dots,x,\dots,\phi(x),\dots,x_n)=0,\end{aligned}$$

perchè i due addendi si ottengono l'uno dall'altro tramite uno scambio tra gli argomenti e D è alternante.

(b). Poichè lo spazio $A^n(V)$ delle forme n-lineari alternanti su V ha dimensione $\binom{n}{n}=1$, il "rapporto" tra le due forme n-lineari alternanti D e D'_ϕ non dipende dalla base scelta per calcolarlo, ma solo dalle due applicazioni date. Se poi $0\neq G\in A^n(V)$, allora $G=\beta D$, per un'opportuna costante $\beta\neq 0$. Quindi, qualunque sia $j=1,\dots,n$, si ha

$$\frac{G(x_1,\dots,\phi(x_j),\dots,x_n)}{G(x_1,\dots,x_n)}=\frac{\beta D(x_1,\dots,\phi(x_j),\dots,x_n)}{\beta D(x_1,\dots,x_n)};$$

e perciò i rapporti D'_ϕ/D e G'_ϕ/G coincidono.

(c). Sia $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)=A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Allora $\phi(v_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}v_i$ e quindi

$$D(v_1,\dots,\phi(v_j),\dots,v_n)=a_{jj}D(v_1,\dots,v_n),$$

poichè D è alternante. Si conclude che

$$\frac{D'_\phi(v_1,\dots,v_n)}{D(v_1,\dots,v_n)}=\sum_{j=1}^{n}a_{jj}=\operatorname{tr}\phi.$$

□

ESERCIZIO 4 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, e siano dati tre sottospazi U, W, Z, di dimensione 2, tali che*

$$V = U \oplus W = W \oplus Z = U \oplus Z.$$

Si dica se esiste o meno un'applicazione bilineare simmetrica, non-degenere $g : V \times V \to \mathbb{Q}$, per cui i tre sottospazi U, W, Z siano tutti isotropi.

Svolgimento: Sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di V scelta come nell'Esercizio 1, ovvero tale che

$$U = L(v_1, v_2), \qquad W = L(v_3, v_4), \qquad Z = L(v_1 + v_4, v_2 + v_3).$$

Se una tale g esiste, essendo U e W isotropi, la sua matrice, rispetto alla base data, è del tipo $\begin{pmatrix} 0 & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix}$, ove $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$. Affichè anche Z sia un sottospazio isotropo, si deve avere

$$0 = g(v_1 + v_4, v_1 + v_4) = 2g(v_1, v_4), \quad 0 = g(v_2 + v_3, v_2 + v_3) = 2g(v_2, v_3),$$
$$0 = g(v_1 + v_4, v_2 + v_3) = g(v_1, v_3) + g(v_2, v_4),$$

e ciò implica che A deve essere proporzionale alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si conclude che esiste un'applicazione bilineare g soddisfacente alle condizioni date. $\square$

ESERCIZIO 5 *Siano dati uno spazio vettoriale V, di dimensione $n \geq 2$ sul corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, ed un endomorfismo ϕ di V. Si mostri che esiste un sottospazio proprio V_1 di V, tale che ϕ induca un endomorfismo su V_1.*

Svolgimento: Poichè $\mathbb{C}$ è un campo algebricamente chiuso, esiste almeno un autovettore $v \neq 0$, relativo ad un autovalore α di ϕ. Posto quindi $V_1 = L(v)$, si ha $\phi(v) = \alpha v \in V_1$ e $\dim V_1 = 1 < \dim V$, per cui V_1 è un sottospazio proprio. $\square$

ESERCIZIO 6 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 6 sul corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Si determinino gli endomorfismi di V che hanno polinomio minimo uguale a $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ e rango maggiore o uguale a 4.*

Svolgimento: Tutti gli endomorfismi in questione hanno il polinomio minimo uguale a $x^2(x-3)^2$ e quindi gli unici autovalori possibili sono 0 e 3, entrambi con molteplicità maggiore o uguale a 2. Poichè entrambi i fattori irriducibili del polinomio minimo compaiono con grado 2, nessuno dei blocchi di Jordan delle matrici degli endomorfismi proposti può essere diagonale. Si conclude che gli endomorfismi cercati hanno matrici di Jordan del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

ove la sottomatrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ è una delle seguenti

$$1. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad 3. \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad 4. \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nei primi due casi l'endomorfismo ha rango 4, mentre nei secondi due il rango è 5. Osserviamo infine che anche la scelta $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ produce un endomorfismo col polinomio minimo uguale a quello dato, ma in questo caso il rango dell'endomorfismo è uguale a 3. □

ESERCIZIO 7 *Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{C})$ si considerino le sottovarietà lineari L ed L_λ, di equazioni*

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 - (\lambda+1)x_3 = \lambda \\ 2\lambda x_2 + x_3 - \lambda x_4 = 2\lambda \end{cases}.$$

(a) Si calcoli, al variare di λ la dimensione della varietà L_λ.
(b) Si determinino, se esistono, i valori di λ per cui L ed L_λ sono sghembe.

Svolgimento: (a). Osserviamo che

$$\dim L_\lambda = 4 - \operatorname{rk} \begin{pmatrix} \lambda & 3 & -(\lambda+1) & 0 \\ 0 & 2\lambda & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

e poichè la matrice data ha i minori $\lambda(\lambda+1)$ e $-2\lambda(\lambda+1)-3$ che non sono mai simultaneamente nulli, si conclude che il rango della matrice data è sempre uguale a 2 e quindi $\dim L_\lambda = 2$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.
(b). Anche $\dim L = 2$ e due piani non possono mai essere sghembi in uno spazio di dimensione 4, perchè la sottovarietà lineare generata da due piani sghembi ha dimensione 5. □

ESERCIZIO 8 *Nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, si consideri il fascio generato dalle coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, di equazioni omogenee*

$$\mathcal{C}_1 : x_0(x_1 + x_2 - x_0) = 0 \quad e \quad \mathcal{C}_2 : (ix_0 - ix_1 + x_2)(x_0 - ix_1 - x_2) = 0.$$

(a) Si determinino le coniche reali contenute in tale fascio.
(b) Considerando il piano affine reale immerso nel modo usuale in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (retta impropria $x_0 = 0$), si mostri che il fascio in questione non contiene alcuna parabola e inoltre, si determini il luogo dei centri delle coniche reali di tale fascio.

Svolgimento: (a). La generica conica del fascio in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ha matrice

$$(a+ib)\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (c+id)\begin{pmatrix} 2i & 1-i & 1-i \\ 1-i & -2 & 0 \\ 1-i & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

ove $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e la parte immaginaria di una tale matrice è nulla se, e solo se, $b = c$ e $d = 0$. Dunque le coniche reali del fascio hanno matrici

$$A_{(a,b)} = a\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

ove $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(b). È immediato verificare che non vi sono parabole nel fascio in questione e che le coniche sono non-degeneri per $b \neq 0$. I centri di tali coniche sono i punti C tali che ${}^tCA_{(a,b)} = \rho(1,0,0)$; e quindi sono tutti i punti propri ($b \neq 0$) della retta $x_1 - x_2 = 0$. □

ESERCIZIO 9 *In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione omogenea*

$$2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_0x_2 - 2x_0^2 = 0.$$

Si consideri il piano affine immerso in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ prendendo come retta impropria la retta di equazione $x_0+x_1 = 0$ e si dica se la conica indotta da $\mathcal{C}$ sul piano affine è una conica a centro. In caso affermativo, si determinino le coordinate del centro di tale conica e le direzioni di una coppia di assi coordinati rispetto a cui la conica abbia matrice diagonale.

Svolgimento: La conica $\mathcal{C}$ è una conica a centro del piano affine dato se il polo della retta $r : x_0+x_1 = 0$ non appartiene ad r. La matrice della conica è $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, e quindi il polo C della retta r deve soddisfare alla condizione ${}^tCA = \rho(1, 1, 0)$. Da ciò si ottiene $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \notin r$.

Dunque $\mathcal{C}$ è una conica a centro del piano dato e le direzioni di due assi rispetto a cui la conica abbia matrice diagonale sono due punti della retta (impropria) r, ciascuno appartenente alla polare dell'altro (direzioni dei diametri coniugati)(*). Ad esempio possiamo prendere i punti $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 10 *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione n sul corpo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, e ϕ un endomorfismo di V. Si dimostri che vale l'uguaglianza*

$$\det(1 - t\phi) = \exp\left[-\sum_{j\geq 1} \operatorname{tr}(\phi^j)\frac{t^j}{j}\right]$$

ove t è un'indeterminata sul corpo $\mathbb{C}$.

Svolgimento: Dimostriamo l'affermazione facendo induzione su $n = \dim V$.
Sia $n = 1$. Allora $V = L(v)$ e $\phi(v) = av$ per qualche costante a. Quindi $\phi^j(v) = a^j v$ per ogni intero $j \geq 1$, da cui si deduce $\operatorname{tr}(\phi^j) = a^j$. Allora i due membri dell'uguaglianza sono

$$\det(1 - t\phi) = 1 - ta \qquad \text{ed} \qquad \exp\left[-\sum_{j\geq 1} \operatorname{tr}(\phi^j)\frac{t^j}{j}\right] = \exp\left[-\sum_{j\geq 1} \frac{(at)^j}{j}\right].$$

L'osservazione $\log(1 - at) = -\sum_{j\geq 1} \frac{(at)^j}{j}$ permette di concludere.
Sia $n \geq 2$ e supponiamo che l'uguaglianza sia vera per gli endomorfismi di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali di dimensione minore di n. In base all'Esercizio 5 esiste un sottospazio proprio $V_1 \subset V$ su cui ϕ induce un endomorfismo. Inoltre, nelle notazioni dell'Esercizio 2, scelto comunque un complementare V_2 di V_1, si può scrivere

$$p_\phi(X) = p_{\phi_1}(X)\, p_{\phi_2}(X) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tr}(\phi^j) = \operatorname{tr}(\phi_1^j) + \operatorname{tr}(\phi_2^j),$$

(*) Ricordiamo che due punti P e P' di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono coniugati rispetto a $\mathcal{C}$ se, e solo se, ${}^tPAP' = 0$.

ove $p_\phi(X)$ stà ad indicare il polinomio caratteristico dell'endomorfismo ϕ. Si osservi che $\det(1-t\phi) = t^n p_\phi(1/t)$ e che, per gli endomorfismi ϕ_1 e ϕ_2 vale l'ipotesi induttiva essendo V_1 e V_2 due sottospazi propri. Dunque, per il membro di sinistra dell'uguaglianza si ha

$$\det(1-t\phi) = t^n p_\phi(1/t) = t^{n_1} p_{\phi_1}(1/t) t^{n_2} p_{\phi_2}(1/t) = \det(1-t\phi_1)\det(1-t\phi_2).$$

Per l'ipotesi induttiva questo termine è uguale ad

$$\begin{aligned} &\exp\left[-\sum_{j\geq 1} \mathrm{tr}(\phi_1^j)\frac{t^j}{j}\right] \exp\left[-\sum_{j\geq 1} \mathrm{tr}(\phi_2^j)\frac{t^j}{j}\right] = \\ &\quad = \exp\left[-\sum_{j\geq 1} (\mathrm{tr}(\phi_1^j) + \mathrm{tr}(\phi_2^j))\frac{t^j}{j}\right] = \exp\left[-\sum_{j\geq 1} \mathrm{tr}(\phi^j)\frac{t^j}{j}\right] \end{aligned}$$

E questo è proprio il membro di destra dell'uguaglianza, che è quanto vogliamo. $\square$

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica

prova scritta del 21 giugno 1995 .

ESERCIZIO 1 *Si considerino in $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ i piani π e σ_λ di equazioni*

$$\pi : \begin{cases} 3x_1 - 2x_3 = -1 \\ x_3 - x_2 = 2 \end{cases} \qquad e \qquad \sigma_\lambda : \begin{cases} (\lambda - 1)x_1 + 2x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \\ \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Si determinino i valori di $\lambda \in \mathbb{Q}$ per cui π e σ_λ sono contenuti in uno stesso iperpiano.

Svolgimento: Fissato λ, i due piani π e σ_λ sono contenuti in un iperpiano se e solo se, si intersecano in una retta, oppure sono paralleli. In entrambo i casi, il rango della matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \lambda - 1 & 2 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

deve essere minore di 4. Poichè $\det A_\lambda = -3\lambda(\lambda + 2)$, ciò può aversi per $\lambda = 0$ oppure per $\lambda = -2$. Discutiamo i due casi.

$\lambda = 0$ Il rango di A_0 è uguale a 3 e quindi π e σ_0 non sono paralleli. D'altra parte, i due piani non sono nemmeno incidenti, come si osserva calcolando il rango della matrice completa del sistema che determina $\pi \cap \sigma_0$. Quindi π e σ_0 non sono contenuti in uno stesso iperpiano.

$\lambda = -2$ Il rango di A_{-2} è uguale a 3 e quindi π e σ_{-2} non sono paralleli. D'altra parte, i due piani non sono nemmeno incidenti, perchè sono contenuti in due iperpiani tra loro paralleli; precisamente π è contenuto nell'iperpiano di equazione $x_3 - x_2 = 2$, mentre σ_{-2} è contenuto in $x_3 - x_2 = 0$.

Concludendo, non vi è alcun valore di λ per cui i due piani π e σ_λ siano contenuti in uno stesso iperpiano di $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$. $\square$

ESERCIZIO 2 *Si consideri l'applicazione $g : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita ponendo $g(A, B) = \operatorname{tr}(AB)$, ove $\operatorname{tr} X$ indica la traccia della matrice X ovvero la somma degli elementi posti sulla diagonale di X.*

(a) Si mostri che g è bilineare, simmetrica e non degenere.

(b) Si calcoli l'indice di inerzia $i(g)$.

Svolgimento: (a). L'applicazione g è bilineare perchè si ottiene componendo il prodotto tra matrici, che è un'applicazione bilineare, con l'applicazione lineare $\operatorname{tr} : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, che associa ad ogni matrice la sua traccia. Per verificare la simmetria, si osservi che, date due matrici $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ e $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, l'elemento di posto (i, i) del prodotto AB è uguale a $\sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hi}$. Da ciò si deduce

$$\operatorname{tr} AB = \sum_{1 \le i,h \le n} a_{ih} b_{hi} = \sum_{1 \le i,h \le n} b_{hi} a_{ih} = \operatorname{tr} BA.$$

Infine, per verificare che g è non degenere, si osservi che, se $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \ne 0$ esiste una matrice X tale che $\operatorname{tr} AX \ne 0$. Infatti, se a_{hk} è un'entrata non nulla della matrice A, si consideri la matrice

$X = \varepsilon(k, h)$ della base canonica di $M_n(\mathbb{R})^{(*)}$. Allora, il prodotto AX ha tutte le entrate uguali a zero, con l'eccezione della h-esima colonna, ove si trova copia della k-esima colonna di A. Ciò significa che l'unica entrata non-nulla sulla diagonale del prodotto AX è a_{hk}, nel posto (h, h). Si conclude che $\mathrm{tr}(AX) = a_{hk} \neq 0$.

(b) Si considerino i sottospazi U, L e D di $M_n(\mathbb{R})$ così definiti$^{(**)}$:

$$U = L(\varepsilon(k, h) : 1 \leq k < h \leq n), \quad L = L(\varepsilon(k, h) : 1 \leq h < k \leq n),$$
$$\text{e} \quad D = L(\varepsilon(k, k) : k = 1, \dots, n).$$

È facile verificare che $M_n(\mathbb{R}) = U \oplus L \oplus D$ e che $U^\perp = U \oplus D$ ed $L^\perp = L \oplus D$. Inoltre, la restrizione g' di g a $D \times D$ è definita positiva e quindi $i(g') = n$.

Sia $W = U \oplus L$ e si indichi con g'' la restrizione di g a $W \times W$. Poichè $\dim U = \dim L = (\dim W)/2$, si ha che U è un sottospazio isotropo massimale in W, da cui si deduce che $i(g'') = 0$. Infine, osservando che $W = D^\perp$, si conclude che $i(g) = i(g') + i(g'') = n$. □

ESERCIZIO 3 *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 e si consideri l'applicazione bilineare simmetrica $g : V \times V \to \mathbb{R}$, che ha matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ di V.

(a) Si mostri che g è non-degenere e, in caso affermativo, si determini una base ortogonale per V relativamente a g.

(b) Si calcoli l'indice di inerzia di g e si determini un sottospazio isotropo di dimensione massima.

(c) È vero o falso che esistono due sottospazi isotropi U e W di V tali che $V = U \oplus W$?

Svolgimento: (a). L'applicazione g è non-degenere se, e solo se, V ammette una base ortogonale relativamente a g. Si osservi che i vettori v_1, v_2 e v_4 sono a due a due ortogonali e non-isotropi; quindi, vi è una base ortogonale se, e solo se, vi è un vettore non-isotropo nel sottospazio $L(v_1, v_2, v_4)^\perp$. Un vettore $v = x_1v_1 + \cdots + x_4v_4$ appartiene a $L(v_1, v_2, v_4)^\perp$ se e solo se

$$\begin{cases} g(v, v_1) = 0 \\ g(v, v_2) = 0 \\ g(v, v_4) = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Dunque $L(v_1, v_2, v_4)^\perp = L(3v_1 - 2v_2 - 2v_3 - v_4)$, che non è un sottospazio isotropo (perchè?). Si conclude che g è non-degenere e che

$$w_1 = v_1, \; w_2 = v_2, \; w_3 = v_4, \; w_4 = 3v_1 - 2v_2 - 2v_3 - v_4$$

è una base ortogonale di V relativamente a g.

$^{(*)}$ Ricordiamo che tutte le entrate della matrice $\varepsilon(k, h)$ sono nulle, eccetto quella di posto (k, h), che è uguale ad 1.

$^{(**)}$ Si tratta rispettivamente delle matrici *sopradiagonali* (U), delle matrici *sottodiagonali* (L) e delle matrici *diagonali* (D).

(b). Osservando che $g(w_1, w_1) = 2$, $g(w_2, w_2) = -1$, $g(w_3, w_3) = 2$, $g(w_4, w_4) = -16$, si deduce che $L(w_1, w_3) \oplus L(w_2, w_4)$ è una decomposizione di V del tipo descritto nel Teorema di Sylvester e quindi che $i(g) = 2 - 2 = 0$.

(c). È facile osservare che i sottospazi

$$U = L(w_1 + \sqrt{2}w_2,\ 2\sqrt{2}w_3 + w_4) \qquad \text{e} \qquad W = L(2\sqrt{2}w_1 + w_4,\ \sqrt{2}w_2 - w_3)$$

soddisfano alle condizioni richieste(*). □

ESERCIZIO 4 *Siano dati uno spazio vettoriale V, di dimensione n sul corpo C, ed un endomorfismo $\phi : V \to V$. Si consideri l'applicazione*

$$\begin{aligned} \Lambda_\phi :&\mathrm{End}_C V \to \mathrm{End}_C V \\ &\psi \mapsto \phi \circ \psi - \psi \circ \phi \end{aligned}$$

(a) *Si mostri che Λ_ϕ è un'applicazione lineare.*

(b) *Si mostri che $\operatorname{rk} \Lambda_\phi \leq n^2 - \deg(\lambda_\phi(X))$, ove $\lambda_\phi(X)$ indica il polinomio minimo dell'endomorfismo ϕ e si dia un esempio in cui la disuguaglianza vale in senso stretto.*

(c) *Si supponga $n = 2$ e $\lambda_\phi(X) = (X - \alpha)^2$. Si mostri che, in tal caso, $\Lambda_\phi^3 = 0 \neq \Lambda_\phi^2$ (cioè Λ_ϕ è nilpotente, di periodo 3).*

Svolgimento: (a). L'applicazione Λ_ϕ è lineare perchè la composizione di applicazioni lineari distribuisce rispetto alla somma e l'endomorfismo di moltiplicazione per una costante commuta con ogni altro elemento di $\mathrm{End}_C V$.

(b). Si osservi che $\Lambda_\phi(\psi) = 0$ se, e solo se, $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$; ovvero se, e solo se, ψ commuta con ϕ. Poichè ϕ commuta con tutte le proprie potenze, il sottospazio generato da $\{1_V, \phi, \phi^2\phi^3, \dots\}$ è contenuto nel nucleo di Λ_ϕ e la dimensione di questo sottospazio è uguale al grado del polinomio minimo di ϕ. Dunque, $\dim(\ker \Lambda_\phi) \geq \deg(\lambda_\phi(X))$, da cui si deduce la conclusione voluta.

Sia $n > 1$ e si osservi che, se $\phi = 1_V$, allora $\ker(\Lambda_\phi) = V$, mentre il polinomio minimo di 1_V è $X - 1$. Dunque, si ha $\operatorname{rk} \Lambda_\phi = 0 < n^2 - \deg(\lambda_\phi(X)) = n^2 - 1$.

(c). Fissiamo una base di V rispetto a cui la matrice di ϕ abbia forma di Jordan $J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Se $\psi \in \mathrm{End}_C V$ ha matrice $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, allora la matrice Y di $\Lambda_\phi(\psi)$ è uguale a

$$Y = JX - XJ = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} - x_{11} \\ 0 & -x_{21} \end{pmatrix}.$$

Da ciò si deduce che $(\Lambda_\phi)^2(\psi)$ ha matrice $JY - YJ = \begin{pmatrix} 0 & -2x_{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e ciò permette di concludere che $\Lambda_\phi^3 = 0 \neq \Lambda_\phi^2$. □

(*) Il lettore è invitato a verificare tale affermazione. Se, ciò nonostante, gli rimanesse oscuro il modo con cui i sottospazi U e W sono stati determinati (non sono gli unici possibili), provi a risolvere lo stesso problema utilizzando la base $\left\{ \frac{1}{\sqrt{|g(w_j, w_j)|}} w_j \mid j = 1, \dots, 4 \right\}$.

ESERCIZIO 5 *Notazioni come nell'esercizio precedente. Nell'ipotesi che il polinomio caratteristico $p_\phi(X)$ di ϕ sia prodotto di fattori lineari distinti in $C[X]$, si mostri che Λ_ϕ è diagonalizzabile e si determinino gli autovalori di Λ_ϕ (in funzione degli autovalori di ϕ) e le dimensioni dei relativi autospazi.*

Svolgimento: Nelle ipotesi fatte, ϕ è diagonalizzabile ed i suoi autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono a due a due distinti. Si scelga quindi una base rispetto a cui ϕ ha matrice diagonale Δ. Se $\psi \in \mathrm{End}_C V$ ha matrice $X = (x_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, allora l'elemento di posto (i,j) della matrice $Y = \Delta X - X\Delta$ di $\Lambda_\phi(\psi)$ è uguale a $y_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)x_{ij}$. Dunque, gli elementi della base canonica $\{\,\varepsilon(i,j) \mid 1 \le i,j \le n\,\}$ di $M_n(C)$ sono tutti autovettori di Λ_ϕ e perciò Λ_ϕ è diagonalizzabile. Precisamente $L(\varepsilon(1,1), \dots, \varepsilon(n,n))$ è il nucleo di Λ_ϕ, ovvero il sottospazio di autovettori relativi all'autovalore 0; mentre $L(\varepsilon(i,j))$ con $i \ne j$ è contenuto nello spazio di autovettori relativi all'autovalore $\lambda_i - \lambda_j \ne 0$. Dunque per determinare le dimensioni degli autospazi occorre conoscere quante sono le differenze $\lambda_i - \lambda_j$ tra loro coincidenti. □

ESERCIZIO 6 *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino la matrice di Jordan J di ϕ ed una base $\{v_1, \dots, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui ϕ abbia matrice J.

Svolgimento: Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x-2)^3(x+2)$. Quindi ϕ ha gli autovalori 2 e -2 con molteplicità 3 e 1, rispettivamente. È facile verificare che $\mathrm{rk}(A-2) = 3$ e quindi che entrambo gli autovalori hanno nullità 1. Dunque la matrice di Jordan di ϕ è uguale a

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per trovare una base rispetto a cui ϕ abbia matrice J, procediamo nel modo usuale. Per prima cosa osserviamo che $z_4 = 2e_2 - e_4$ è un autovettore relativo all'autovalore -2 e quindi può essere preso come ultimo elemento della base cercata. Osserviamo poi che, dato un vettore z_3, appartenente a $Z_3 = \ker(\phi-2)^3$, ma non a $Z_2 = \ker(\phi-2)^2$, i vettori $z_1 = (\phi-2)^2(z_3)$, $z_2 = (\phi-2)(z_3)$ e z_3 completano z_4 ad una base rispetto a cui ϕ ha matrice J. Osservando che

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (A-2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -3 & 8 \end{pmatrix},$$

$$(A-2)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & -32 & -14 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 16 & 7 & -32 \end{pmatrix},$$

si verifica facilmente che $z_3 := 7e_1 - 12e_3 \in Z_3 \setminus Z_2$ e quindi

$$z_1 = 30e_2 + 15e_4,\ z_2 = 12e_1 + 19e_2 + 14e_4,\ z_3 = 7e_1 - 12e_3,\ z_4 = 2e_2 - e_4$$

è una base di $\mathbb{R}^4$ che soddisfa alle condizioni poste. □

ESERCIZIO 7 *Nello spazio euclideo tridimensionale (dotato di un riferimento ortonormale) si considerino il piano π e la retta r, di equazioni cartesiane*

$$\pi : 2x - 3y + z = 6 \qquad e \qquad r : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino i punti X, Y e Z che si ottengono intersecando il piano π con gli assi coordinati e si determini inoltre l'area del triangolo avente i punti X, Y e Z come vertici.

(b) Si fissi un punto R appartenente alla retta r e si determini il volume (non-orientato) del tetraedro di vertici X, Y, Z ed R e si mostri che tale volume è indipendente dalla scelta del punto R.

Svolgimento: (a). I punti X, Y e Z hanno coordinate

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Dunque l'area del triangolo di vertici X, Y e Z è uguale ad $A = \frac{1}{2}\|(X - Y) \times (Z - Y)\| = 3\sqrt{14}$.

(b). Sia fissato un punto R appartenente alla retta r. Il volume del tetraedro di vertici X, Y, Z ed R è uguale ad $\frac{1}{3}$ dell'area del triangolo di base per l'altezza relativa (perchè?). Poichè l'area del triangolo di vertici X, Y e Z ci è nota, si tratta di determinare l'altezza relativa, ovvero la distanza di R da π. Poichè la retta r è parallela al piano π tale distanza è indipendente dalla scelta del punto R ed è uguale ad $h = \frac{3\sqrt{14}}{7}$. Dunque, qualunque sia R in r, il volume del tetraedro di vertici X, Y, Z ed R è uguale a $\frac{1}{3}Ah = 6$. □

ESERCIZIO 8 *Nello spazio euclideo tridimensionale (dotato di un riferimento ortonormale) si considerino le rette r ed s, di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad e \qquad s : \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 3x + y + 4z = 6 \end{cases}.$$

Si determini la distanza tra r ed s e si scriva l'equazione del piano σ parallelo ad entrambe le rette ed equidistante da esse.

Svolgimento: Le rette date sono sghembe. Precisamente r passa per il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre s passa per $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Allora la distanza tra r ed s è uguale a

$$\delta = \frac{|V(v, w, Q - P)|}{\|v \times w\|} = \sqrt{2}.$$

Il piano σ deve essere ortogonale al vettore $v \times w$ e quindi ortogonale a $z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed inoltre deve passare per il punto medio del segmento PQ (perchè?), ovvero per il punto $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dunque la sua equazione è $\sigma : x - y = 1$. □

ESERCIZIO 9 *Si consideri nel piano euclideo la conica $\mathcal{C}$, di equazione affine*

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2y = 2.$$

Si mostri che $\mathcal{C}$ è una parabola (non-degenere) e si determinino asse, vertice, fuoco e direttrice per tale parabola.

Svolgimento: Si consideri il piano euclideo immerso nel modo usuale nel piano proiettivo. La conica $\mathcal{C}$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

e si verifica facilmente trattarsi di una parabola non-degenere. L'intersezione di $\mathcal{C}$ con la retta impropria –ovvero la direzione dell'asse– è il punto $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e quindi l'asse della parabola è la polare del punto $P'_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, corrispondente alla direzione ortogonale all'asse. Dunque l'asse h di $\mathcal{C}$ ha equazione (affine) $h : 2x - 2y + 1 = 0$. Il vertice di $\mathcal{C}$ è l'intersezione tra l'asse h ed il supporto di $\mathcal{C}$, ovvero il punto V, di coordinate omogenee $V = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Per determinare il fuoco e la sua polare, la direttrice, si può procedere nel modo usuale, determinando le tangenti isotrope e la loro intersezione. Approfittiamo dell'occasione per descrivere un altro metodo di determinazione del fuoco di $\mathcal{C}$. Il lettore è invitato a riflettere sul perchè di tale costruzione. Il fuoco è un punto dell'asse, ovvero un punto del tipo $F_{(\lambda,\mu)} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ove (λ, μ) è una coppia di parametri omogenei. Se r è una qualunque retta per il fuoco, la perpendicolare ad r passante per il fuoco, deve contenere il polo di $r^{(*)}$. Dunque, preso il punto improprio $Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e la sua direzione ortogonale $Q'_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, il punto $F_{(\lambda,\mu)}$ è il fuoco di $\mathcal{C}$ se, e solo se, la retta $s = F_{(\lambda,\mu)} + Q'_\infty$, la polare t di Q_∞ e la polare u di $F_{(\lambda,\mu)}$ passano tutte per lo stesso punto (il polo di $F_{(\lambda,\mu)} + Q_\infty$). Si ha quindi

$$s : \lambda x_0 - 2\mu x_1 = 0, \quad t : x_1 - x_2 = 0, \quad (\lambda + 5\mu)x_0 + \mu x_1 + \mu x_2 = 0,$$

e le tre rette concorrono ad uno stesso punto se, e solo se,

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & -2\mu & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \lambda + 5\mu & \mu & \mu \end{pmatrix} = 2\mu(2\lambda + 5\mu) = 0.$$

Dunque il fuoco della parabola $\mathcal{C}$ è il punto $F = F_{(5,-2)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ e la direttrice è la sua polare $d : 5x_0 + 2x_1 + 2x_2 = 0$. □

(*) Dato un qualunque punto (proprio) P si possono definire due corrispondenze tra le rette passanti per P. La prima, ad una retta r, passante per P, associa la retta r', passante per P ed il polo di r. La seconda, alla retta r associa la sua perpendicolare r'', passante per P. Queste corrispondenze sono proiettività del fascio di rette centrato P. I fuochi di una conica sono quei punti per cui queste due proiettività coincidono.

ESERCIZIO 10 *Si consideri il piano affine immerso nel piano proiettivo prendendo come retta impropria la retta r, di equazione omogenea $x_0 - 2x_2 = 0$. Si determinino tutte le parabole di tale piano affine che siano tangenti nel punto $P = (1, 1, 1)$ alla retta s di equazione omogenea $2x_0 - x_1 - x_2 = 0$ ed il cui asse sia parallelo alla retta t di equazione omogenea $x_1 - x_2 = 0$*(*).

Svolgimento: Affinchè l'asse delle parabole sia parallelo alla retta t è necessario che le coniche in questione, siano tangenti alla retta impropria r nel punto $Q = r \cap t$, ovvero in $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dunque si tratta del fascio di coniche bitangenti che ha come coniche degeneri il prodotto della retta r con la retta s, e la retta $P + Q = t$ con molteplicità 2, ovvero

$$\mathcal{C}_{(\lambda,\mu)} : \lambda(x_0 - 2x_2)(2x_0 - x_1 - x_2) + \mu(x_1 - x_2)^2 = 0.$$

In particolare, le parabole non-degeneri di questo fascio sono determinate dalla condizione $\lambda\mu \neq 0$. □

(*) Invece di parlare di direzione dell'asse, sarebbe stato più preciso parlare di punto improprio comune alle varie parabole. D'altra parte, vi è un modo naturale di introdurre la metrica euclidea in questo piano affine, considerando la restrizione della forma quadratica $x_1^2 + x_2^2$ al sottospazio che definisce la retta impropria r. Si veda, ad esempio, l'Esercizio 10 del 6 luglio 1995

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica

prova scritta del 6 luglio 1995 .

ESERCIZIO 1 *Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le terne di piani*

$$\pi_1(\lambda) : y - \lambda x + (\lambda - 2)(z + 1) = 0, \quad \pi_2(\lambda) : (\lambda - 1)x + \lambda z = 2, \quad \pi_3(\lambda) : x + \lambda y + 2\lambda^2 z = 0,$$

al variare di λ in $\mathbb{R}$.

Si dica per quali valori di λ le intersezioni $\pi_1(\lambda) \cap \pi_2(\lambda)$, $\pi_1(\lambda) \cap \pi_3(\lambda)$, $\pi_2(\lambda) \cap \pi_3(\lambda)$ sono tre rette parallele, a due a due, distinte.

Svolgimento: Condizione necessaria affinchè le intersezioni tra i piani dati siano tre rette tra loro parallele, è che gli spazi direttori dei tre piani contengano una direzione (sottospazio vettoriale di dimensione 1) in comune. Dunque, affinchè sia verificata tale condizione, il rango della matrice dei coefficienti delle equazioni omogenee associate alle equazioni dei piani dati deve essere minore di 3, ovvero deve aversi

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \lambda - 2 \\ \lambda - 1 & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & 2\lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda(3 - \lambda) = 0.$$

Discutiamo separatamente i due casi.

$\lambda = 0$. In tal caso si verifica facilmente che i due piani $\pi_2(0)$ e $\pi_3(0)$ sono paralleli e quindi la loro intersezione non è una retta propria dello spazio affine.

$\lambda = 3$. In tal caso la matrice (completa) dei coefficienti delle equazioni dei tre piani è uguale a $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 18 & 0 \end{pmatrix}$. È facile verificare che prese comunque due righe di tale matrice, queste definiscono una retta nello spazio affine (ovvero il sistema lineare ha rango 2) e che le tre rette ottenute intersecando a due a due i piani sono tra loro distinte, perchè la matrice completa scritta sopra ha rango 3 e quindi nessuna delle rette in questione interseca il piano contenente le altre due. □

ESERCIZIO 2 *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 e si consideri l'applicazione bilineare simmetrica $g : V \times V \to \mathbb{R}$, che ha matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ di V.

(a) Si mostri che g è non-degenere e, in caso affermativo, si determini una base ortogonale per V relativamente a g e si calcoli l'indice di inerzia di g.

(b) Si determinino il sottospazio $L(v_2, v_4) + L(v_2, v_4)^\perp$ e la sua dimensione.

(c) È vero o falso che esistono due sottospazi isotropi U e W di V tali che $V = U \oplus W$?

Svolgimento: (a). Con calcoli diretti, si verifica che i vettori

$$w_1 = v_4, \quad w_2 = v_3, \quad w_3 = v_2 + v_3, \quad w_4 = 2v_1 + v_2 + v_3 - 2v_4$$

formano una base ortogonale di V relativamente a g. Poichè si ha

$$g(w_1, w_1) = 1, \quad g(w_2, w_2) = -2, \quad g(w_3, w_3) = 2, \quad g(w_4, w_4) = -2,$$

si conclude facilmente che $L(w_1, w_3) \oplus L(w_2, w_4)$ è una decomposizione di V del tipo descritto nel teorema di Sylvester e quindi che $i(g) = 0$.
(b). Con un calcolo diretto si verifica che $L(v_2) = L(v_2, v_4) \cap L(v_2, v_4)^\perp$ e quindi si deduce che si ha $\dim[L(v_2, v_4) + L(v_2, v_4)^\perp] = 3$. Inoltre, essendo $w_4 \in L(v_2, v_3 v_4)^\perp$, si conclude

$$L(v_2, v_4) + L(v_2, v_4)^\perp = L(v_2, v_4, w_4).$$

(c). L'affermazione è vera perchè $i(g) = 0$. In particolare, si possono considerare i sottospazi

$$U = L(\sqrt{2}w_1 + w_2,\, w_3 + w_4), \qquad W = L(\sqrt{2}w_1 + w_4,\, w_2 - w_3).$$

□

ESERCIZIO 3 *Sia V il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale formato dai polinomi in $\mathbb{C}[X]$ di grado minore di $n+1$ e si fissi la base $\{1, X, \dots, X^n\}$ di V. Al variare di j tra 0 ed n, si consideri l' applicazione $\delta_j : V \to \mathbb{C}$ definita ponendo $\delta_j(P) = \frac{1}{j!}\frac{d^j P}{dX^j}(0)$.*
(a) Si mostri che le applicazioni δ_j, per $j = 0, \dots, n$, appartengono allo spazio duale $V^* = Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ e formano la base duale della base data di V.
(b) Si mostri che l'applicazione $\nu_{-2} : P(X) \mapsto P(-2)$ appartiene a V^* e si scriva tale applicazione come combinazione lineare degli elementi $\{\, \delta_j \mid j = 0, \dots, n \,\}$.

Svolgimento: (a). L'applicazione δ_j si ottiene componendo la derivata j-esima, che è un'applicazione lineare, con il calcolo di un polinomio nello 0, che è pure lineare, e la moltiplicazione per $1/j!$; dunque $\delta_j \in V^*$. Per verificare che $\{\, \delta_j \mid j = 0, \dots, n \,\}$ è la base duale della base $\{1, X, \dots, X^n\}$ di V, è sufficiente verificare che $\delta_j(X^k) = \delta_{ij}$, qualunque siano $0 \le j, k \le n$. Infatti, se $j > k$, $\delta_j(X^k) = 0$, perchè è nulla la derivata di una costante. Se $j \le k$, allora $\delta_j(X^k) = \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!}X^{k-j}(0)$, che è diverso da 0 solo se $j = k$ ed in tal caso è uguale ad 1.
(b). L'applicazione che calcola i polinomi in un punto fissato è un'applicazione lineare e quindi ν_{-2} appartiene a V^* e, in base alle usuali proprietà della base duale, si ha

$$\nu_{-2} = \sum_{j=0}^{n} \nu_{-2}(X^j)\delta_j = \sum_{j=0}^{n} (-2)^j \delta_j.$$

Ciò significa che, per ogni polinomio $P(X)$, di grado minore di $n+1$, si ha

$$P(-2) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-2)^j}{j!}\frac{d^j P}{dX^j}(0) \qquad \text{(Formula di McLaurin).}$$

□

ESERCIZIO 4 *Sia V il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale formato dai polinomi in $\mathbb{C}[X]$, di grado minore di n e si consideri l'endomorfismo $\delta : V \to V$ che ad ogni polinomio $P(X)$ associa il polinomio $X\frac{dP}{dX}$. Si determinino il polinomio caratteristico, il polinomio minimo, la matrice di Jordan J di δ ed una base rispetto a cui δ ha matrice J.*

Svolgimento: Consideriamo la base $\{1, X, \dots, X^{n-1}\}$ di V. Allora $\delta(X^j) = jX^j$, per $j = 0, \dots, n-1$, e quindi tale base è tutta costituita da autovettori per δ. Ciò significa che δ è diagonalizzabile e che i suoi autovalori sono le n costanti distinte $0, 1, \dots, n-1$. Dunque il polinomio minimo ed il polinomio caratteristico di δ sono entrambi uguali a

$$p_\delta(X) = \lambda_\delta(X) = \prod_{j=0}^{n}(X - j).$$

Dunque la matrice di Jordan di δ è diagonale ed è uguale a

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 \end{pmatrix},$$

e la base $\{1, X, \dots, X^{n-1}\}$ è una base di V rispetto a cui δ ha matrice J. □

ESERCIZIO 5 *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino la matrice di Jordan J di ϕ ed una base $\{v_1, \dots, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui ϕ abbia matrice J.

Svolgimento: Il polinomio caratteristico di ϕ è uguale a $p_\phi(X) = \det(A - X) = X(X-1)^3$; quindi ϕ ha gli autovalori 0 ed 1 con molteplicità 1 e 3 rispettivamente. Osservando che $A - 1$ ha rango 2, si conclude che il polinomio minimo di ϕ è uguale a $\lambda_\phi(X) = X(X-1)^2$ e che una matrice di Jordan J dell'endomorfismo ϕ è uguale a

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un autovettore relativo all'autovalore 0, ovvero un vettore non-nullo di $\ker\phi$, è il vettore $v_4 = e_2 + e_4$. Osservando che

$$A - 1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (A-1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

si conclude che, $v_3 = e_1 + e_4$ appartiene a $\ker(\phi - 1)^2 \setminus \ker(\phi - 1)$ e che, posto $v_2 = [\phi - 1](v_3) = e_1 + 2e_2 + e_3 + 2e_4$ e $v_1 = e_3$, l'endomorfismo ϕ ha matrice J rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. □

ESERCIZIO 6 *Nello spazio euclideo tridimensionale, dotato di un riferimento ortonormale, si considerino la retta* $r : \begin{cases} 2x - z = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}$ *ed il punto* $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Si determini l'insieme $\mathcal{Q}$ *dei punti* X *tali che la retta* $P + X$ *formi un angolo di* $\pi/6$ *con la retta* r.

(b) Si studi la conica che si ottiene intersecando $\mathcal{Q}$ *con il piano* $z = 0$.

Svolgimento: La retta r passa per P ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, dunque un punto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartiene all'insieme $\mathcal{Q}$ se, e solo se,

$$\frac{|(X - P) \cdot v|}{\|X - P\| \, \|v\|} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

ovvero se, e solo se,

$$23x^2 + 16xy - 16xz + 11y^2 + 32yz + 11z^2 - 78x - 60y - 48z + 99 = 0.$$

Osserviamo a margine che l'insieme $\mathcal{Q}$ altri non è che il cono di vertice P, asse r ed apertura $\frac{\pi}{6}$. (b). Restringiamoci al piano $z = 0$. Poichè il vertice del cono apprtiene a tale piano, l'intersezione è una conica degenere. La sua equazione è $23x^2 + 16xy + 11y^2 - 78x - 60y + 99 = 0$, e quindi la conica non ha punti reali diversi dal vertice P; ovvero si tratta del prodotto di due rette complesse, coniugate, passanti per P (ellisse degenere).

Osserviamo anche qui a margine che ciò si poteva dedurre calcolando l'angolo formato dall'asse r del cono col piano $z = 0$ e confrontando tale angolo con l'apertura del cono. Il lettore è invitato ad effettuare tale verifica. □

ESERCIZIO 7 *Nello spazio euclideo tridimensionale* E^3, *dotato di un riferimento ortonormale, si considerino le rette* r *ed* s, *di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad e \qquad s : \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 3x + y + 4z = 6 \end{cases}.$$

Si determini il sottoinsieme di E^3 *formato dai punti medi dei segmenti* RS, *al variare di* R *in* r *e di* S *in* s.

Svolgimento: La retta r passa per il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre la retta s passa per il punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dunque, il punto medio del segmento che congiunge un punto di r con un punto di s sarà del tipo

$$M = \frac{(P + \lambda v) + (Q + \mu w)}{2}, \quad \text{al variare di } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Si conclude che il luogo cercato è il piano passante per il punto $\frac{P+Q}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, di sottospazio direttore $L(v, w)$; ovvero il piano di equazione $x - y = 1$. □

ESERCIZIO 8 *Si consideri l'applicazione* δ *che ad una coppia di punti* $(A,B) = \left(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ *associa l'applicazione proiettiva* $\lambda_{(A,B)} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, *di matrice*

$$\begin{pmatrix} -a_0b_1 - a_1b_0 & 2a_0b_0 \\ -2a_1b_1 & a_0b_1 + a_1b_0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si mostri che $\lambda_{(A,B)}$ *è una proiettività se, e solo se,* $A \neq B$.

(b) Fissata la coppia (A,B) *con* $A \neq B$, *si mostri che* $\lambda_{(A,B)} \neq 1_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})} = \lambda^2_{(A,B)}$, *ove* $1_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$ *indica la proiettività identica. Si mostri inoltre che* A *e* B *sono gli unici punti* X *di* $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ *tali che* $\lambda_{(A,B)}(X) = X$.

(c) Si mostri che due coppie di punti distinti (A,B) *e* (C,D) *hanno la stessa immagine tramite* δ *se, e solo se,* $\{A,B\} = \{C,D\}$.

Svolgimento: (a). Indichiamo con $M_{(A,B)}$ la matrice data dell'applicazione proiettiva $\lambda_{(A,B)}$. Tale applicazione è una proiettività se, e solo se, $M_{(A,B)}$ è invertibile. Osservando che

$$\det M_{(A,B)} = 4a_0b_0a_1b_1 - (a_0b_1 + a_1b_0)^2 = -(a_0b_1 - a_1b_0)^2,$$

si conclude che $\lambda_{(A,B)}$ è una proiettività se, e solo se, $a_0b_1 - a_1b_0 \neq 0$, ovvero se, e solo se, $A \neq B$.

(b). $\lambda_{(A,B)}$ è la proiettività identica se, e solo se, $M_{(A,B)}$ è una matrice scalare e ciò non può accadere. D'altro canto, si verifica con un calcolo diretto che

$$M^2_{(A,B)} = \begin{pmatrix} (a_0b_1 - a_1b_0)^2 & 0 \\ 0 & (a_0b_1 - a_1b_0)^2 \end{pmatrix}$$

e quindi $\lambda^2_{(A,B)} = 1_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$.

Si osservi inoltre che

$$M_{(A,B)} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = (a_1b_0 - a_0b_1) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_{(A,B)} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = -(a_1b_0 - a_0b_1) \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \;;$$

quindi A e B sono tenuti fissi dalla proiettività $\lambda_{(A,B)}$, che non è la proiettività identica e perciò non vi sono altri punti fissi (perchè?).

(c). Supporre $\delta(A,B) = \delta(C,D)$, equivale alle condizioni

$$\begin{cases} a_0b_1 + a_1b_0 = \rho(c_0d_1 + c_1d_0) \\ a_0b_0 = \rho c_0d_0 \\ a_1b_1 = \rho c_1d_1 \end{cases} \qquad \text{per qualche } \rho \neq 0.$$

Possiamo inoltre supporre che a_0b_0 e a_1b_1 non siano entrambi nulli perchè, altrimenti, la tesi è banalmente vera (verificarlo!). Sia quindi $a_0b_0 \neq 0$ e, dividendo tutti i termini delle uguaglianze per $a_0b_0 = \rho c_0d_0$, si ottiene

$$\begin{cases} \frac{b_1}{b_0} + \frac{a_1}{a_0} = \frac{d_1}{d_0} + \frac{c_1}{c_0} \\ \frac{a_1b_1}{a_0b_0} = \frac{c_1d_1}{c_0d_0} \end{cases}$$

da cui si ottiene che le coppie $\{\frac{b_1}{b_0}, \frac{a_1}{a_0}\}$ e $\{\frac{d_1}{d_0}, \frac{c_1}{c_0}\}$ sono soluzioni della stessa equazione di secondo grado e quindi coincidono. □

ESERCIZIO 9 *Si consideri nel piano euclideo la conica $\mathcal{C}$, di equazione affine*

$$4x^2 + 4y^2 + 10xy + 6y = 3.$$

Si mostri che $\mathcal{C}$ è un'iperbole (non-degenere) e si determinino centro, assi, vertici, asintoti e fuochi di tale conica.

Svolgimento: Consideriamo il piano euclideo immerso in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ed utilizziamo coordinate omogenee per i punti. La conica $\mathcal{C}$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

e si ha $\det A = -9 = \det A'$; da ciò si deduce che $\mathcal{C}$ è un'iperbole (non-degenere).

Il centro di $\mathcal{C}$ ha coordinate omogenee $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ e gli assi hanno direzioni $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, e quindi si tratta delle rette di equazioni affini

$$h_1 : x - y + 3 = 0 \qquad \text{e} \qquad h_2 : 3x + 3y + 1 = 0.$$

I vertici si ottengono intersecando l'asse h_2, che è quindi l'asse focale, con la conica $\mathcal{C}$; sono quindi i punti di coordinate omogenee

$$V_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 + 3\sqrt{2} \\ 8 - 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 - 3\sqrt{2} \\ 8 + 3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Le direzioni degli asintoti corrispondono alle intersezioni della conica $\mathcal{C}$ con la retta impropria, ovvero $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, e dunque gli asintoti sono le rette

$$a_1 : x + 2y - 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad a_2 : 2x + y + 2 = 0.$$

Per determinare i fuochi usiamo l'osservazione che si tratta dei punti (propri) della retta h_2 per i quali l'involuzione indotta dalla conica coincide con l'involuzione degli angoli retti. Dunque, indicato con $X_t = \begin{pmatrix} 3 \\ t-5 \\ 4-t \end{pmatrix}$ il generico punto proprio dell'asse h_2, e con $Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Q'_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ due direzioni tra loro ortogonali, il punto X_t è un fuoco di $\mathcal{C}$ se, e solo se, la retta $s = X_t + Q'_\infty$, la polare t di Q_∞ e la polare u di X_t concorrono ad un medesimo punto (il polo di $X_t + Q_\infty$). Si ha quindi

$$s : (t-5)x_0 - 3x_1 = 0, \quad t : 4x_1 + 5x_2 = 0, \quad u : 3(1-t)x_0 - tx_1 + tx_2 = 0$$

e le tre rette concorrono ad uno stesso punto se, e solo se,

$$\det \begin{pmatrix} t-5 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3-3t & -t & t \end{pmatrix} = 9(t^2 - 5) = 0;$$

ovvero i fuochi sono i punti $F_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5-\sqrt{5} \\ 4-\sqrt{5} \end{pmatrix}$ ed $F_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{5}-5 \\ 4+\sqrt{5} \end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 10 *Si consideri il piano affine immerso nel piano proiettivo* $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ *prendendo come retta impropria la retta* r*, di equazione omogenea* $x_0 - 2x_2 = 0$*. Si associno al punto* $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus r$ *le coordinate affini*

$$x(P) = \frac{x_1}{x_0 - 2x_2} \qquad ed \qquad y(P) = \frac{x_2}{x_0 - 2x_2}$$

e si consideri la metrica euclidea δ*, definita ponendo*

$$\delta(P, Q) = \sqrt{[x(P) - x(Q)]^2 + [y(P) - y(Q)]^2}.$$

Si determini il fascio di cerchi passanti per i punti $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e* $P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *di tale piano affine.*

Svolgimento: Si tratta delle coniche reali appartenenti al fascio che ha come punti base $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed i punti ciclici $C_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$ e $C_2 = \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$. Una conica di tale fascio è la conica degenere $\mathcal{C}_1$ che ha come supporto la retta impropria r e la retta $P_1 + P_2$. Ovvero

$$\mathcal{C}_1 : (x_0 - 2x_2)(x_0 - x_1) = 0.$$

Le altre due coniche degeneri del fascio hanno equazioni complesse (coniugate); scriviamo allora l'equazione omogenea di una conica non-degenere di tale fascio: il cerchio $\mathcal{C}_2$, centrato nel punto medio $M = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ tra P_1 e P_2. L'equazione affine di $\mathcal{C}_2$ è $x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$ da cui, con un'ovvia sostituzione, si deduce l'equazione omogenea

$$\mathcal{C}_2 : x_0^2 - x_1^2 + 5x_2^2 - 5x_0x_2 = 0.$$

Dunque, la generica conica del fascio in questione ha equazione

$$\lambda(x_0 - 2x_2)(x_0 - x_1) + \mu(x_0^2 - x_1^2 + 5x_2^2 - 5x_0x_2) = 0;$$

ed è un circolo non-degenere per $\lambda \neq 0$. □

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica

prova scritta del 4 settembre 1995 .

ESERCIZIO 1 *Siano U e W due spazi vettoriali di dimensioni r e k rispettivamente, e sia $\phi : U \to W$ un omomorfismo.*

(a) Si mostri che $\Gamma_\phi = \{\, u + \phi(u) \in U \oplus W \mid u \in U \,\}$ (il grafico di ϕ) è un sottospazio di $U \oplus W$, di dimensione r e tale che $\Gamma_\phi \cap W = (0)$.

(b) Siano U e W due spazi vettoriali di basi $\{u_1, \dots, u_4\}$ e $\{w_1, \dots, w_3\}$, rispettivamente e sia

$$\Gamma = L(2u_1 + 3w_1 - w_3, 4u_2 + w_1 - 2w_2 + 4w_3, u_3 + 5w_1, u_4 + w_2 + 2w_3) \subset U \oplus W.$$

Si mostri che $\Gamma \cap W = (0)$ e si scriva la matrice, rispetto alle basi date, dell'omomorfismo $\phi : U \to W$ che ha Γ come grafico.

Svolgimento: (a). Se $u_1, u_2 \in U$ ed a, b sono scalari, allora

$$a(u_1 + \phi(u_1)) + b(u_2 + \phi(u_2)) = (au_1 + bu_2) + \phi(au_1 + bu_2) \in \Gamma_\phi$$

e quindi Γ_ϕ è un sottospazio di $U \oplus W$. Sia poi $\{u_1, \dots, u_r\}$ una base di U; è immediato osservare che i vettori $u_1 + \phi(u_1), \dots, u_r + \phi(u_r)$ sono un sistema di generatori per $U \oplus W$. Inoltre, dalla relazione $a_1(u_1 + \phi(u_1)) + \cdots + a_r(u_r + \phi(u_r)) = 0$, si deduce che $a_1u_1 + \cdots + a_ru_r \in U \cap W = (0)$ e quindi $a_1 = \cdots = a_r = 0$, perchè $\{u_1, \dots, u_r\}$ è una base di U.

(b). Dagli argomenti del punto precedente si deduce che i quattro generatori dati del sottospazio Γ ne sono una base e che $\Gamma \cap W = (0)$. Inoltre, il sottospazio Γ è il grafico dell'unico omomorfismo $\phi : U \to W$ definito ponendo

$$\phi(u_1) = \tfrac{3}{2}w_1 - \tfrac{1}{2}w_3, \quad \phi(u_2) = \tfrac{1}{4}w_1 - \tfrac{1}{2}w_2 + w_3,$$
$$\phi(u_3) = 5w_1, \quad \phi(u_4) = w_2 + 2w_3.$$

Da ciò si deduce la matrice di ϕ rispetto alle basi date. □

ESERCIZIO 2 *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, dotato dell'applicazione bilineare (simmetrica) rispetto a cui la base canonica è una base ortonormale. Al variare di λ in $\mathbb{R}$, si determini una base del sottospazio ortogonale alle soluzioni del sistema lineare*

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} (2\lambda - 1)x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2\lambda x_2 + x_3 = 0 \\ \lambda x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento: Poichè Σ_λ è un sistema lineare omogeneo, le sue soluzioni formano un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ortogonale, rispetto all'applicazione bilineare data, al sottospazio generato dai vettori che hanno come coordinate rispetto alla base canonica le righe della matrice, A_λ, dei coefficienti del sistema(*). Dunque il sottospazio cercato è

$$X_\lambda = L((2\lambda - 1)e_1 - e_3, e_1 - 2\lambda e_2 + e_3, \lambda e_1 - 2e_3)$$

ed i generatori dati sono una base se, e solo se,

$$\det A_\lambda = 2\lambda(3\lambda - 2) \neq 0.$$

Con una facile verifica, si conclude che per $\lambda = 0$, una base di X_0 è $\{e_1 + e_3, e_3\}$; mentre per $\lambda = \frac{2}{3}$, una base di $X_{\frac{2}{3}}$ è $\{\frac{1}{3}e_1 - e_3, e_1 - \frac{4}{3}e_2 + e_3\}$. □

(*) In generale, le righe della matrice dei coefficienti di un sistema lineare omogeneo danno le coordinate di un sistema di generatori dell'ortogonale del sottospazio delle soluzioni, rispetto alla base duale della base data. In questo caso la base duale si può identificare con la base canonica di $\mathbb{R}^3$ tramite l'applicazione bilineare data.

ESERCIZIO 3 *Sia A una matrice $n \times n$ ad elementi in $\mathbb{C}$. Si mostri che*

$$\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A).$$

Svolgimento: Poichè $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P$ e $\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A$, qualunque sia la matrice $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$; possiamo supporre che A sia una matrice triangolare superiore (ad esempio una matrice di Jordan). Allora $\exp A = 1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$ si ottiene facendo la somma di una serie di matrici triangolari superiori ed è perciò anch'essa una matrice triangolare superiore, che ha sulla diagonale l'esponenziale degli elementi $a_{11}, \dots, a_{nn}$ posti sulla diagonale di A.

Si conclude che

$$\det(\exp A) = (\exp a_{11}) \cdots (\exp a_{nn}) = \exp(a_{11} + \cdots + a_{nn}) = \exp(\operatorname{tr} A);$$

che è quanto volevamo dimostrare. □

ESERCIZIO 4 *Sia V il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale formato dai polinomi in $\mathbb{C}[X]$, di grado minore di n e si consideri l'endomorfismo $D : V \to V$ che ad ogni polinomio $P(X)$ associa la sua derivata $\frac{dP}{dX}$. Si determinino il polinomio caratteristico, il polinomio minimo e la matrice di Jordan J dell'endomorfismo D ed inoltre, si determini una base rispetto a cui D ha matrice J.*

Svolgimento: È chiaro che ogni polinomio di grado minore di n si annulla se viene derivato n volte, e che $D^{n-1}(X^{n-1}) = 1$; ovvero $D^n = 0 \neq D^{n-1}$. Se ne deduce che il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di D sono uguali e si ha $p_D(y) = y^n = \lambda_D(y)$. Dunque la matrice di Jordan di D è

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo infine che $\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\}$ è una base di V rispetto a cui D ha matrice J. □

ESERCIZIO 5 *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino la matrice di Jordan J di ϕ ed una base $\{v_1, \dots, v_4\}$ di $\mathbb{Q}^4$ rispetto a cui ϕ abbia matrice J.

Svolgimento: Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x-1)^4$ e quindi ϕ ha l'unico autovalore 1 con molteplicità 4. Osserviamo che

$$A - 1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che $\mathrm{rk}(A-1)=2$, ovvero che l'autovalore 1 ha nullità 2, ed inoltre che il polinomio minimo di ϕ è $\lambda_\phi(x)=(x-1)^3$.

Dunque la matrice di Jordan di ϕ è

$$J=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Posto

$$w_4=e_2\in\ker(\phi-1)^3\setminus\ker(\phi-1)^2,\quad w_3=(\phi-1)(e_2)=-3e_1-e_3-e_4,$$
$$w_2=(\phi-1)(w_3)=(\phi-1)^2(e_2)=-7e_3,\quad w_1=e_1-2e_4\in\ker(\phi-1),$$

si verifica facilmente che $\{w_1,\dots,w_4\}$ è una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. □

ESERCIZIO 6 *Nello spazio affine tridimensionale, si considerino il punto* $V=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ *e la circonferenza* $\mathcal{C}$ *centrata nell'origine e di raggio 2, posta nel piano* π*, di equazione* $z=0$.

(a) *Si determini l'equazione del cono* $\mathcal{Q}$ *che proietta la circonferenza* $\mathcal{C}$ *dal vertice* V.

(b) *Si classifichi (dal punto di vista affine) la conica che si ottiene intersecando* $\mathcal{Q}$ *con il piano* σ*, di equazione* $y=3$.

Svolgimento: (a). Il generico punto $P=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ di $\mathbb{A}^3$ appartiene al cono $\mathcal{Q}$ se, e solo se, la retta $P+V$ interseca il piano π in un punto della circonferenza $\mathcal{C}$. Il punto generico di quella retta, $V+\lambda(P-V)$, appartiene al piano π quando $\lambda=\frac{1}{1-z}$ (se $z\neq 1$); quindi P appartiene a $\mathcal{Q}$ se le sue coordinate soddisfano alla condizione $(-1+\frac{x+1}{1-z})^2+(2+\frac{y-2}{1-z})^2=4$ (se $z\neq1$). Dunque il cono $\mathcal{Q}$ è definito dall'equazione(*)

$$(z+x)^2+(y-2z)^2-4(1-z)^2=0.$$

(b). L'intersezione tra $\mathcal{Q}$ ed il piano σ (su cui prendiamo (x,z) come coordinate affini) ha equazione $x^2+z^2+2xz-4z+5=0$ ed è quindi una parabola del piano σ. □

(*) Si osservi che, eliminando il denominatore, abbiamo "completato" il cono aggiungendovi il vertice V che altrimenti restava escluso dalla condizione $z\neq1$.

Il lettore è invitato a generalizzare il procedimento descritto sopra, al caso del cono proiettante una qualsiasi curva algebrica del piano $Z=0$, di equazione $F(X,Y)=0$, dal vertice $V=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$.

ESERCIZIO 7 *Dati quattro punti della retta proiettiva* $\mathbb{P}^1(C)$, $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$, *a due a due distinti, si scriva esplicitamente il birapporto* (A, B, X, Y) *in funzione delle coordinate omogenee dei quattro punti.*

Fissati due punti distinti A *e* B *della retta proiettiva* $\mathbb{P}^1(C)$, *si mostri che la corrispondenza che ad un punto* $X \notin \{A, B\}$ *associa il punto* X' *tale che* $(A, B, X, X') = -1$ *si estende ad una proiettività di* $\mathbb{P}^1(C)$ *e si scriva una matrice di tale proiettività in funzione delle coordinate omogenee dei punti* A *e* B.

Svolgimento: Una base di C^2, associata al riferimento proiettivo $\{A, B, X\}$, è data dai vettori αA e βB, tali che $\alpha A + \beta B = X$. Le costanti α e β sono quindi facilmente determinate (ad esempio, applicando la regola di Cramer) e sono

$$\alpha = \frac{\det \begin{pmatrix} x_0 & b_0 \\ x_1 & b_1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}} = \frac{x_0 b_1 - x_1 b_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0}, \qquad \beta = \frac{\det \begin{pmatrix} a_0 & x_0 \\ a_1 & x_1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}} = \frac{a_0 x_1 - a_1 x_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0}.$$

Per determinare il birapporto (A, B, X, Y), ci servono le coordinate del punto Y rispetto al riferimento dato, ovvero dobbiamo determinare le costanti γ e δ per cui si ha $\gamma(\alpha A) + \delta(\beta B) = Y$. Di nuovo γ e δ sono facilmente determinate (ad esempio, applicando ancora la regola di Cramer e ricordando la multilinearità del determinante) e sono

$$\gamma = \frac{y_0 b_1 - y_1 b_0}{\alpha(a_0 b_1 - a_1 b_0)} = \frac{y_0 b_1 - y_1 b_0}{x_0 b_1 - x_1 b_0}, \qquad \delta = \frac{a_0 y_1 - a_1 y_0}{\beta(a_0 b_1 - a_1 b_0)} = \frac{a_0 y_1 - a_1 y_0}{a_0 x_1 - a_1 x_0}.$$

Dunque

$$(A, B, X, Y) = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{(y_0 b_1 - y_1 b_0)(a_0 x_1 - a_1 x_0)}{(a_0 y_1 - a_1 y_0)(x_0 b_1 - x_1 b_0)}.$$

Sia $X' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix}$; dall'espressione esplicita del birapporto testè trovata e dalla relazione $(A, B, X, X') = -1$, si deduce l'equazione omogenea (nelle incognite x'_0, x'_1)

$$(x'_0 b_1 - x'_1 b_0)(a_0 x_1 - a_1 x_0) + (a_0 x'_1 - a_1 x'_0)(x_0 b_1 - x_1 b_0) = 0.$$

Dunque le coordinate omogenee del punto X' sono

$$x'_0 = -(b_0 a_1 + a_1 b_0) x_0 + 2 a_0 b_0 x_1 \qquad x'_1 = -2 a_1 b_1 x_0 + (b_0 a_1 + a_1 b_0) x_1.$$

È perciò evidente che l'applicazione proiettiva $f : \mathbb{P}^1(C) \to \mathbb{P}^1(C)$, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -(b_0 a_1 + a_1 b_0) & 2 a_0 b_0 \\ -2 a_1 b_1 & b_0 a_1 + a_1 b_0 \end{pmatrix}$$

manda X su X', ed f è una proiettività perchè $\det A = -(b_0 a_1 - a_1 b_0)^2 \neq 0$, essendo $A \neq B$ in $\mathbb{P}^1(C)$.

□

ESERCIZIO 8 *Si consideri l'applicazione* $\delta : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ *definita ponendo*

$$\delta\left(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a_0b_0 \\ a_0b_1 + a_1b_0 \\ 2a_1b_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Indicate con $\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ *le coordinate omogenee dei punti di* $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$*, si scriva l'equazione omogenea della conica* $\mathcal{C}$ *il cui supporto contiene tutti i punti del tipo* $\delta(P, P)$*, al variare di* $P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$*.*

(b) Fissati comunque due punti distinti A *e* B *di* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$*, si mostri che la retta* $\delta(A, A) + \delta(B, B)$ *è la polare rispetto a* $\mathcal{C}$ *del punto* $\delta(A, B)$*.*

(c) Fissate due coppie di punti distinti (A, B) *ed* (X, Y) *in* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$*, si mostri che il punto* $\delta(X, Y)$ *appartiene alla polare di* $\delta(A, B)$ *se, e solo se,* $(A, B, X, Y) = -1$ *(ovvero la coppia* (A, B) *separa armonicamente la coppia* (X, Y)*).*

Svolgimento: (a). Sia $P = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$; il punto $\delta(P, P) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ha coordinate omogenee $\begin{pmatrix} p_0^2 \\ p_0p_1 \\ p_1^2 \end{pmatrix}$ ed appartiene quindi alla conica $\mathcal{C}$, di equazione $z_0z_2 - z_1^2 = 0$. In particolare, la matrice di $\mathcal{C}$ è

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b). È facile verificare che se A e B sono due punti distinti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ allora $\delta(A, A) \neq \delta(B, B)$ (farlo!). Quindi è sufficiente mostrare che i punti $\delta(A, A)$ e $\delta(B, B)$ appartengono entrambi alla polare di $\delta(A, B)$, rispetto alla conica $\mathcal{C}$. Ci siamo quindi ridotti a verificare le identità

$$\begin{aligned} {}^t\delta(A, B)C\delta(A, A) &= (2a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, 2a_1b_1)C\begin{pmatrix} a_0^2 \\ a_0a_1 \\ a_1^2 \end{pmatrix} = 0, \\ {}^t\delta(A, B)C\delta(B, B) &= (2a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, 2a_1b_1)C\begin{pmatrix} b_0^2 \\ b_0b_1 \\ b_1^2 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

(c). il punto $\delta(X, Y)$ appartiene alla polare di $\delta(A, B)$ se, e solo se,

$${}^t\delta(A, B)C\delta(X, Y) = (2a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, 2a_1b_1)A\begin{pmatrix} 2x_0y_0 \\ x_0y_1 + x_1y_0 \\ 2x_1y_1 \end{pmatrix} = 0;$$

ovvero se, e solo se,

$$(y_0b_1 - y_1b_0)(a_0x_1 - a_1x_0) + (a_0y_1 - a_1y_0)(x_0b_1 - x_1b_0) = 0.$$

Tale condizione è equivalente ad $(A, B, X, Y) = -1$ (cf. l'esercizio precedente). $\square$

ESERCIZIO 9 *Si determinino la matrice, l'asse, il vertice e l'equazione canonica della parabola $\mathcal{P}$ che ha fuoco $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e direttrice $d : 2x - y - 3 = 0$.*

Svolgimento: Indicata con δ_0 la metrica euclidea nel piano; un punto $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartiene alla parabola $\mathcal{P}$ se, e solo se, $\delta_0(P, F) = \delta_0(P, d)$; ovvero se, e solo se,

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \frac{|2x - y - 3|}{\sqrt{5}}.$$

Tale condizione è equivalente all'equazione $x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x - 26y + 16$ e quindi $\mathcal{P}$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 1 & -13 \\ 1 & 1 & 2 \\ -13 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

L'asse di $\mathcal{P}$ è la retta passante per F e perpendicolare a d, e quindi la retta h, di equazione $x+2y-5 = 0$ ed il vertice V è il punto medio tra il fuoco F e $d \cap h$; ovvero $V = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{17}{10} \end{pmatrix}$.

Il coefficiente dell'equazione canonica di $\mathcal{P}$, $2Y - aX^2 = 0$, si trova moltiplicando l'autovalore non nullo λ della matrice $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ per una radice quadrata del rapporto $-\frac{\lambda}{\det A}$. Si ha $\lambda = 5$ e $\det A = -(15)^2$, da cui si deduce che l'equazione canonica di $\mathcal{P}$ è $2Y - \frac{\sqrt{5}}{3}X^2 = 0$. $\square$

ESERCIZIO 10 *Sia $\mathcal{F}$ una fascio di coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ e sia r una retta non passante per i punti base del fascio. Al variare della conica $\mathcal{C}$ in $\mathcal{F}$, si consideri la quadrica $\mathcal{C}_r := \mathcal{C} \cap r$ indotta sulla retta r.*

(a) Si mostri che le quadriche $\mathcal{C}_r$, al variare di $\mathcal{C}$ in $\mathcal{F}$, formano un fascio di quadriche $\mathcal{F}_r$ sulla retta r.

(b) Si mostri che l'insieme delle coppie di punti (P, Q) di r, tali che $\{P, Q\}$ sia il supporto di una conica $\mathcal{C}_r$ del fascio $\mathcal{F}_r$ è il grafico di una proiettività della retta r.

Svolgimento: Per prima cosa osserviamo che possiamo sempre scegliere un sistema di riferimento in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ per cui la retta r ha equazione $x_0 = 0$.

(a). Se A e B sono le matrici di due coniche distinte del fascio $\mathcal{F}$, La generica conica del fascio $\mathcal{F}_r$ ha matrice $\lambda A' + \mu B'$, ove, come di consueto, l'esponente "$'$" posto su una matrice, stà ad indicare la sottomatrice che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna della matrice data. Dunque $\mathcal{F}_r$ è un fascio di quadriche della retta r.

(b). Restringiamoci a lavorare sulla retta r e consideriamo quindi la coppia $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ come coordinate omogenee su r. Dato un punto $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, la conica del fascio $\mathcal{F}_r$, passante per P, è determinata dalle condizioni

$$\lambda = {}^tP \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} P, \qquad \mu = -{}^tP \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} P;$$

ovvero dall'equazione

$$\begin{aligned} &(b_{11}p_1^2 + 2b_{12}p_1p_2 + b_{22}p_2^2)(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) - \\ &\quad - (a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2)(b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2) = 0. \end{aligned}$$

Sviluppando i prodotti, si può mettere in evidenza il fattore $p_2x_1 - p_1x_2$, perchè la quadrica passa per P. Eliminando tale fattore, resta l'equazione lineare omogenea

$$\begin{aligned}&[2(a_{11}b_{12} - b_{11}a_{12})p_1 + (a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})p_2]x_1 - \\ &\quad - [-(a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})p_1 + 2(b_{12}a_{22} - a_{12}b_{22})p_2]x_2 = 0,\end{aligned}$$

che determina le coordinate (omogenee) del punto Q.

Dunque l'applicazione proiettiva $f : r \to r$, che manda P su Q ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -(a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}) & 2(b_{12}a_{22} - a_{12}b_{22}) \\ 2(a_{11}b_{12} - b_{11}a_{12}) & a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11} \end{pmatrix}.$$

Poichè f è una biiezione (di periodo 2) tra i punti di r, si conclude che f è una proiettività. $\square$

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica

prova scritta del 22 settembre 1995 .

ESERCIZIO 1 *Al variare di λ in $\mathbb{R}$, si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ dotato dell'applicazione bilineare simmetrica g_λ di matrice*

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \lambda \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 3\lambda \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica.

(a) *Si determinino i valori di λ per cui $(\mathbb{R}^4, g_\lambda)$ è isometrico allo Spazio di Minkowski.*

(b) *Si determinino i valori di λ per cui $(\mathbb{R}^4, g_\lambda)$ contiene un sottospazio isotropo di dimensione 2.*

(c) *In entrambo i casi precedenti si determinino delle decomposizioni dello spazio $(\mathbb{R}^4, g_\lambda)$ del tipo descritto nel Teorema di Sylvester.*

Svolgimento: Si considerino i sottospazi $U_1 = L(e_1, e_3)$ ed $U_2 = L(e_2, e_4)$. Da un'ispezione della matrice A_λ si deduce che, qualunque sia il valore del parametro λ, i due sottospazi sono mutuamente ortogonali e la restrizione di g_λ ad U_1 è definita positiva.

La restrizione di g_λ ad U_2 non può essere definita positiva, perchè $g_\lambda(e_2, e_2) = -2 < 0$, ed è definita negativa se, e solo se,

$$\det \begin{pmatrix} -2 & \lambda \\ \lambda & 3\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda + 6) > 0.$$

Dunque,

(a) $(\mathbb{R}^4, g_\lambda)$ è isometrico allo Spazio di Minkowski se, e solo se, la restrizione di g_λ ad U_2 non è definita, ovvero se, e solo se, $\lambda < -6$ oppure $\lambda > 0$;

(b) $(\mathbb{R}^4, g_\lambda)$ contiene un sottospazio isotropo di dimensione $2^{(*)}$ se, e solo se, la restrizione di g_λ ad U_2 è definita negativa, ovvero se, e solo se, $-6 < \lambda < 0$.

(c) Osserviamo che, qualunque sia il valore di $\lambda \notin \{-6, 0\}$, i vettori e_2, $\lambda e_2 + 2e_4$, formano una base ortogonale di U_2. Dunque, se $\lambda < -6$ oppure $\lambda > 0$, i sottospazi

$$W_1 = L(e_1, e_3, \lambda e_2 + 2e_4) \quad \text{e} \quad W_2 = L(e_2)$$

formano una decomposizione del tipo descritto nel Teorema di Sylvester. Se invece $-6 < \lambda < 0$, sono i sottospazi U_1 ed U_2 descritti sopra a fornire la decomposizione richiesta. □

(*) ed ha quindi indice di inerzia uguale a 0 (perchè?).

ESERCIZIO 2 *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^4$ dotato dell'applicazione bilineare (simmetrica) rispetto a cui la base canonica è una base ortonormale. Al variare di λ in $\mathbb{C}$, si determini una base del sottospazio di $\mathbb{C}^4$, ortogonale alle soluzioni del sistema lineare*

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} (2\lambda - 1)x_1 - x_3 = 0 \\ \lambda x_1 - 2\lambda x_2 + x_4 = 0 \\ \lambda x_1 - 2x_4 = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento: Quando $\lambda \neq 0$ le tre equazioni sono linearmente indipendenti, come si può vedere calcolando il minore estratto dalle ultime tre colonne della matrice dei coefficienti del sistema. Dunque, quando $\lambda \neq 0$, una base del sottospazio ortogonale alle soluzioni del sistema Σ_λ è data dai vettori

$$v_1 = (2\lambda - 1)e_1 - e_3, \quad v_2 = \lambda e_1 - 2\lambda e_2 + e_4, \quad v_3 = \lambda e_1 - 2e_4.$$

Nel caso in cui $\lambda = 0$ il rango del sistema Σ_0 è uguale a 2 ed una base del sottospazio ortogonale alle soluzioni del sistema Σ_λ è data dai vettori $e_1 + e_3$ ed e_4. □

ESERCIZIO 3 *Si indichi con il simbolo M_k^n, il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale formato dai polinomi omogenei di grado k in $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Si consideri l'applicazione lineare $\Delta : M_k^3 \to M_{k-2}^3$ che ad ogni polinomio $P(X)$ associa*

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial X_3^2} \qquad [\textit{Operatore di Laplace}].$$

(a) *Si determinino le dimensioni del nucleo e dell'immagine di $\Delta : M_3^3 \to M_1^3$.*
(b) *Si indichi con $O(3)$ il gruppo delle matrici ortogonali di ordine 3. Dati $P \in M_k^3$ e $g \in O(3)$, si indichi con gP il polinomio $P({}^t gX)^{(*)}$. Si mostri che, qualunque siano g e P, si ha $\Delta(gP) = g(\Delta P)$.*

Svolgimento: Per ogni monomio $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} X_3^{\alpha_3} \in M_k^{3\,(**)}$, si ha

$$\Delta(\underline{X}^\alpha) = \sum_{1 \leq i,j \leq 3} \alpha_i (\alpha - \epsilon_i)_j \underline{X}^{\alpha - \epsilon_i - \epsilon_j} \in M_{k-2}^3,$$

e quindi la definizione dell'applicazione Δ è ben posta.
(a). Poichè $\Delta(\underline{X}^{3\epsilon_i}) = \Delta(X_i^3) = 6X_i = 6\underline{X}^{\epsilon_i}$, per $i = 1, 2, 3$; tali polinomi formano una base di M_1^3 e quindi l'applicazione $\Delta : M_3^3 \to M_1^3$ è suriettiva. Dunque si ha:

$$\dim(\operatorname{im} \Delta) = \dim(M_1^3) = 3 \quad \text{e} \quad \dim(\ker \Delta) = \dim(M_3^3) - 3 = 7.$$

(b). Sia $g = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ una matrice ortogonale (ovvero ${}^t g = g^{-1}$). Allora la colonna ${}^t gX$ è uguale a

$${}^t gX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 g_{j1} X_j \\ \sum_{j=1}^3 g_{j2} X_j \\ \sum_{j=1}^3 g_{j3} X_j \end{pmatrix};$$

$^{(*)}$ Il polinomio P viene calcolato sulla colonna che si ottiene moltiplicando la colonna $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ per la matrice ${}^t g$; ovvero il polinomio gP è il polinomio che si ottiene da P dopo il cambiamento di coordinate (ortonormali) determinato da ${}^t g = g^{-1}$.

$^{(**)}$ Useremo le convenzioni usuali sui multi-indici ovvero, per ogni multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ scriveremo $\underline{X}^\alpha := X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} X_3^{\alpha_3}$ ed indicheremo con $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ il grado totale del monomio. Indicheremo poi con $\epsilon_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$, $i = 1, 2, 3$, i multindici $\epsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\epsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\epsilon_3 = (0, 0, 1)$. In particolare, $\underline{X}^\alpha \in M_k^3$ se, e solo se, $|\alpha| = k$ e si ha $\frac{\partial}{\partial X_j} \underline{X}^\alpha = \alpha_j \underline{X}^{\alpha - \epsilon_j}$, per $j = 1, 2, 3$.

dunque, per le usuali regole di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$\frac{\partial}{\partial X_j}(gP) = \sum_{1 \le i \le 3} g_{ji} P_i({}^t g X), \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial X_j^2}(gP) = \sum_{1 \le i,h \le 3} g_{ji} g_{jh} P_{ih}({}^t g X),$$

ove il simbolo P_i (risp. P_{ih}) denota la derivata prima (risp. seconda) del polinomio $P(X)$ rispetto all'i-esima variabile (risp. alle variabili i-esima ed h-esima). Dunque

$$\Delta(gP) = \sum_{1 \le j \le 3} \sum_{1 \le i,h \le 3} g_{ji} g_{jh} P_{ih}({}^t g X) = \sum_{1 \le i \le 3} P_{ih}({}^t g X) = g(\Delta P),$$

perchè g è una matrice ortogonale. □

ESERCIZIO 4 *Sia A una matrice $n \times n$ ad elementi in $\mathbb{C}$ tale che $A^n = \mathbf{1}$. Si dimostri che A è diagonalizzabile.*

Svolgimento: È sufficiente osservare che il polinomio minimo di A divide il polinomio $X^n - 1$ che è prodotto di n fattori lineari distinti in $\mathbb{C}[X]$. Dunque anche il polinomio minimo di A è prodotto di fattori lineari distinti e la matrice è diagonalizzabile. □

ESERCIZIO 5 *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino la matrice di Jordan J di ϕ ed una base $\{v_1, \dots, v_4\}$ di $\mathbb{Q}^4$ rispetto a cui ϕ abbia matrice J.

Svolgimento: Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}) = (x-2)^4$ e quindi ϕ ha l'unico autovalore 2 con molteplicità 4. Poichè l'unico autovalore appartiene a $\mathbb{Q}$ è valida la teoria di Jordan per l'endomorfismo dato. Osserviamo che

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che $\mathrm{rk}(A-2) = 2$, ovvero che l'autovalore 2 ha nullità 2, ed inoltre che il polinomio minimo di ϕ è $\lambda_\phi(x) = (x-2)^3$.

Dunque la matrice di Jordan di ϕ è

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Posto

$$w_4 = e_2 \in \ker(\phi - 2)^3 \setminus \ker(\phi - 2)^2, \quad w_3 = (\phi - 2)(e_2) = -e_1 - 4e_3 + e_4,$$
$$w_2 = (\phi - 2)(w_3) = (\phi - 2)^2(e_2) = -e_3, \quad w_1 = e_1 - 2e_4 \in \ker(\phi - 2),$$

si verifica facilmente che $\{w_1, \dots, w_4\}$ è una base rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. □

ESERCIZIO 6 *Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino le rette*

$$r : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad ed \quad s : \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}.$$

(a) Si determini l'insieme $\mathcal{Q}$ formato dai punti equidistanti dalle due rette.

(b) Si classifichino (dal punto di vista affine) le coniche che si ottengono intersecando $\mathcal{Q}$ con i piani del fascio di asse $\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Svolgimento: (a). La retta r passa per il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, mentre la retta s passa per il punto $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Indicata con δ_0 la metrica euclidea, si ha che un punto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartiene a $\mathcal{Q}$ se, e solo se,

$$\delta_0(X, r) = \frac{\|(X - P) \times v\|}{\|v\|} = \frac{\|(X - Q) \times w\|}{\|w\|} = \delta_0(X, s);$$

ovvero se, e solo se,

$$y^2 + z^2 = (1 - z)^2 + x^2 \quad \text{ovvero} \quad x^2 - y^2 - 2z + 1 = 0.$$

(b). L'intersezione col piano $y = 0$ determina una parabola (con l'asse parallelo all'asse x). L'intersezione col piano $x + z = 0$ determina una conica degenere (prodotto di due rette reali distinte). Infine, intersecando con ogni altro piano del fascio (di equazione $y + t(x + z) = 0$ per $t \neq 0$) si ottiene un'iperbole non degenere. □

ESERCIZIO 7 *Sia dato un insieme $\mathcal{S}$ di rette dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ $(n \geq 3)$ con la proprietà che ogni coppia di rette distinte di $\mathcal{S}$ si interseca in un punto. Si mostri che le rette di $\mathcal{S}$ sono tutte contenute in uno stesso piano, oppure passano tutte per uno stesso punto.*

Svolgimento: È chiaro che è sufficiente mostrare l'asserto per tre rette (a due a due) distinte. Date quindi tre rette r, s e t soddisfacenti alle proprietà dell'enunciato, si osservi che se i tre punti $r \cap t$, $r \cap s$, $s \cap t$ sono a due a due distinti, allora determinano un piano su cui giacciono le rette date. Altrimenti, se due tra i punti di intersezione coincidono, si ha $r \cap t = r \cap s = s \cap t$, e le rette passano tutte per uno stesso punto. □

ESERCIZIO 8 *Siano $\mathcal{C}$ una conica (non-degenere) ed $a : a_0X_0+a_1X_1+a_2X_2 = 0$ una retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.*

(a) Si enunci una condizione necessaria e sufficiente sulle coordinate plückeriane (a_0, a_1, a_2) di a, affinchè la retta a sia tangente a $\mathcal{C}^{(*)}$.

(b) È vero o falso che esiste un'unica conica tangente a cinque rette, a tre a tre non concorrenti ad uno stesso punto?

Svolgimento: (a). Si indichi con A la matrice della conica $\mathcal{C}$. La retta $a = (a_0, a_1, a_2)$ è tangente a $\mathcal{C}$ se, e solo se, il suo polo $P = A^{-1}\,{}^t a$ appartiene al supporto della conica ovvero se, e solo se, ${}^tPAP = aA^{-1}\,{}^ta = 0$.

(b). Per quanto visto sopra, la tangenza a cinque rette a tre a tre non concorrenti, determina la matrice A^{-1} a meno di un fattore di proporzionalità. Dunque anche A è determinata a meno di un fattore di proporzionalità e resta così definita un'unica conica soddisfacente alle condizioni date. □

ESERCIZIO 9 *Si studi la conica del piano euclideo di equazione*

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x + 2y = 0.$$

Svolgimento: Si tratta di una parabola con vertice nell'origine, asse $h : x + 2y = 0$ e tangente al vertice $y - 2x = 0$. L'equazione canonica è $2Y - \sqrt{5}X^2 = 0$; il fuoco è il punto $F = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$ e la direttrice è la retta $d : 4x - 2y + 1 = 0$. Si veda, ad esempio, l'Esercizio 9 del 21 giugno 1995 per una guida nella risoluzione. □

ESERCIZIO 10 *Siano $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ due parabole (non-degeneri) del piano euclideo. È vero o falso che il fascio di coniche generato da $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ contiene un cerchio, se e solo se, gli assi delle parabole sono perpendicolari?*

Svolgimento: Scegliamo un sistema di coordinate (ortonormali) in cui $\mathcal{P}_1$ abbia equazione canonica e quindi sia

$$\mathcal{P}_1 : 2y - ax^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_2 : (cx + dy)^2 + \{\text{termini di grado } < 2\} = 0.$$

Il fascio generato da $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ contiene un cerchio (non-degenere) se, e solo se, esistono λ, μ e ρ, tutti e tre diversi da zero, tali che

$$\lambda ax^2 + \mu(cx + dy)^2 = \rho(x^2 + y^2).$$

Deve quindi aversi

$$\begin{cases} \mu cd = 0 \\ \mu c^2 - \lambda a = \mu d^2 \end{cases} \qquad \text{con } \lambda\mu\rho \neq 0.$$

L'unica possibilità è che si abbia $c = 0$ e quindi che le direzioni degli assi delle due parabole siano perpendicolari$^{(*)}$. □

$^{(*)}$ La curva così definita nel piano proiettivo duale è detta la "curva duale" della conica $\mathcal{C}$. In generale non è vero che la curva duale di una curva data $\mathcal{X}$ abbia lo stesso grado di $\mathcal{X}$; ciò è vero per le coniche.

$^{(*)}$ Vi era un modo un po' più geometrico di affrontare il problema. Il fascio generato da $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ determina un'involuzione sulla retta impropria che ha come punti uniti le direzioni P_∞ e Q_∞ degli assi delle due parabole. Il fascio contiene un circolo se, e solo se, i punti ciclici C e $\overline{C}$ si corrispondono in questa involuzione. Ciò accade se, e solo se, $(P_\infty, Q_\infty, C, \overline{C}) = -1$ e ciò è equivalente al fatto che P_∞ e Q_∞ si corrispondano nell'involuzione degli angoli retti, ovvero siano direzioni perpendicolari.

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica

prova scritta del 31 gennaio 1996 .

ESERCIZIO 1 *Al variare di λ in $\mathbb{Q}$, si dica quante soluzioni vi sono in $\mathbb{Q}^4$ per il seguente sistema di equazioni lineari*

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} (\lambda-1)x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ \lambda x_2 + (\lambda+1)x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_3 + x_4 = 0 \\ (\lambda-1)x_1 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento: Indichiamo con A_λ la matrice incompleta del sistema. Il determinante della matrice incompleta è $\det A_\lambda = 2\lambda(\lambda-1)$ e perciò, quando $0 \neq \lambda \neq 1$, il sistema Σ_λ ammette un'unica soluzione. Quando il rango della matrice incompleta diventa minore di 4, il sistema non ha soluzione, come si verifica sostituendo $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ nel sistema Σ_λ. □

ESERCIZIO 2 *Siano V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base; e sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare simmetrica definita ponendo*

$$g(v_1, v_1) = 0 = g(v_2, v_2), \quad g(v_1, v_3) = 0 = g(v_3, v_4) = g(v_2, v_4),$$
$$g(v_1, v_2) = 1 = g(v_2, v_3) = -g(v_3, v_3), \quad g(v_1, v_4) = 2 = -g(v_4, v_4).$$

(a) Si verifichi se g è non-degenere e si determini il suo indice di inerzia.
(b) Si determini una base ortogonale per V, relativamente a g.
(c) Si dica se esiste una base di V rispetto a cui g abbia matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ed in caso affermativo, la si determini.

Svolgimento: La matrice di g, rispetto alla base $\mathcal{V}$, è $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, con $\det G = 2$. Dunque g è non-degenere.

Una base ortogonale di V, relativamente a g, è

$$w_1 = v_3, \quad w_2 = v_4, \quad w_3 = v_2 + v_3, \quad w_4 = v_1 - v_2 - v_3 + v_4;$$

con

$$g(w_1, w_1) = -1, \quad g(w_2, w_2) = -2, \quad g(w_3, w_3) = 1, \quad g(w_4, w_4) = 1.$$

Dunque l'indice di inerzia di g è $i(g) = 0$ e perciò esiste una base rispetto a cui g abbia matrice A. Ad esempio, si prendano i vettori

$$z_1 = w_1 + w_3, \quad z_2 = \frac{1}{2}w_1 - w_3, \quad z_3 = \frac{1}{2}w_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}w_4, \quad z_4 = -\frac{1}{2}w_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}w_4.$$

□

ESERCIZIO 3 *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita, dotato di un'applicazione bilineare simmetrica definita positiva $g : V \times V \to \mathbb{R}$.*

(a) Sia $\phi : V \to V$ un'isometria (rel. a g) e si mostri che $\operatorname{im}(\phi - 1) = \ker(\phi - 1)^\perp$.

(b) Per ogni intero positivo n, si indichi con $\psi_n : V \to V$ l'omomorfismo

$$\psi_n = \frac{1}{n}(1 + \phi + \phi^2 + \cdots + \phi^n).$$

Si mostri che $\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = x$ per ogni $x \in \ker(\phi - 1)$ e $\lim_{n\to\infty} \psi_n(y) = 0$ per ogni $y \in \operatorname{im}(\phi - 1)$.

(c) Si concluda che, per ogni $v \in V$, $\lim_{n\to\infty} \psi_n(v)$ coincide con la proiezione ortogonale di v su $W = \ker(\phi - 1)$.

Svolgimento: (a). Dati comunque $x \in W$ e $v \in V$, si ha

$$g((\phi - 1)(v), x) = g(\phi(v), \phi(x)) - g(v, x) = 0,$$

e quindi $\operatorname{im}(\phi - 1) \subseteq W^\perp$. Per motivi di dimensione (perchè?) i due sottospazi sono uguali.
(b). Se $x \in W$, allora $x = \phi(x) = \cdots = \phi^n(x)$, qualunque sia $n \geq 1$. Quindi $\psi_n(x) = x$ qualunque sia n ed il limite è ovviamente verificato. Sia ora $y = (\phi - 1)(v) \in \operatorname{im}(\phi - 1)$. Allora

$$\psi_n(y) = \frac{1}{n}(1 + \phi + \phi^2 + \cdots + \phi^n)(\phi - 1)(v) = \frac{1}{n}[\phi^{n+1}(v) - v];$$

da cui, ricordando che ϕ è un'isometria, si deduce $\|\psi_n(y)\| \leq \frac{2}{n}\|v\|$ e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(y) = 0 \qquad \text{per ogni } y \in \operatorname{im}(\phi - 1).$$

(c). È immediato ora concludere ricordando che $V = W \oplus W^\perp$. □

ESERCIZIO 4 *Siano A e B due matrici $n \times n$ ad elementi in $\mathbb{C}$ tali che $AB = BA$ ed $A^n = B^n = \mathbf{1}$. Si dimostri che A e B sono simultaneamente diagonalizzabili (cioè esiste una base di autovettori comuni ad entrambi gli endomorfismi).*

Svolgimento: Poichè $A^n = B^n = \mathbf{1}$, i polinomi minimi delle due matrici dividono il polinomio $x^n - 1$ che è prodotto di n fattori lineari distinti in $\mathbb{C}$; quindi A e B sono entrambe diagonalizzabili. Resta da vedere che esiste una base di autovettori comune ai due endomorfismi ϕ e ψ, rappresentati dalle matrici A e B, rispettivamente.

Sia $W_\phi(\alpha)$ il sottospazio degli autovettori di ϕ, relativi all'autovalore α e mostriamo che ψ induce un endomorfismo su tale sottospazio. Infatti, dato $v \in W_\phi(\alpha)$, si ha

$$\phi(\psi(v)) = \psi(\phi(v)) = \psi(\alpha v) = \alpha\psi(v),$$

e quindi $\psi(v) \in W_\phi(\alpha)$, che è quanto volevamo.

A questo punto, non resta che osservare che la restrizione di ψ ad un sottospazio di autovettori relativi ad uno stesso autovalore di ϕ è un endomorfismo diagonalizzabile, perchè il suo polinomio minimo divide il polinomio minimo di ψ su V. □

ESERCIZIO 5 *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino la matrice di Jordan J di ϕ ed una base $\{v_1, \dots, v_4\}$ di $\mathbb{Q}^4$ rispetto a cui ϕ abbia matrice J.

Svolgimento: Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(x) = (x-2)^4$ e quindi ϕ ha un solo autovalore e tale autovalore appartiene a $\mathbb{Q}$; si può quindi applicare la teoria di Jordan allo studio dell'endomorfismo ϕ. L'endomorfismo $\phi - 2$ ha rango 2 e, calcolando la matrice $(A-2)^2$, si verifica che $(\phi-2)^2 \neq 0$. Quindi una matrice di Jordan per ϕ è

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nel modo consueto, si verifica che una base rispetto a cui ϕ ha matrice J è data dai vettori

$$v_1 = e_1 - 2e_4, v_2 = -e_3, v_3 = -e_1 + 4e_3 + e_4, v_4 = e_2.$$

□

ESERCIZIO 6 *Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ una sua base. Per ogni $i = 1, \dots, n$, sia $W_i = L(w_1, \dots, w_i)$ e sia $W_0 = \{0\}$.*

(a) Sia $\phi : V \to V$ tale che $\phi(w_{j+1}) \in W_j$, per $j = 0, \dots, n-1$ e si determini il polinomio caratteristico di ϕ.

(b) Nelle ipotesi del punto precedente, sapendo che $\operatorname{rk}\phi = 4 < n-2$, si determini l'endomorfismo ϕ di modo che il polinomio minimo di un tale ϕ abbia grado massimo.

Svolgimento: Le entrate della matrice di ϕ, rispetto alla base $\mathcal{W}$, poste sulla diagonale principale ed al di sotto di essa, sono tutte nulle. Quindi il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(x) = x^n$.

Nelle ipotesi del punto (b), lo spazio vettoriale V ha dimensione maggiore di 6 ed, affinchè il polinomio minimo abbia grado massimo la matrice di Jordan di ϕ deve contenere un blocco del tipo

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per motivi di rango, ogni altro blocco deve essere identicamente uguale a 0 e ciò determina la matrice di Jordan di ϕ. □

ESERCIZIO 7 *Siano dati quattro punti distinti $P_1, \dots, P_4$ dello spazio affine tridimensionale e si consideri un quadrilatero che ha questi quattro punti come vertici. Indicati con $M_1, \dots, M_4$ i punti medi dei lati di tale quadrilatero, si mostri che $M_1, \dots, M_4$ sono i vertici di un parallelogramma.*

Svolgimento: Indichiamo con M_i, $i = 1, 2, 3$, il punto medio del lato P_iP_{i+1} e sia M_4 il punto medio del lato P_1P_4. Fissato un punto O dello spazio, si considerino i vettori $v_i = P_i - O$, per $i = 1, \dots, 4$. Allora, i punti medi M_i, $i = 1, \dots, 4$, sono determinati dalle condizioni

$$M_1 - O = \frac{v_1 + v_2}{2}, \quad M_2 - O = \frac{v_2 + v_3}{2}, \quad M_3 - O = \frac{v_3 + v_4}{2}, \quad M_4 - O = \frac{v_1 + v_4}{2}.$$

Con un calcolo diretto, si ottiene

$$M_4 - M_1 = \frac{v_4 + v_2}{2} = M_2 - M_3, \quad M_2 - M_1 = \frac{v_3 + v_1}{2} = M_3 - M_4$$

che è quanto volevamo verificare. □

ESERCIZIO 8 *Nel piano affine reale si consideri il triangolo determinato da tre punti non allineati A, B e C. Si dia una dimostrazione del fatto che ogni retta, non parallelela al lato AB, che intersechi i lati AC e BC in punti interni, interseca la retta $A + B$ in un punto esterno al triangolo ABC.*

Svolgimento: Si considerino quindi i vettori $u = B - A$, $v = C - A$ e $v - u = C - B$. Un punto P interno al lato AC ed un punto Q interno al lato BC sono quindi

$$P = A + \lambda v, \quad Q = B + \mu(v - u) = A + u + \mu(v - u), \quad \text{con } 0 < \lambda, \mu < 1.$$

Con un calcolo diretto si verifica che, se le due rette $P + Q$ ed $A + B$ non sono parallele ($\lambda \neq \mu$), la retta $P + Q$ interseca la retta $A + B$ nel punto $A + \lambda\frac{\mu-1}{\mu-\lambda}u$. Dobbiamo quindi verificare che il numero reale $x = \lambda\frac{\mu-1}{\mu-\lambda}$ è esterno all'intervallo $[0, 1]$. Infatti, se $\mu > \lambda$, si ha $x < 0$ e la tesi è vera. Se invece $\mu < \lambda$, da $\lambda < 1$ si ricava $\lambda - \lambda\mu > \lambda - \mu$ e quindi $x > 1$. □

ESERCIZIO 9 *Si studi la conica $\mathcal{C}$, di equazione*

$$2x^2 + 2y^2 - 4xy - x - y - 1 = 0.$$

Svolgimento: La conica $\mathcal{C}$ ha matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -4 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, e $\det A = -16 \neq 0$. Dunque la conica $\mathcal{C}$ è non-degenere ed è una parabola, essendo $\det A' = 0$. La direzione dell'asse è il punto improprio $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e quindi l'asse di $\mathcal{C}$ è la polare h del punto $Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; ovvero $h : x - y = 0$. Da cui si deduce che il vertice, unico punto proprio di intersezione tra l'asse ed il supporto della parabola, è il punto V di coordinate affini $V = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$. Con le tecniche usuali(*), si verifica che il fuoco F e la direttrice d sono rispettivamente

$$F = \begin{pmatrix} -7/16 \\ -7/16 \end{pmatrix}, \qquad d : 8x + 8y + 9 = 0.$$

□

(*) Si veda, ad esempio, l'esercizio 9 del compito del 21 giugno 1995

ESERCIZIO 10 *Sia $\mathcal{E}$ un'iperbole non degenere del piano euclideo. Si trovino tutte le coniche $\mathcal{F}$ tali che nel fascio determinato da $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ non vi siano parabole che non contengano la retta impropria nel supporto.*

Svolgimento: Siano A e B le matrici delle coniche $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{F}$, rispettivamente, ed indichiamo, come di consueto con A' e B' le sottomatrici di A e B ottenute cancellando la prima riga e la prima colonna. La condizione che le parabole del fascio contengano nel supporto la retta impropria si può scrivere nella forma

$$\det(\lambda A' + \mu B') = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda A' + \mu B' = 0.$$

Ciò significa che le matrici A' e B' sono proporzionali e quindi che $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{F}$ hanno la stessa intersezione con la retta impropria. Tale condizione è necessaria e sufficiente. $\square$

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica

prova scritta del 19 giugno 1996 .

ESERCIZIO 1 *Si determinino i valori del parametro t per cui il sistema*

$$\Sigma_t : \begin{cases} (t+1)x_1 + 2x_2 - tx_4 = 1 \\ (2-t)x_2 + x_3 = 1 \\ (2-t)x_2 + 2tx_4 = 1 \\ (t+1)x_1 + 2x_2 + (2-t)x_3 = 1 \end{cases}$$

ha soluzione.

Per i valori di t per cui il sistema ammette un'unica soluzione, si determini tale soluzione in funzione del parametro t.

Svolgimento: Applicando la tecnica di eliminazione (Gauss) al sistema Σ_t, si verifica che tale sistema è riga-equivalente al sistema

$$\begin{cases} (t+1)x_1 + 2x_2 - tx_4 = 1 \\ (2-t)x_2 + x_3 = 1 \\ -x_3 + 2tx_4 = 0 \\ t(5-2t)x_4 = 0 \end{cases}.$$

Dunque, il sistema dato ammette un'unica soluzione quando $t \notin \{-1, 0, 2, 5/2\}$ e, in tal caso la soluzione è data da $X_t = \begin{pmatrix} \frac{t}{(t+1)(t-2)} \\ \frac{1}{2-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Osserviamo che le soluzioni del sistema Σ_t, nel caso in cui il sistema ammetta un'unica soluzione, stanno tutte sulla curva piana $\mathcal{C}$ di equazioni

$$\begin{cases} x_2 - 2x_2^2 - 3x_1x_2 + x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

L'insieme di tutte le soluzioni del sistema dato contiene, oltre a (quasi tutti) i punti della curva $\mathcal{C}$, anche i punti di due rette non complanari a $\mathcal{C}$ le cui equazioni sono date dai sistemi lineari Σ_0 e $\Sigma_{5/2}$ e che intersecano entrambe la curva $\mathcal{C}$. $\square$

ESERCIZIO 2 *Sia fissato un polinomio a coefficienti complessi*

$$Q(X) = c(X-\alpha_1)^{m_1}\cdots(X-\alpha_r)^{m_r},$$

ove $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ *sono le radici di* $Q(X)$*, a due a due distinte,* $c\in\mathbb{C}$ *ed* $m_1+\cdots+m_r=n=\deg Q>0$. *Si verifichi che l'insieme* $V_Q = \left\{ \frac{P(X)}{Q(X)} \mid P(X)\in\mathbb{C}[X],\ \deg P<\deg Q \right\}$ *è un* $\mathbb{C}$*-spazio vettoriale di dimensione* n.

Si mostri che l'insieme $\left\{ \frac{1}{(X-\alpha_i)^j} \mid i=1,\dots,r,\ j=1,\dots,m_i \right\}$ *è una base di* V_Q.

Svolgimento: È chiaro che gli elementi di V_Q si possono scrivere nella forma

$$A_0\frac{1}{Q(X)}+A_1\frac{X}{Q(X)}+A_2\frac{X^2}{Q(X)}+\cdots+A_{n_1}\frac{X^{n-1}}{Q(X)},$$

ove $A_0,\dots,A_{n-1}$ sono in C ed $n=\deg Q$. Tale scrittura è unica e ciò conclude la verifica sulla dimensione dello spazio V_Q.

Poichè l'insieme $\left\{ \frac{1}{(X-\alpha_i)^j} \mid i=1,\dots,r,\ j=1,\dots,m_i \right\}$ ha esattamente n elementi, per verificare che è una base di V_Q è sufficiente dimostrare che i suoi elementi sono linearmente indipendenti. Sia

$$(*)\qquad \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}\frac{1}{(X-\alpha_i)^j}=0$$

e mostriamo che per ogni coppia di indici i e j, deve aversi $A_{ij}=0$.

Al variare di $i\in\{1,\dots,r\}$ e $j\in\{1,\dots,m_i\}$, si consideri il polinomio

$$P_{ij}(X)=\frac{Q(X)}{(X-\alpha_i)^j}=c(X-\alpha_1)^{m_1}\cdots(X-\alpha_i)^{m_i-j}\cdots(X-\alpha_r)^{m_r};$$

allora la combinazione $(*)$ è uguale a zero se, e solo se il polinomio

$$P(X)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}A_{ij}P_{ij}=0.$$

Si osservi che, fissato i_0, si ha $P_{ij}(\alpha_{i_0})\neq 0$ se, e solo se, $i=i_0$ e $j=m_{i_0}$. Dunque, osservando che deve aversi $P(\alpha_i)=0$ per ogni $i=1,\dots,r$, si deduce che $A_{im_i}=0$ e quindi che ogni addendo di $P(X)$ è divisibile per $(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_r)$.

Ripetendo lo stesso ragionamento per

$$P'(X)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i-1}A_{ij}P'_{ij}=0,\qquad \text{ove}\qquad P'_{ij}(X)=\frac{P_{ij}(X)}{(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_r)},$$

si ottiene che, fissato i_0, si ha $P'_{ij}(\alpha_{i_0})\neq 0$ se, e solo se, $i=i_0$ e $j=m_{i_0}-1>0$. Dunque, osservando che deve aversi $P'(\alpha_i)=0$ per ogni $i=1,\dots,r$, si deduce che $A_{i,m_i-1}=0$ per $i=1,\dots,r$ ed $m_i-1>0$ e ripetendo ancora i ragionamenti precedenti si conclude la dimostrazione. □

ESERCIZIO 3 *Ricordiamo che un sottoinsieme S di uno spazio vettoriale reale V si dice convesso se, presi comunque due vettori v e w in S, tutte le combinazioni lineari del tipo $\lambda v + (1-\lambda)w$, al variare di λ nell'intervallo $[0,1]$, sono ancora elementi di S.*

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n, e sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare simmetrica definita positiva.

(a) *Si mostri che il sottoinsieme $B_g = \{\, v \in V \mid g(v,v) \leq 1 \,\}$ è un sottoinsieme convesso.*

(b) *Fissata una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, si consideri la matrice G di g rispetto a tale base. Il numero $A_{g,\mathcal{V}} := \omega_n (\det G)^{-1/2}$ è detto il volume dell'insieme B_g rispetto alla base data, ove ω_n è un'opportuna costante$^{(*)}$. Siano $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ un'altra base di V ed H la matrice di g rispetto a tale base, indicato con $\delta = \det \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(1)$ il determinante del cambiamento di base, si mostri che $A_{g,\mathcal{W}} = |\delta| A_{g,\mathcal{V}}$.*

(c) *Date due applicazioni bilineari simmetriche definite positive, g ed f su V, si mostri che $B_g \subseteq B_f$ se, e solo se, $f(v,v) \leq g(v,v)$ per ogni $v \in V$.*

Svolgimento: (a). Per ogni vettore v, si ponga $\|v\|_g := \sqrt{g(v,v)}$. Dati $v, w \in B_g$ e $\lambda \in [0,1]$; allora, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha

$$\begin{aligned} g(\lambda v + (1-\lambda)w, \lambda v + (1-\lambda)w) &= \lambda^2 \|v\|_g^2 + 2\lambda(1-\lambda) g(v,w) + (1-\lambda)^2 \|w\|_g^2 \leq \\ &\leq \lambda^2 \|v\|_g^2 + 2\lambda(1-\lambda)\|v\|_g \|w\|_g + (1-\lambda)^2 \|w\|_g^2 = \\ &= (\lambda \|v\|_g + (1-\lambda)\|w\|)^2 \leq 1. \end{aligned}$$

E perciò B_g è un insieme convesso.
(b). Siano G ed H le matrici di g rispetto alle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ e sia $P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(1)$ la matrice del cambiamento di base. Allora, si ha $G = {}^tPHP$ e quindi

$$A_{g,\mathcal{V}} = \omega_n (\det G)^{-1/2} = \omega_n (\det H)^{-1/2} |\det P|^{-1} = A_{g,\mathcal{W}} |\delta|^{-1},$$

che è quanto dovevamo dimostrare.
(c). È chiaro che se $f(v,v) \leq g(v,v)$ per ogni $v \in V$, allora per ogni $x \in B_g$, si ha $f(x,x) \leq g(x,x) \leq 1$, e quindi $B_g \subseteq B_f$. Viceversa, dato $v \neq 0$, e posto $\lambda = g(v,v)^{-1/2}$, si ha $\lambda v \in B_g \subseteq B_f$, e quindi

$$1 \geq f(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 f(v,v) = \frac{f(v,v)}{g(v,v)}.$$

L'arbitrarietà di v permette di concludere. □

$^{(*)}$ Se si identifica V con lo spazio euclideo e si suppone che la base $\mathcal{V}$ sia ortonormale (rispetto alla metrica dello spazio euclideo) allora l'insieme B_g è formato dai punti interni ad un ellissoide di tale spazio ed $A_{g,\mathcal{V}}$ è proprio il volume di tale ellissoide. La costante ω_n è il rapporto tra il volume n-dimensionale di una sfera nello spazio euclideo di dimensione n e l'n-esima potenza del raggio di tale sfera. La sua determinazione precisa è $\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ ove π è il numero di Archimede e $\Gamma(z)$ è la funzione gamma di Eulero ovvero, se $Re(z) > 0$, $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$. In particolare, si ha

$$\Gamma(\frac{n}{2}+1) = \begin{cases} \Gamma(k+1) = k! & \text{se } n = 2k \\ \Gamma(\frac{1}{2}+k) = (\frac{1}{2}+k-1)(\frac{1}{2}+k-2)\cdots(\frac{1}{2})\sqrt{\pi} & \text{se } n = 2k-1 \end{cases}$$

per $n \geq 1$. Da cui si deducono gli usuali valori: $\omega_2 = \pi$, $\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$, ecc.

ESERCIZIO 4 *Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si consideri l'applicazione bilineare simmetrica g, di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.
(a) *Si determini l'indice di inerzia di g.*

Si dica quale tra le seguenti affermazioni è vera e si determini una base soddisfacente alle condizioni ivi descritte.
(b_1) *Vi è una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ relativamente a g.*
(b_2) *Vi è una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui g ha matrice* $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0 \end{pmatrix}$.
(b_3) *Vi è una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui g ha matrice* $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$.

Svolgimento: Si osservi che i sottospazi $W_1 = L(e_1, e_3)$ e $W_2 = L(e_2, e_4)$ sono mutuamente ortogonali e le matrici della restrizione di g a tali sottospazi sono $G_1 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ e $G_2 = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ rispettivamente. In ambedue i casi g e non-degenere e non-definita e quindi $i(g) = 0$. Più esplicitamente, prendendo una base ortogonale di ciascuno dei due sottospazi, si costruisce una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$. Ad esempio, si consideri la base $\{e_1, 3e_1 + 4e_3, e_2, 4e_2 + 3e_4\}$.

L'unica affermazione compatibile con il valore di $i(g)$ è (b_2). Per trovare una base del tipo richiesto, lavoriamo sui due sottospazi W_1 e W_2. Un vettore $ae_1 + be_3$ è isotropo se, e solo se, $4a^2 - 6ab - 4b^2 = 0$; dunque una base di W_1 rispetto a cui la restrizione di g abbia matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è $\{2e_1 + e_3, \frac{1}{15}(2e_3 - e_1)\}$. Una analoga base di W_2 è $\{3e_2 + e_4, \frac{1}{100}(3e_4 - e_2)\}$. □

ESERCIZIO 5 *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una base $\{v_1, \dots, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui ϕ abbia matrice J.

Svolgimento: Il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ sono $p_\phi(X) = (X + 2)(X - 4)^3$ e $\lambda_\phi(X) = (X + 2)(X - 4)^2$, rispettivamente. Una matrice di Jordan di ϕ è

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che è la matrice di ϕ relativamente alla base $\{e_2 - e_3, e_1 - e_2 + 2e_4, e_4, e_1 + e_2\}$. □

ESERCIZIO 6 *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Inoltre siano dati dei sottospazi $W_1, \dots, W_r$, di dimensione positiva, tali che ϕ induca un endomorfismo su ciascuno di tali spazi e $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$.*

Si dica quali tra le seguenti asserzioni sono vere e quali sono false, giustificando la propria scelta,

(a) *Il polinomio caratteristico di ϕ è il prodotto dei polinomi caratteristici delle restrizioni $\phi_{|W_i}$ per $i = 1, \dots, r$.*

(b) *Il polinomio minimo di ϕ è il prodotto dei polinomi minimi delle restrizioni $\phi_{|W_i}$ per $i = 1, \dots, r$.*

(c) *Il polinomio minimo di ϕ è il massimo comun divisore dei polinomi minimi delle restrizioni $\phi_{|W_i}$ per $i = 1, \dots, r$.*

(d) *Il polinomio minimo di ϕ è il minimo comune multiplo dei polinomi minimi delle restrizioni $\phi_{|W_i}$ per $i = 1, \dots, r$.*

Svolgimento: L'affermazione (a) è vera. Infatti, se si costruisce una base di V ponendo una di seguito all'altra, delle basi dei sottospazi $W_1, \dots, W_r$, la matrice di ϕ rispetto a tale base è costituita da blocchi diagonali, ottenuti dalla restrizione di ϕ ai vari sottospazi W_i, per $i = 1, \dots, r$. Risulta da ciò che il polinomio caratteristico di ϕ è il prodotto dei polinomi caratteristici delle restrizioni $\phi_{|W_i}$ per $i = 1, \dots, r$.

Le affermazioni (b) e (c) sono entrambe false, come si può verificare facilmente dal seguente esempio. Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ una sua base. Si consideri l'endomorfismo $\phi : V \to V$ che ha matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, rispetto alla base data. Allora, posto $W_1 = \langle v_1 \rangle$ e $W_2 = \langle v_2, v_3 \rangle$, si ha che ϕ induce un endomorfismo su ciascuno dei sottospazi W_i, $i = 1, 2$, e che $V = W_1 \oplus W_2$. Si verifica facilmente che $(X - 2)^2$ è il polinomio minimo di ϕ e che non è né il prodotto, né il massimo comun divisore dei polinomi minimi delle restrizioni $\phi_{|W_i}$ per $i = 1, 2$.

L'affermazione (d) è vera. Considerando la matrice a blocchi diagonali di ϕ, descritta nella prima parte di questo svolgimento, si vede che le potenze successive di tale matrice sono ancora a blocchi diagonali, contenenti le potenze dei singoli blocchi e quindi un polinomio annulla la matrice data se, e solo se, annulla separatamente tutti i blocchi. Ciò permette di concludere. □

ESERCIZIO 7 *Nello spazio euclideo tridimensionale, si determini l'equazione del luogo dei punti appartenenti alle rette distanti 1 dal punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e formanti un angolo pari a $\pi/3$ con i piani $\pi_1 : x + y = 0$ e $\pi_2 : x - z = 0$.*

Svolgimento: I vettori normali a π_1 e π_2 sono, rispettivamente, $n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $n_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, che formano tra loro un angolo pari a $\frac{\pi}{3}$. Le rette che formano un angolo pari a $\frac{\pi}{3}$ con i piani π_1 e π_2, formano un angolo pari a $\frac{\pi}{6}$ con i vettori n_1 ed n_2. Si scopre che c'è un solo vettore, a meno di moltiplicazione per scalari, che soddisfa a tali condizioni: si tratta del vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Le rette in questione sono allora del tipo:

$$r : S + tv, \quad \text{ove } S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

tali che $dist(r, P) = 1$. Imponendo la condizione $dist(r, P)^2 = 1$, si ottiene l'equazione

$$29 - 8x + 2x^2 - 10y - 4xy + 5y^2 - 26z + 4xz + 2yz + 5z^2 = 0,$$

che rappresenta un cilindro con asse passante per il punto P e parallelo al vettore v. □

ESERCIZIO 8 *Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino il punto* $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e la circonferenza* $\mathcal{C}$ *del piano* $\pi : z = 0$*, centrata nell'origine e di raggio 3.*

(a) Si scriva l'equazione cartesiana del cono $\mathcal{Q}$*, che proietta la circonferenza* $\mathcal{C}$ *dal vertice* V*.*

(b) Data la retta r*, di equazioni cartesiane* $\begin{cases} y + z = 2 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$*, si determinino i piani* σ_1 *e* σ_2 *passanti per* r *e per i punti* $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*, rispettivamente.*

(c) Si classifichino, dal punto di vista affine, le coniche che si ottengono intersecando $\mathcal{Q}$ *con i piani* σ_1 *e* σ_2 *rispettivamente.*

Svolgimento: (a). Sia $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un generico punto dello spazio affine, distinto da V, e sia $X_\lambda = V + \lambda(X - V)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, un punto della retta per X e V. Tale retta interseca il piano π quando $\lambda = \frac{2}{2-z}$, nel punto di coordinate $\begin{pmatrix} \frac{z-2x}{z-2} \\ \frac{2(y+x)}{2-z} \\ 0 \end{pmatrix}$, che appartiene alla circonferenza $\mathcal{C}$ se, e solo se, $(\frac{z-2x}{z-2})^2 + (\frac{2(y+x)}{2-z})^2 = 9$; quindi il cono $\mathcal{Q}$ ha equazione

$$\mathcal{Q} : (2x - z)^2 + 4(y + z)^2 - 9(z - 2)^2 = 0.$$

(b). Il fascio di piani passanti per r ha equazioni $\lambda(y + z - 2) + \mu(2x - z) = 0$, al variare dei parametri omogenei (λ, μ). Imponendo la condizione di passaggio per i punti P_1 e P_2 si ottiene

$$\sigma_1 : y + z = 2 \qquad \text{e} \qquad \sigma_2 : 2x - z = 0.$$

(c). Si pensi lo spazio affine immerso nel modo usuale nello spazio proiettivo. La classificazione affine delle coniche $\mathcal{Q} \cap \sigma_1$ e $\mathcal{Q} \cap \sigma_2$, si ottiene studiando l'intersezione tra tali coniche e le rette improprie dei piani in questione, ovvero, considerando le soluzioni dei sistemi di equazioni omogenee

$$c_1 : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_0 = 0 \\ (2x_1 - x_3)^2 + 4(x_2 + x_3)^2 - 9(x_3 - 2x_0)^2 = 0 \end{cases}$$

e

$$c_2 : \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ (2x_1 - x_3)^2 + 4(x_2 + x_3)^2 - 9(x_3 - 2x_0)^2 = 0 \end{cases}.$$

In entrambo i casi si tratta di due punti reali della retta impropria e quindi le due coniche $\mathcal{Q} \cap \sigma_1$ e $\mathcal{Q} \cap \sigma_2$ sono due iperboli. Poichè il piano σ_2 contiene il vertice V del cono $\mathcal{Q}$, la conica $\mathcal{Q} \cap \sigma_2$ è degenere e quindi è il prodotto di due rette reali distinte. □

ESERCIZIO 9 *Si studi la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : x + y - 2y^2 - 3xy = 0.$$

Svolgimento: Supponiamo il piano euclideo immerso nel piano proiettivo scegliendo come retta impropria la retta $x_0 = 0$ ed utilizziamo indifferentemente coordinate omogenee e le corrispondenti coordinate affini. La conica $\mathcal{C}$ è quindi un'iperbole, con centro nel punto $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/9 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, ed i suoi asintoti sono le rette $a_1 : 3y-1 = 0$ ed $a_2 : 9x+6y-1 = 0$. Gli assi di $\mathcal{C}$ sono le rette $h_1 : 9x-3(2+\sqrt{13})y+(3+\sqrt{13}) = 0$ ed $h_2 : 9x - 3(2 - \sqrt{13})y + (3 - \sqrt{13}) = 0$, e la retta h_2 contiene i vertici e quindi i fuochi (reali) dell'iperbole. L'equazione canonica dell'iperbole è $\frac{9(\sqrt{13}+2)}{2}x^2 - \frac{9(\sqrt{13}-2)}{2}y^2 = 1$. □

ESERCIZIO 10 *Sia $\mathcal{C}$ una parabola del piano euclideo e sia d la sua direttrice. Si mostri che, fissato comunque un punto P di d, le tangenti a $\mathcal{C}$ uscenti da P sono tra loro perpendicolari.*

Svolgimento: Supponiamo il piano euclideo immerso nel modo usuale nel piano proiettivo e fissiamo un riferimento ortonormale rispetto a cui la parabola $\mathcal{C}$ abbia matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con ($a > 0$). Allora la direttrice di $\mathcal{C}$ è la retta di coordinate plückeriane $(1, 0, 2a)$ ed i suoi punti X_t han coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1/2a \end{pmatrix}$, al variare di t in $\mathbb{R}$. Le rette del fascio per X_t hanno coordinate plückeriane $r_{(\lambda,\mu)} = \lambda(-t, 0, 1) + \mu(1, 0, 2a)$, al variare dei parametri omogenei (λ, μ) e la retta $r_{(\lambda,\mu)}$ è tangente alla parabola se, e solo se,

$$r_{(\lambda,\mu)} A^{-1}\,{}^t r_{(\lambda,\mu)} = a^{-1}\lambda^2 - 4a\mu(\mu - \lambda t) = 0$$

(cf. l'Esercizio 8 del 22 settembre 1995). Dunque, le due rette tangenti del fascio per X_t hanno coordinate plückeriane

$$r_1 = (1 - 2at(at + \sqrt{a^2t^2 + 1}), 2a(at + \sqrt{a^2t^2 + 1}), 2a)$$
$$r_2 = (1 - 2at(at - \sqrt{a^2t^2 + 1}), 2a(at - \sqrt{a^2t^2 + 1}), 2a)$$

e sono ortogonali, perchè

$$r_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^t r_2 = 0.$$

□

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica

prova scritta del 23 luglio 1996 .

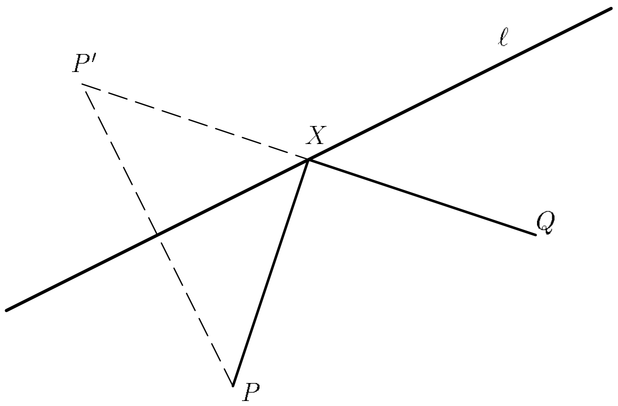
ESERCIZIO 1 *Sia ℓ una retta del piano euclideo e siano P e Q due punti distinti, giacenti sullo stesso semipiano rispetto ad ℓ.*

(a) Si mostri che esiste un unico punto $X \in \ell$ tale che la somma delle distanze $\|P - X\| + \|X - Q\|$ sia minima.

(b) Si mostri che i vettori $P - X$ e $Q - X$ formano angoli (non-orientati) uguali con la retta ℓ.(*)

(c) Si determini il punto X descritto in (a) e l'angolo (non-orientato) tra $P - X$e la retta ℓ nel caso in cui $\ell : x - y = 1$, $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Svolgimento: (a.) Si consideri il punto P', simmetrico di P rispetto ad ℓ e sia X il punto di intersezione tra la retta ℓ e la retta $P' + Q$, come illustrato nello schizzo sottostante.



Allora la somma delle distanze $\|P - X\| + \|X - Q\|$ è uguale alla distanza $\|P' - Q\|$, che è minore della somma $\|P - Y\| + \|Y - Q\|$, qualunque sia il punto Y della retta ℓ, in base alla disuguaglianza triangolare.

(b). L'angolo (non orientato) tra $P' - X$ ed ℓ è uguale all'angolo tra $P - X$ ed ℓ perchè si corrispondono in un'isometria. Inoltre, l'angolo tra $P' - X$ ed ℓ è uguale all'angolo tra $X - Q$ ed ℓ perchè P', Q ed X sono allineati.

(c). Nel caso in questione $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e l'angolo tra $P - X$ ed ℓ è di $\pi/4$. □

(*) L'esercizio proposto ha un'interpretazione 'fisica': infatti si può pensare al percorso PXQ come al cammino di un raggio di luce che parte da P e giunge a Q dopo una riflessione sullo 'specchio' rappresentato dalla retta ℓ. È ben noto che il raggio incidente ed il raggio riflesso formano angoli uguali con la superficie riflettente e che il cammino percorso deve avere lunghezza minima. Segnaliamo poi un'analoga interpretazione fisica del problema proposto, identificando i punti P e Q come due palline e la retta ℓ come un lato del tavolo da biliardo, in tal caso il punto X rappresenta il punto verso cui lanciare la pallina P per colpire prima il lato e poi la pallina Q.

ESERCIZIO 2 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C. Dati comunque due vettori v^* e w^* appartenenti allo spazio duale V^*, si consideri l'applicazione*

$$\begin{aligned} v^* \wedge w^* : & V \times V \to C \\ & (x, y) \mapsto (v^* \circ x)(w^* \circ y) - (w^* \circ x)(v^* \circ y) \end{aligned}$$

(a) Si mostri che $v^* \wedge w^*$ è un'applicazione bilineare alternante e si verifichi che per ogni coppia di vettori $v^*, w^* \in V^*$ e per ogni costante $c \in C$, si ha $(cv^*) \wedge w^* = c(v^* \wedge w^*) = v^* \wedge (cw^*)$ e $v^* \wedge w^* = -w^* \wedge v^*$.[(†)]

(b) Si mostri che le applicazioni $v_1^* \wedge w_1^* \neq 0 \neq v_2^* \wedge w_2^*$ sono proporzionali se, e solo se, $L(v_1^*, w_1^*) = L(v_2^*, w_2^*)$ in V^*.

(c) Nel caso in cui $\dim V = 4$, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ è una base di V e $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_4^*\}$ è la relativa base duale, si scriva la matrice dell'applicazione bilineare $v^* \wedge w^*$, ove $v^* = 2v_1^* - v_3^* + v_4^*$ e $w^* = v_1^* - 3v_2^* - v_3^*$.

Svolgimento: (a). La verifica che $v^* \wedge w^*$ sia un'applicazione bilineare si ottiene da un facile calcolo diretto; inoltre,

$$v^* \wedge w^*(x, x) = (v^* \circ x)(w^* \circ x) - (w^* \circ x)(v^* \circ x) = 0,$$

qualunque sia il vettore $x \in V$ e quindi l'applicazione è alternante. Infine, si osservi che, qualunque siano i vettori $x, y \in V$, si ha

$$v^* \wedge w^*(x, y) = (v^* \circ x)(w^* \circ y) - (w^* \circ x)(v^* \circ y) = -w^* \wedge v^*(x, y),$$

che conclude la verifica.

(b). Se $L(v_1^*, w_1^*) = L(v_2^*, w_2^*)$, allora esistono delle costanti tali che $v_2^* = a_{11}v_1^* + a_{21}w_1^*$ e $w_2^* = a_{12}v_1^* + a_{22}w_1^*$. Si deduce che, qualunque siano i vettori $x, y \in V$, si ha

$$\begin{aligned} v_2^* \wedge w_2^*(x, y) &= [(a_{11}v_1^* + a_{21}w_1^*) \circ x][(a_{12}v_1^* + a_{22}w_1^*) \circ y] - \\ &\quad - [(a_{12}v_1^* + a_{22}w_1^*) \circ x][(a_{11}v_1^* + a_{21}w_1^*) \circ y] = \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})[v_1^* \wedge w_1^*(x, y)] \end{aligned}$$

(†) L'applicazione bilineare alternante $v^* \wedge w^*$ è detta il *prodotto esterno* delle forme lineari v^* e w^*. Si potrebbe mostrare che, data una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ dello spazio V e la rispettiva base duale $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ di V^*, l'insieme $\left\{ v_i^* \wedge v_j^* \,|\, 1 \leq i < j \leq n \right\}$ è una base dello spazio $A^2(V)$ delle applicazioni bilineari alternanti su V. In particolare, il lettore può verificare che si tratta proprio della base di $A^r(V)$ descritta nel *Corollario 3.1.8* del testo, nel caso in cui $r = 2$. La definizione di prodotto esterno può essere estesa a più forme lineari, ovvero, dati $w_1^*, \dots, w_r^* \in V^*$, si definisce l'applicazione r-lineare alternante

$$\begin{aligned} w_1^* \wedge \cdots \wedge w_r^* : & \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r \text{ copie}} \to C \\ & (x_1, \dots, x_r) \mapsto \sum_{\sigma \in \Sigma_r} (\operatorname{sgn} \sigma)(w_1^* \circ x_{\sigma(1)}) \cdots (w_r^* \circ x_{\sigma(r)}) \end{aligned}$$

dove Σ_r indica l'insieme delle permutazioni su r oggetti. Anche in questo caso, con le notazioni fissate sopra, l'insieme $\left\{ v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_r}^* \,|\, 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n \right\}$ è la base dello spazio $A^r(V)$ descritta nel citato Corollario.

Si ponga $A^0(V) = C$ ed $A^1(V) = V^*$, allora il prodotto così definito per gli elementi della base $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ di V^* si può estendere per linearità ad un prodotto, compatibile con la moltiplicazione per costanti, su tutto l'insieme

$$A(V) = \bigoplus_{r=0}^{\dim V} A^r(V)$$

che rende $A(V)$ una C-algebra associativa e non-commutativa, detta l'*algebra esterna* su V^* ed usualmente indicata col simbolo $\Lambda(V^*)$. Per dualità si può definire in modo analogo l'algebra $\Lambda(V)$. Per una descrizione dell'algebra esterna a partire dall'algebra tensoriale, si veda la §.3 del Capitolo 5 del testo.

e quindi le due applicazioni bilineari sono proporzionali. Viceversa, se uno almeno tra v_2^* e w_2^* non appartiene a $L(v_1^*, w_1^*)$ –sia v_2^*–, allora i vettori v_1^*, w_1^*, v_2^*, fanno parte di una base di V^* ed indichiamo con v_1, w_1, v_2 i corrispondenti elementi della base duale di V. Allora, si ha

$$v_2^* \wedge w_2^*(v_1, w_1) = 0 \qquad \text{e} \qquad v_1^* \wedge w_1^*(v_1, w_1) = 1$$

e quindi, essendo $v_2^* \wedge w_2^* \neq 0$, le due applicazioni non possono essere proporzionali.

(c). L'applicazione data ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -3, -1, 0) - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (2, 0, -1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 2 e quindi l'applicazione bilineare $v^* \wedge w^*$ è degenere. □

ESERCIZIO 3 *Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 e $g : V \times V \to \mathbb{R}$ un'applicazione bilineare simmetrica, non-degenere. Si mostri che $i(g) = 0$ se, e solo se, esistono in V vettori isotropi non nulli e ogni sottospazio isotropo di dimensione 1 è intersezione di due sottospazi isotropi di dimensione 2.*

Svolgimento: È chiaro che, se V ha sottospazi isotropi di dimensione 2, allora $i(g) = 0$. Viceversa, se $i(g) = 0$ e v_1 è un vettore isotropo non nullo di V, è sufficiente mostrare che esistono dei vettori v_2, v_3, v_4 tali che $\{v_1, \dots, v_4\}$ sia una base di V e la matrice di g rispetto a tale base sia $\left(\begin{smallmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{smallmatrix}\right)$. In tal caso, si ha $L(v_1) = L(v_1, v_3) \cap L(v_1, v_4)$ e quindi $L(v_1)$ è intersezione di due sottospazi isotropi di dimensione 2.

Dato v_1 isotropo e non nullo, la costruzione dei vettori v_2, v_3, v_4, procede così. Il vettore v_2 è isotropo e non ortogonale a v_1 e quindi g induce sul sottospazio $L(v_1, v_2)$ un'applicazione bilineare non-degenere con indice di inerzia 0. Anche sul sottospazio $L(v_1, v_2)^\perp$ resta indotta un'applicazione bilineare non-degenere con indice di inerzia 0 e quindi è possibile trovare una base $\{v_3, v_4\}$ di $L(v_1, v_2)^\perp$, rispetto a cui la restrizione di g abbia matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0&1 \\ 1&0 \end{smallmatrix}\right)$. Ciò conclude la dimostrazione. □

ESERCIZIO 4 *Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione 5 e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si consideri l'applicazione bilineare simmetrica $g : V \times V \to \mathbb{R}$ che, rispetto alla base data, ha matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & -6 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -6 & 6 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si verifichi che g è degenere e si determini il suo nucleo

$$K = \{\, v \in V \mid g(v, x) = 0 \, \forall x \in V \,\}.$$

(b) Si fissi un sottospazio W complementare al nucleo ($V = W \oplus K$), si mostri che la restrizione a $W \times W$ di g è non-degenere e si dica se W diviene, in tal modo, isometrico allo Spazio di Minkowski.

Svolgimento: (a). Il vettore $v = v_3 + v_5$ è un generatore di K, essendo

$$(0,0,1,0,1)G = (0,0,0,0,0) \quad \text{e} \quad \operatorname{rk} G = 4.$$

Dunque $K = L(v)$.

(b). Il sottospazio $W = L(v_1, \dots, v_4)$ è un complementare del nucleo (ovvero $W \cap K = (0)$ e $V = W + K$) e la matrice della restrizione di g a $W \times W$ si ottiene da G cancellando l'ultima riga e l'ultima colonna. Si può verificare che i vettori

$$w_1 = v_1 + v_2, \quad w_2 = v_3, \quad w_3 = 2v_2 - v_4, \quad w_4 = v_2$$

formano una base ortogonale di W, relativamente a g, rispetto a cui g ha matrice

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dunque la restrizione di g a $W \times W$ ha indice di inerzia 2 e rende W isometrico allo Spazio di Minkovski.(*) □

ESERCIZIO 5 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e sia $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Un sottospazio W di V si dice ϕ-semplice (o semplice(**), sottintendendo ϕ) se $\phi(W) \subseteq W$ e gli unici sottospazi di W su cui ϕ induce un endomorfismo sono (0) e W.*

(a) *Si mostri che lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con l'endomorfismo ϕ, di matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ rispetto alla base canonica, è semplice.*

(b) *Sia C un campo algebricamente chiuso e siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Si mostri che ogni sottospazio semplice di V ha dimensione 1.*

(c) *Siano C un campo algebricamente chiuso, V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Si mostri che V è somma diretta di sottospazi semplici (ovvero è semisemplice) se, e solo se, ϕ è diagonalizzabile.*

Svolgimento: (a). Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(t) = \det(A - t\mathbf{1}) = t^2 + 1$, dunque non vi sono sottospazi propri di $\mathbb{R}^2$ su cui ϕ induca un endomorfismo, perchè tali sottospazi dovrebbero avere dimensione 1 e quindi essere generati da autovettori per ϕ e tali vettori non esistono in $\mathbb{R}^2$.

(b). Poichè C è algebricamente chiuso, l'endomorfismo ϕ ammette almeno un autovettore $v \neq 0$ e quindi ϕ induce un endomorfismo sul sottospazio $L(v) \neq (0)$. Se V è semplice relativamente a ϕ, si deduce $L(v) = V$ e quindi la tesi.

(c). Se ϕ è diagonalizzabile, allora esiste una base di autovettori per V e V è somma diretta dei sottospazi di dimensione 1 (e quindi semplici) generati dai vettori di tale base. Viceversa, se V è somma diretta di sottospazi semplici, discende dal punto precedente che ciascuno di tali sottospazi ha dimensione 1 ed è quindi generato da un autovettore relativo a ϕ. Si conclude che esiste una base di autovettori per V e quindi che ϕ è diagonalizzabile. □

(*) Il lettore è invitato a riflettere sul fatto che il risultato *non* dipende dalla scelta del sottospazio W, ovvero che sui complementari del nucleo K restano indotte applicazioni bilineari tra loro isometriche ed a dare una dimostrazione rigorosa di tale fatto.

(**) Le notazioni qui introdotte, vengono dall'ambito della teoria dei moduli su un anello. Infatti, aver fissato un endomorfismo $\phi : V \to V$, determina una struttura di $C[X]$-modulo sul gruppo V (cf. il testo §.2.4 e §.6.6) ed i sottospazi vettoriali W di V che siano ϕ-invarianti (ovvero tali che $\phi(W) \subseteq W$) sono i sottomoduli di V. Un modulo si dice *semplice* se non ha sottomoduli propri. Un modulo che sia somma diretta di sottomoduli semplici si dice *semisemplice*.

ESERCIZIO 6 *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una base $\{v_1, \dots, v_5\}$ di $\mathbb{Q}^5$ rispetto a cui ϕ abbia matrice J.

Svolgimento: Posto

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

si ha $AP = PJ$. Se ne deduce che J è una matrice di Jordan per ϕ e che le colonne della matrice P forniscono una base rispetto a cui ϕ ha matrice J. Inoltre, il polinomio minimo ed polinomio caratteristico di ϕ sono, rispettivamente

$$e_\phi(X) = (X+2)^2(X-3)^2 \qquad \text{e} \qquad p_\phi(X) = (X+2)^3(X-3)^2.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 7 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{Q}$ e sia $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare, rispetto a cui V è semplice, ovvero tale che gli unici sottospazi di V su cui ϕ induca un endomorfismo siano (0) e V.*

(a) Si mostri che, preso un vettore non nullo $v \in V$, l'insieme $\{v, \phi(v), \dots, \phi^{n-1}(v)\}$ è una base di V.

(b) Si scrivano la matrice di ϕ rispetto a tale base, il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ.

Svolgimento: (a). Se i vettori $\{v, \phi(v), \dots, \phi^j(v)\}$ fossero linearmente dipendenti, per qualche $j < n-1$, allora il sottospazio $W = L(v, \phi(v), \dots, \phi^j(v))$ sarebbe un sottospazio proprio di V su cui ϕ induce un endomorfismo, il che contraddice l'ipotesi che V sia semplice relativamente a ϕ.

(b). Per quanto visto nel punto precedente, esistono delle costanti $a_1, \dots, a_n$ tali che $\phi^n(v) = a_1\phi^{n-1}(v) + \cdots + a_n v$ e quindi la matrice di ϕ rispetto alla base data è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_n \\ 1 & 0 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_1 \end{pmatrix},$$

da cui si deduce che il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(X) = X^n - a_1X^{n-1} - \cdots - a_n$, che coincide con il polinomio minimo perché, altrimenti,indicato con j il grado di tale polinomio e preso un qualunque vettore v, i vettori $\{v, \phi(v), \dots, \phi^j(v)\}$ sarebbero linearmente dipendenti il che non è possibile se $j < n$. □

ESERCIZIO 8 *Sia C un punto dello spazio euclideo (n-dimensionale) E^n e si indichi con σ_C la simmetria centrale di centro C, ovvero l'affinità che associa ad ogni punto $X \neq C$ il punto $\sigma_C(X) \neq X$, appartenente alla retta $X + C$, e tale che $\|\sigma_C(X) - C\| = \|X - C\|$.*

(a) Indicate con $\begin{pmatrix} 1 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ le coordinate affini del punto C (rispetto ad un riferimento ortonormale), si scriva la matrice dell'affinità σ_C e si verifichi che si tratta di un'isometria.

(b) Sia $\Pi \neq \emptyset$ un poligono chiuso e limitato del piano euclideo. È possibile che si abbia $\sigma_C(\Pi) = \Pi$ per due simmetrie centrali con centri distinti?

Svolgimento: (a). Dato un punto $X \in E^n$, si ha $X = C+(X-C)$ e quindi $\sigma_C(X) = C+(C-X)$, in quanto il centro di simmetria resta invariato, mentre il vettore $X - C$ viene mandato nel suo opposto. Se ne deduce che la matrice di σ_C è uguale a

$$S_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2c_1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2c_n & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

(b). Se una figura piana è invariante per due trasformazioni, lo è anche per la composizione di tali trasformazioni. Si verifica facilmente, ad esempio facendo il prodotto delle matrici corrispondenti, che la composizione di due simmetrie σ_C e σ_D è una traslazione, parallela al vettore $C - D$. Se i centri C e D sono distinti il vettore $C - D$ è diverso dal vettore nullo ed è impossibile che una figura piana limitata sia invariante per una traslazione non nulla. □

ESERCIZIO 9 *Nel piano euclideo, immerso nel modo usuale nel piano proiettivo, si studi la conica di equazione*

$$\mathcal{C} : 13(x^2 + y^2) + 10xy + 8(x - y) = 68.$$

Svolgimento: La conica $\mathcal{C}$ è un'ellisse (non-degenere) con punti reali. Il suo centro è il punto $C = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ e gli assi sono le rette $h_1 : x + y = 0$ (asse focale) ed $h_2 : x - y + 1 = 0$ (asse trasverso). La matrice canonica di $\mathcal{C}$ è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Ogni altra informazione su $\mathcal{C}$ si può facilmente dedurre da questi dati. □

ESERCIZIO 10 *Sia $\mathcal{C}$ una parabola (non-degenere) del piano euclideo e sia F il suo fuoco. Si mostri che, presa comunque una retta r, passante per F, la retta passante per F e per il polo di r è perpendicolare ad r.*[(*)]

Svolgimento: Supponiamo che il piano euclideo sia immerso nel modo usuale nel piano proiettivo e di aver scelto un riferimento ortonormale per cui la parabola abbia matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, per un opportuno $a \neq 0$. In tal caso il fuoco F ha coordinate $F = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2a} \end{pmatrix}$ ed una generica retta per il fuoco ha coordinate plückeriane $r_{(\lambda,\mu)} = \lambda(0,1,0) + \mu(-1,0,2a)$, al variare dei parametri omogenei (λ,μ). Il polo di $r_{(\lambda,\mu)}$ è il punto $R_{(\lambda,\mu)} = A^{-1\,t}r_{(\lambda,\mu)} = \begin{pmatrix} -2a\mu \\ \lambda/a \\ \mu \end{pmatrix}$. Dunque, la retta passante per F ed il polo di $r_{(\lambda,\mu)}$ ha coordinate plückeriane $r'_{(\lambda,\mu)} = (\lambda, 4a^2\mu, -2a\lambda)$ ed è quindi ortogonale ad $r_{(\lambda,\mu)}$ perchè

$$r'_{(\lambda,\mu)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^t r_{(\lambda,\mu)} = 0.$$

□

(*) I fuochi di una conica possono essere definiti come quei centri C di fasci di rette su cui l'involuzione indotta dalla conica –ovvero la corrispondenza che ad una retta r, passante per C, fa corrispondere la retta per C ed il polo di r–, coincide con l'involuzione degli angoli retti –ovvero la corrispondenza che ad una retta r, passante per C, fa corrispondere la perpendicolare ad r passante per C. Ciò discende dal fatto che, nel caso dei fasci di rette centrate nei fuochi, le due involuzioni in questione hanno i medesimi punti uniti e questi sono sufficienti per determinare un'involuzione di una retta o di un fascio di rette (perchè?).

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica

prova scritta del 2 settembre 1996 .

ESERCIZIO 1 *Sia $f : \mathbb{P}^1(C) \to \mathbb{P}^1(C)$ una proiettività che ammette due punti fissi distinti P e Q. Si mostri che, per ogni punto $X \in \mathbb{P}^1(C) \setminus \{P, Q\}$, il birapporto $(P, Q, X, f(X)) = k$ è indipendente dalla scelta di X. Osservato che l'insieme $S(f) = \{k, k^{-1}\}$ dipende solo dalla proiettività f, si mostri che $S(f) = S(f^{-1})$.*

Svolgimento: Siano $P = \sigma\langle v\rangle$ e $Q = \sigma\langle w\rangle$, allora, per le ipotesi fatte, v e w sono due autovettori linearmente indipendenti per l'applicazione lineare $\phi : C^2 \to C^2$, soprastante ad f. Siano λ e μ gli autovalori corrispondenti. Allora, dato un qualsiasi punto $X = \sigma\langle x\rangle$, diverso da P e Q, si ha $x = av+bw$ con $a \neq 0 \neq b$ ed $f(X) = \sigma\langle\phi(x)\rangle$. Quindi, essendo $P = \sigma\langle av\rangle$, $Q = \sigma\langle bw\rangle$, $X = \sigma\langle av + bw\rangle$ ed $f(x) = \sigma\langle\lambda av + \mu bw\rangle$, in base alla definizione di birapporto, si ha $(P, Q, X, f(X)) = \dfrac{\lambda}{\mu} = k$, e dunque, essendo uguale al rapporto tra gli autovalori di ϕ, tale birapporto non dipende né dalla scelta del punto X, né dalla scelta dell'applicazione lineare soprastante ad f.

Poichè, scambiando tra loro i punti uniti, si ha $(Q, P, X, f(X)) = \dfrac{\mu}{\lambda} = k^{-1}$, si deduce che l'insieme $S(f) = \{k, k^{-1}\}$ dipende solo dalla proiettività f. Infine, poichè la proiettività f^{-1} ha l'applicazione lineare ϕ^{-1} come soprastante, e quest'ultima ha gli stessi autovettori di ϕ e le costanti λ^{-1}, μ^{-1} come autovalori, si deduce che $S(f) = S(f^{-1})$. □

ESERCIZIO 2 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C. Dati comunque due vettori v^* e w^* appartenenti allo spazio duale V^*, si consideri l'applicazione*[(†)]

$$\begin{aligned} v^* \otimes w^* : & V \times V \to C \\ & (x, y) \mapsto (v^* \circ x)(w^* \circ y) \end{aligned}$$

(a) *Si mostri che $v^* \otimes w^*$ è un'applicazione bilineare e si verifichi che si ha*
- *$(cv^*) \otimes w^* = c(v^* \otimes w^*) = v^* \otimes (cw^*)$, per ogni coppia di vettori $v^*, w^* \in V^*$ e per ogni costante $c \in C$;*
- *$u^* \otimes (v^* + w^*) = (u^* \otimes v^*) + (u^* \otimes w^*)$ e $(u^* + v^*) \otimes w^* = (u^* \otimes w^*) + (v^* \otimes w^*)$ per ogni terna di vettori $u^*, v^*, w^* \in V^*$*

(b) *Nel caso in cui $\dim V = 4$, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ è una base di V e $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_4^*\}$ è la relativa base duale, si scriva la matrice dell'applicazione bilineare simmetrica $v^* \otimes w^* + w^* \otimes v^*$, ove $v^* = 2v_1^* - v_3^* + v_4^*$ e $w^* = v_1^* - 3v_2^* - v_3^*$ e si verifichi che il suo nucleo è uguale ad $L(v^*, w^*)^\perp$.*

(c) *Nel caso in cui $\dim V = 4$, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ è una base di V e $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_4^*\}$ è la relativa base duale, si mostri che ogni applicazione bilineare si scrive in modo unico come combinazione lineare delle applicazioni $v_i^* \otimes v_j^*$ per $1 \leq i, j \leq 4$.*

(†) L'applicazione bilineare $v^* \otimes w^*$ è detta il *prodotto tensoriale* delle forme lineari v^* e w^*. Questo prodotto [cf. il punto (a)] è compatibile con il prodotto per costanti e distribuisce rispetto alla somma di V^*. Dati comunque r vettori $v_1^*, \dots, v_r^* \in V^*$, si definisce l'applicazione r-lineare

$$\begin{aligned} v_1^* \otimes \cdots \otimes v_r^* : & V \times \cdots \times V \to C \\ & (x_1, \dots, x_r) \mapsto (v_1^* \circ x_1) \cdots (v_r^* \circ x_r). \end{aligned}$$

Si può mostrare in modo analogo a quanto esposto in (c) che, se $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ è una base di V^*, allora i prodotti $v_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes v_{i_r}^*$, ove $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$ formano una base dello spazio vettoriale delle applicazioni r-lineari su V, qualunque sia l'intero positivo r.

Svolgimento: (a). La verifica delle proprietà dell'enunciato si ottiene con il calcolo delle varie applicazioni dell'enunciato su una coppia di elementi generici di V.

(b). La matrice cercata è

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -3, -1, 0) + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (2, 0, -1, 1) = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -3 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Discende immediatamente che, se $x \in L(v^*, w^*)^\perp \subset V$, allora x appartiene al nucleo di $v^* \otimes w^* + w^* \otimes v^*$ e quindi i due spazi coincidono perchè hanno la stessa dimensione.

(c). Se $g : V \times V \to C$ ha matrice $G = (g_{ij})_{1 \le i,j \le 4}$ rispetto alla base $\mathcal{V}$, si verifica con un calcolo diretto che $g = \sum_{1 \le i,j \le 4} g_{ij} v_i^* \otimes v_j^*$. Inoltre, gli elementi dell'insieme $\{ v_i^* \otimes v_j^* \mid 1 \le i, j \le 4 \}$ sono esattamente $4^2 = \dim \mathrm{Hom}_C(V, V^*)$ e quindi sono una base dell'insieme delle applicazioni bilineari di $V \times V$ su C. □

ESERCIZIO 3 *Al variare di n tra gli interi positivi, si indichi con B_n la matrice quadrata di ordine n del tipo*

$$B_n = \begin{pmatrix} 2a & a & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a & 2a & a & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & a & 2a & a & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a & 2a & a & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & a & 2a & a \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a & 2a \end{pmatrix},$$

ove a è una costante reale.

Si scriva in modo esplicito $\delta_n(a) := \det B_n$ quale funzione della variabile a e si dia una condizione necessaria e sufficiente su a affinchè esista finito $\lim_{n \to \infty} \delta_n(a)$.

Svolgimento: Con calcoli diretti si ha $\delta_1 = 2a$ e $\delta_2 = 3a^2$; inoltre, applicando la Regola di Laplace alla matrice B_n, per $n > 2$, si ottiene la regola ricorsiva

$$\det B_n = 2a \det B_{n-1} - a^2 \det B_{n-2} \qquad \text{per } n > 2;$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} \delta_{n-1} \\ \delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{n-2} \\ \delta_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{per } n > 2.$$

Sia J una matrice di Jordan simile ad $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2a \end{pmatrix}$ e sia P la matrice del cambiamento di base; si ha $A = PJP^{-1}$, ove

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}.$$

Dalle osservazioni precedenti si deduce

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\delta_{n-1}\\ \delta_n\end{pmatrix} &= A^{n-2}\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{pmatrix} = PJ^{n-2}P^{-1}\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{pmatrix} =\\ &= P\left[\begin{pmatrix}a^{n-2} & 0\\ 0 & a^{n-2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & (n-2)a^{n-3}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]P^{-1}\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{pmatrix} =\\ &= \begin{pmatrix}na^{n-1}\\ (n+1)a^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dunque $\delta_n(a) = (n+1)a^n$, qualunque sia l'intero positivo n, e quindi $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n(a)$ esiste finito se, e solo se, $|a| < 1$ ed in tal caso il limite è uguale a zero. □

ESERCIZIO 4 *Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C, di caratteristica diversa da 2, e $q : V \to C$ una forma quadratica. Si chiama nucleo di q l'insieme*

$$K = \{\, v \in V \mid q(v+x) = q(x) \quad \forall x \in V \,\}.$$

(a) Si mostri che K è un sottospazio e si dica che relazioni vi sono tra K ed il nucleo dell'applicazione bilineare associata a q.

(b) Sia $\dim_C V = n$ e $\dim_C K = k$ e si indichi con $g_q : V \times V \to C$ l'applicazione bilineare simmetrica associata a q. Allora, dato un sottospazio U di V, di dimensione h, si mostri che $\dim_C U^\perp = n - h + r$, ove $r = \dim_C(U \cap K)$ e, come di consueto,

$$U^\perp = \{\, x \in V \mid g_q(u,x) = 0 \quad \forall u \in U \,\}.$$

Svolgimento: (a). Se $v \in K$, dalla condizione $q(v+x) = q(x)$, per $x = 0$, si ottiene $q(v) = q(0) = 0$, e quindi, per ogni $x \in V$, si ha $g_q(v,x) = q(v+x) - q(x) - q(v) = 0$, da cui si deduce che K è contenuto nel nucleo dell'applicazione bilineare associata a q; inoltre, vale anche l'inclusione reciproca, perchè, se v appartiene al nucleo dell'applicazione bilineare simmetrica g_q, si ha $2q(v) = g_q(v,v) = 0$ e quindi $q(v) = 0$ e inoltre, per ogni $x \in V$, $0 = g_q(v,x) = q(v+x) - q(x)$ e perciò v appartiene a K che è dunque un sottospazio di V.

(b). Sia $\Phi : V \to V^*$ l'omomorfismo associato all'applicazione bilineare simmetrica g_q; allora $K = \ker\Phi$ ed $U^\perp = \{\, x \in V \mid g_q(u,x) = 0 \quad \forall u \in U \,\}$ è l'ortogonale del sottospazio $\Phi(U) \subset V^*$ nella dualità canonica. Dunque,

$$\dim_C U^\perp = n - \dim_C \Phi(U) \qquad \text{e} \qquad \dim_C \Phi(U) = \dim_C U - \dim_C \ker(\Phi_{|U}).$$

A questo punto, basta osservare che $\ker(\Phi_{|U}) = K \cap U$ per concludere. □

ESERCIZIO 5 *(a) Siano W_1 e W_2 due sottospazi complementari di uno spazio vettoriale reale V, di dimensione finita, e siano date due applicazioni bilineari simmetriche $g_1 : W_1 \times W_1 \to \mathbb{R}$ e $g_2 : W_2 \times W_2 \to \mathbb{R}$. Si dice che V è somma ortogonale di W_1 e W_2, in simboli $V = W_1 \oplus^{\perp} W_2$, se si considera V dotato dell'applicazione bilineare simmetrica $g : V \times V \to \mathbb{R}$, definita ponendo $g(w_1 + w_2, w_1' + w_2') := g_1(w_1, w_1') + g_2(w_2, w_2')$, ove $w_1, w_1' \in W_1$ e $w_2, w_2' \in W_2$. Si mostri che, nel caso in cui g_1 e g_2 siano non-degeneri, allora g è non-degenere e si ha $i(g) = i(g_1) + i(g_2)$.*

(b) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 5. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base di V e si considerino le applicazioni bilineari simmetriche $g_t : V \times V \to \mathbb{R}$ che, rispetto alla base data, hanno matrice

$$G_t = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & -6 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & t \\ -6 & 6 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$. Si determinino due sottospazi complementari W_1 e W_2, per cui si abbia $V = W_1 \oplus^{\perp} W_2$ e si determinino i valori del parametro t affinchè si abbia $i(g_t) = 1$.

Svolgimento: (a). Se g_1 e g_2 sono entrambo non-degeneri, allora anche la loro somma ortogonale lo è. Infatti, dato $0 \neq v = w_1 + w_2 \in V$, una almeno tra le componenti w_1 e w_2 è diversa da zero. Sia w_1, allora esiste un vettore $x_1 \in W_1$ tale che $g_1(w_1, x_1) \neq 0$, e, quindi $g(v, x_1) = g_1(w_1, x_1) + g_2(w_2, 0) \neq 0$ e perciò g è non-degenere.

Si osservi che W_1 e W_2 sono ortogonali in V rispetto a g, e siano date le decomposizioni $W_1 = W_1^+ \oplus W_1^-$ e $W_2 = W_2^+ \oplus W_2^-$, ove g_j ristretta a W_j^+ (risp. W_j^-) è definita positiva (risp. definita negativa) e $W_j^+ = (W_j^-)^{\perp}$ relativamente a g_j, per $j = 1, 2$. Allora $V = (W_1^+ \oplus W_2^+) \oplus (W_1^- \oplus W_2^-)$ è una decomposizione di V, che soddisfa alle ipotesi del Teorema di Sylvester relativamente a g. Ciò è sufficiente per concludere per quanto riguarda la relazione tra gli indici di inerzia.

(b). Da un esame diretto delle matrici G_t, si può affermare che $V = W_1 \oplus^{\perp} W_2$, ove $W_1 = \langle v_1, v_2, v_4 \rangle$ e $W_2 = \langle v_3, v_5 \rangle$, qualunque sia il numero reale t. Si osservi poi che la restrizione di g_t a $W_1 \times W_1$ è indipendente dal valore del parametro t e non è definita. Poichè W_1 contiene un sottospazio di dimensione 2 su cui g è definita positiva, se ne deduce che $i(g_{t|W_1 \times W_1}) = 1$, qualunque sia $t \in \mathbb{R}$. Inoltre, $i(g_{t|W_2 \times W_2}) = 0$ se, e solo se, $\det \begin{pmatrix} 4 & t \\ t & 1 \end{pmatrix} = 4 - t^2 < 0$. Si conclude quindi che $i(g_t) = 1$ se, e solo se, $t \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. $\square$

ESERCIZIO 6 *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, una matrice di Jordan J di ϕ ed una base $\{v_1, \dots, v_5\}$ di $\mathbb{Q}^5$ rispetto a cui ϕ abbia matrice J.

Svolgimento: Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-1)^3(X+1)^2$ e $null_\phi(1) = 2$, $null_\phi(-1) = 2$; quindi una matrice di Jordan è

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e quindi il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = (X-1)^2(X+1)$. Una base rispetto a cui ϕ ha matrice J è $\{\, 2e_1 + e_3,\ 9e_4,\ 5e_2 + e_3 + e_5,\ e_4 - e_5,\ 2e_2 - e_4 \,\}$ e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 7 *Si consideri lo spazio affine immerso nello spazio proiettivo prendendo il piano $x_0 - 2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ come piano improprio e*

$$x = \frac{x_1}{x_0 - 2x_1 + x_2 - x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_0 - 2x_1 + x_2 - x_3}, \quad z = \frac{x_3}{x_0 - 2x_1 + x_2 - x_3}$$

come coordinate affini. Si considerino il punto $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la conica $\mathcal{C}$ di equazioni affini $\mathcal{C}$: $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$.

(a) Si determini l'equazione omogenea del cono $\mathcal{Q}$ che proietta $\mathcal{C}$ dal vertice V.

(b) Si classifichino (dal punto di vista affine) le coniche che si ottengono intersecando $\mathcal{Q}$ con i piani $y = kz$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Svolgimento: (a). Con procedimenti analoghi a quelli esposti nello svolgimento dell'Esercizio 8 del Compito del 19 giugno 1996, si ricava che l'equazione (affine) del cono cercato è uguale a

$$\mathcal{Q} : (x+z)^2 + (y-2z)^2 - 4(z-1)^2 = 0.$$

L'equazione omogenea si ottiene sostituendo ad x, y, e z le espressioni scritte sopra e moltiplicando per il quadrato del denominatore.

(b). Sia fissato $k \in \mathbb{R}$ e consideriamo i piani $\sigma_k : x_2 - kx_3 = 0$ e $\pi_\infty : x_0 - 2x_1 + x_2 - x_3 = 0$, allora la conica affine $\mathcal{Q} \cap \sigma_k$ è completamente determinata dalla conoscenza dell'intersezione $\mathcal{Q} \cap \sigma_k \cap \pi_\infty$ e dal fatto di essere, o meno, degenere.

L'intersezione tra un piano ed un cono quale $\mathcal{Q}$, è una conica degenere se, e solo se, il piano in questione contiene il vertice del cono e ciò accade esattamente quando $k = 2$. Inoltre, si ha

$$\mathcal{Q} \cap \sigma_k \cap \pi_\infty : \begin{cases} x_2 - kx_3 = 0 \\ x_0 - 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ (x_1 + x_3)^2 + (k-2)^2 x_3^2 - 4x_3^2 = 0 \end{cases}$$

e quindi siamo interessati al segno del discriminante della forma quadratica

$$x_1^2 + 2x_1x_3 + (k^2 - 4k + 1)x_3^2,$$

ovvero al segno di $4k - k^2$. Si ottiene così la seguente tabella

$k < 0$	ellisse
$k = 0$	parabola
$0 < k < 2$	iperbole
$k = 2$	due rette reali
$2 < k < 4$	iperbole
$k = 4$	parabola
$k > 4$	ellisse

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 8 *Nel piano euclideo, immerso nel modo usuale nel piano proiettivo, si consideri la circonferenza $\mathcal{C}$, di centro $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e raggio $\sqrt{5}$.*

Si determini, se esiste, un'iperbole tangente a $\mathcal{C}$ nei punti $Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Q_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ e avente un asintoto parallelo all'asse delle ascisse.

Svolgimento: Se esiste, l'iperbole cercata appartiene al fascio generato da $\mathcal{C}$ e dalla retta $r = Q_1 + Q_2$ con molteplicità 2 ed una conica di questo fascio è la coppia di tangenti a $\mathcal{C}$ nei punti Q_1 e Q_2. La retta r ha equazione affine $r : x + 2y = 0$ e quindi è un diametro della circonferenza $\mathcal{C}$. Perciò le due tangenti a $\mathcal{C}$ in Q_1 e Q_2 sono le perpendicolari ad r passanti per i punti dati, ovvero le rette $q_1 : 2x - y = 0$ e $q_2 : 2x - y = 10$. Omogeneizziamo le equazioni e osserviamo che l'iperbole cercata ha un'equazione del tipo

$$\lambda(2x_1 - x_2)(2x_1 - x_2 - 10x_0) + \mu(x_1 + 2x_2)^2 = 0,$$

per opportuni valori dei parametri omogenei (λ, μ), che si determinano imponendo la condizione che la conica passi per il punto improprio $X_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, direzione dell'asse delle ascisse. Dunque la conica cercata ha equazione omogenea

$$\mathcal{D} : 2x_0x_2 - 4x_0x_1 - 4x_1x_2 - 3x_2^2 = 0,$$

ed è ovviamente non-degenere (perchè?). □

ESERCIZIO 9 *Nel piano euclideo, immerso nel modo usuale nel piano proiettivo, si consideri la conica di equazione affine*

$$\mathcal{C} : 4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0.$$

Si determini, se esiste, l'equazione del cerchio osculatore a $\mathcal{C}$ nel punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. In caso affermativo si dica se il cerchio è iperosculatore e se le due coniche sono concentriche.

Svolgimento: La retta tangente a $\mathcal{C}$ in P è l'asse delle ascisse, di equazione $r : y = 0$, e quindi dobbiamo vedere se esiste un'opportuna retta per P, la cui equazione è del tipo $s : a(x - 1) + by = 0$, di modo che il fascio generato da $\mathcal{C}$ e dalla coppia di rette $r \cdot s$ contenga un cerchio. La conica generica di tale fascio ha matrice

$$A_{(\lambda,\mu)} = \lambda \begin{pmatrix} 4 & -4 & -18 \\ -4 & 4 & 0 \\ -18 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a \\ -a & a & 2b \end{pmatrix},$$

ed è un cerchio se, e solo se,

$$\begin{cases} \mu a = 0 \\ 4\lambda = 9\lambda + 2b\mu \end{cases}.$$

Posto quindi $(a, b) = (0, 1)$ e $(\lambda, \mu) = (2, -5)$, si ottiene un circolo iperosculatore, di equazione affine $x^2 + y^2 - 2x - 9y + 1 = 0$, che ha centro nel punto $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 9/2 \end{pmatrix}$ e raggio $9/2$. Il centro della conica $\mathcal{C}$ è il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e quindi, le due coniche non sono concentriche. □

ESERCIZIO 10 *Si ricorda che, data una conica $\mathcal{C}$ del piano proiettivo, si chiama conica duale la conica del piano proiettivo duale il cui supporto è costituito dalle rette del piano usuale tangenti a $\mathcal{C}$.*

Sia data una famiglia di coniche a centro del piano euclideo aventi gli stessi fuochi; si mostri che le rispettive coniche duali appartengono ad uno stesso fascio di coniche del piano duale.

Svolgimento: I due fasci di rette isotrope costituiscono una conica degenere $\mathcal{H}$ del piano proiettivo duale. Se due coniche a centro hanno gli stessi fuochi, allora hanno anche le stesse tangenti isotrope e quindi le rispettive coniche duali hanno quattro punti (del piano duale) in comune con $\mathcal{H}$ e quindi appartengono ad un medesimo fascio del piano duale.

Conseguenza di ciò: se A è la matrice di una conica non-degenere del piano euclideo, la sua conica duale ha matrice A^{-1}(†) ed $\mathcal{H}$ ha matrice

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} (0,1,-i) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} (0,1,i) = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

quindi il generico elemento del fascio di coniche confocali del piano duale ha matrice $\lambda A^{-1} + \mu H$ e perciò, le coniche di matrice $(\lambda A^{-1} + \mu H)^{-1}$ –quando l'inversa esiste– formano una famiglia di coniche confocali(††). □

(†) Si veda ad esempio l'Esercizio 8 del 22 settembre 1995.

(††) Ad esempio, si scriva l'equazione della generica conica appartenente ad una famiglia di coniche confocali con l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Esame di Geometria per la Laurea in Fisica

prova scritta del 24 settembre 1996 .

ESERCIZIO 1 *Nello spazio vettoriale* $\mathbb{Q}^4$ *siano dati i vettori*

$$w_1 = e_1 - e_3 + 2e_4, \quad w_2 = e_1 + e_2 - 2e_4, \quad w_3 = 3e_4 - e_1 - 2e_2 - e_3, \quad w_4 = 2e_1 + e_2 - e_3,$$

ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ *indica la base canonica.*

(a) *Si scriva, in tutti i modi possibili, il vettore* $e_1 + e_2 - e_4$ *come combinazione lineare di* $w_1, \dots, w_4$.

(b) *Indicata con* $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ *l'applicazione lineare che manda la base canonica ordinatamente su* $w_1, \dots, w_4$, *si determinino una base del nucleo e dell'immagine di* ϕ *e di* $\ker \phi \cap \operatorname{im} \phi$.

Svolgimento: (a). Il sottospazio $L(w_1, \dots, w_4)$ ha dimensione 3, perchè i primi tre generatori sono linearmente indipendenti, mentre $w_1 + w_2 - w_4 = 0$. Inoltre, con un calcolo diretto, si ottiene $e_1 + e_2 - e_4 = \frac{1}{3}(w_1 + w_2 - w_3)$. Si conclude quindi che

$$e_1 + e_2 - e_4 = (\frac{1}{3} + t)w_1 + (\frac{1}{3} + t)w_2 - \frac{1}{3}w_3 - tw_4$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b). In base a quanto visto nel punto precedente, si ha

$$\ker \phi = L(e_1 + e_2 - e_4) \subset \operatorname{im} \phi = L(w_1, w_2, w_3);$$

il che permette di concludere in quanto w_1, w_2, w_3 sono linearmente indipendenti. □

ESERCIZIO 2 *Al variare di* t *in* $\mathbb{Q}$, *si scrivano tutte le matrici* X *tali che* $AXB = A$, *ove* $A = \begin{pmatrix} 2 & t \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Svolgimento: È chiaro che, quando A è invertibile, deve aversi $XB = \mathbf{1}$, ovvero $X = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$; e quindi, quando $\det A = 2 + t \neq 0$, ovvero per $t \neq -2$, $X = B^{-1}$ è l'unica soluzione al problema proposto. Quando $t = -2$, B^{-1} resta una soluzione particolare del problema, ma le si devono sommare tutte le soluzioni del problema omogeneo associato, ovvero tutte le matrici Y, tali che $AYB = \mathbf{0}$. Poichè B è invertibile, la condizione è equivalente ad $AY = \mathbf{0}$ e ciò significa che le colonne della matrice Y devono essere ortogonali (nella dualità canonica) alle righe della matrice A (che sono tra loro proporzionali). Si conclude quindi che, per $t = -2$, si ha

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix},$$

al variare di ${}^t(a, b) \in \mathbb{R}^2$. □

ESERCIZIO 3 *Al variare di n tra gli interi positivi, si indichi con C_n la matrice quadrata di ordine n del tipo*

$$C_n = \begin{pmatrix} b & 2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -b^2 & b & 2 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & -b^2 & b & 2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -b^2 & b & 2 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & -b^2 & b & 2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -b^2 & b \end{pmatrix},$$

ove b è una costante reale.

Si scriva in modo esplicito $\delta_n(b) := \det C_n$ quale funzione della variabile b.

Svolgimento: Osserviamo che $\delta_1(b) = b$ e $\delta_2(b) = 3b^2$; inoltre, applicando la regola di Laplace al calcolo del determinante, si ottiene la relazione ricorsiva $\delta_n(b) = b\delta_{n-1}(b) + 2b^2\delta_{n-2}(b)$. Si ha quindi

$$\begin{pmatrix} \delta_{n-1} \\ \delta_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta_{n-2} \\ \delta_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix},$$

ove $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2b^2 & b \end{pmatrix}$. Per calcolare le potenze della matrice A, determiniamo la sua forma di Jordan. Gli autovalori di A sono $-b$ e $2b$, a cui corrispondono gli spazi di autovettori $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -b \end{pmatrix} \rangle$ e $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2b \end{pmatrix} \rangle$. Dunque, $A = P\Delta P^{-1}$, ove

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -b & 2b \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3b \\ 1/3 & 1/3b \end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi scrivere

$$\begin{pmatrix} \delta_{n-1} \\ \delta_n \end{pmatrix} = P\Delta^{n-2}P^{-1} \begin{pmatrix} b \\ 3b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2^n-(-1)^n}{3} b^{n-1} \\ \frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3} b^n \end{pmatrix},$$

che dà la scrittura esplicita di $\delta^n(b) = \frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3} b^n$. □

ESERCIZIO 4 *Siano V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si consideri l'applicazione bilineare simmetrica $g : V \times V \to \mathbb{R}$ che, rispetto alla base data, ha matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & -6 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ -6 & 6 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino l'indice di inerzia di g ed un sottospazio isotropo massimale.

Svolgimento: Si considerino i sottospazi $W_1 = \langle v_1, v_2, v_4 \rangle$ e $W_2 = \langle v_3, v_5 \rangle$. Si ha $W_1 \oplus^\perp W_2$ (cf. l'Esercizio 5 del 2 settembre 1996) e, indicata con g_i, $i = 1, 2$, la restrizione di g a $W_i \times W_i$, si ha

$$i(g_1) = 1, \quad i(g_2) = 0, \quad \text{e} \quad i(g) = i(g_1) + i(g_2) = 1.$$

Per determinare un sottospazio isotropo massimale di V è sufficiente considerare la somma tra un sottospazio isotropo massimale U_1 di W_1 ed un sottospazio isotropo massimale U_2 di W_2 (perchè?) e questi hanno entrambi dimensione uguale ad 1. Si ha quindi

$$U_1 = \langle (\sqrt{3} - 6) w_2 + 3 w_4 \rangle, \quad U_2 = \langle w_3 + (\sqrt{5} - 3) w_5 \rangle, \quad U = U_1 \oplus U_2,$$

ed U è un sottospazio isotropo massimale in V. □

ESERCIZIO 5 *Siano V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione n, $h : V \times V \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana definita positiva e si ponga $\|v\| := \sqrt{h(v,v)}$, per ogni $v \in V$.*

Dato un endomorfismo $\phi : V \to V$ i cui autovalori abbiano tutti valore assoluto minore di 1, si mostri che si ha $\lim_{k \to \infty} \phi^k(v) = 0$ per ogni vettore $v \in V$.

Svolgimento: Dobbiamo far vedere che $\lim_{k \to \infty} \|\phi^k(v)\| = 0$ in $\mathbb{R}$, qualunque sia il vettore $v \in V$. Se $p_\phi(X) = \prod_{j=1}^{r} (X - a_j)^{m_j}$, ove $a_1, \dots, a_r$ sono gli autovalori di ϕ, a due a due distinti; posto $W_j := \ker[(\phi - a_j)^{m_j}]$, per $j = 1, \dots, r$ si ha $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$ e ϕ induce un endomorfismo su ciascuno degli addendi. Quindi è sufficiente dimostrare l'affermazione per $\phi_{|W_j}$, ovvero nell'ipotesi in cui ϕ abbia un unico autovalore a, con $|a| < 1$.

Allora, indicato con δ_a l'endomorfismo di moltiplicazione per a, si ha che $\phi = \delta_a + \nu$, ove ν è un endomorfismo nilpotente, di ordine $\leq n = \dim V$, ed ovviamente δ_a e ν commutano tra loro. Dunque, applicando la formula del binomio, per valori di $k > n$, si ottiene

$$\|\phi^k(v)\| = \| \sum_{j=0}^{n-1} \binom{k}{j} a^{k-j} \nu^j(v) \| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \binom{k}{j} |a|^{k-j} \|\nu^j(v)\|.$$

Osservando che, per $j = 0, \dots, n-1$, si ha

$$\binom{k}{j} < k^n, \quad |a|^{k-j} < |a|^{k-n}, \quad \|\nu^j(v)\| < C,$$

per un opportuna costante C (dipendente dal vettore v), si deduce la disuguaglianza $\|\phi^k(v)\| \leq n k^n |a|^{k-n} C$, per ogni $k > n$, che permette di concludere, essendo $|a| < 1$. □

ESERCIZIO 6 *Si consideri l'endomorfismo* $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$, *avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di ϕ, *una matrice di Jordan* J *di* ϕ *ed una base* $\{v_1, \dots, v_5\}$ *di* $\mathbb{Q}^5$ *rispetto a cui* ϕ *abbia matrice* J.

Svolgimento: Sia ha $p_\phi(X) = \det(A - X\mathbf{1}) = (3 - X)^3(X + 2)^2$, e quindi gli autovalori di ϕ sono 3 e -2 con molteplicità 3 e 2 rispettivamente. Entrambi gli autovalori hanno nullità 2 e, perciò, il polinomio minimo è $(X + 2)(X - 3)^2$ e una matrice di Jordan simile ad A è

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Con le usuali tecniche, si può determinare una base rispetto a cui ϕ ha matrice J, ad esempio $\{2e_1 + e_3, 12e_4, -5e_1 + 5e_2 + e_5, e_2 - e_4, 2e_4 - e_5\}$. □

ESERCIZIO 7 *Siano* A, B, C, D *quattro punti del piano euclideo. Si mostri che vale l'identità*

$$(B - A)(D - C) + (C - A)(B - D) + (D - A)(C - B) = 0.$$

Si deduca da ciò che le tre altezze di un triangolo concorrono ad un medesimo punto.

Svolgimento: Posto $B - A = u$, $C - A = v$ e $D - A = w$, si ha $D - C = w - v$, $B - D = u - w$ e $C - D = v - u$. Effettuando i prodotti scalari e la somma indicati, si ottiene il risultato che, come si vede dalla dimostrazione, resta valido anche nello spazio euclideo tridimensionale..

Siano A, B, C i vertici del triangolo e D l'intersezione delle due altezze relative ai vertici A e B. Allora, dall'uguaglianza appena dimostrata, ricordando che $(D - A) \perp (C - B)$ e $(C - A) \perp (B - D)$, si ottiene $(B - A)(D - C) = 0$, ovvero che $(D - C) \perp (B - A)$; il che ci permette di concludere che anche l'altezza relativa all'ultimo vertice del triangolo passa per il punto D. □

ESERCIZIO 8 *Siano date due rette r ed s nello spazio euclideo tridimensionale.*

(a) *Si mostri che esiste un sistema di riferimento ortonormale rispetto a cui le due rette hanno equazioni*
$$r : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad e \qquad s : \begin{cases} \alpha x - \beta y = 0 \\ z = k \end{cases},$$
per opportuni valori di $(\alpha, \beta) \in \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1 \}$ e $k \in [0, +\infty)$. Inoltre, si dica per quali valori dei parametri le due rette sono parallele, incidenti o sghembe.

(b) *Nel caso in cui le due rette sono sghembe, si scrivano le equazioni del luogo $\mathcal{Q}$ dei punti equidistanti da r ed s.*

(c) *Si dica se esiste una stella di piani centrata in un punto P (proprio o improprio) tale che $\mathcal{Q}$ tagli una parabola oppure una conica degenere su ciascuno dei piani della stella.*

Svolgimento: (a). Per determinare un tale riferimento, si scelga la retta r come asse delle x, e una direzione perpendicolare sia ad r che ad s come asse delle z; in particolare, nel caso in cui le rette siano parallele e distinte, si scelga la direzione perpendicolare che sia anche parallela al piano contenente le due rette. In tal modo la direzione dell'asse y è completamente determinata dalla condizione che il riferimento sia ortogonale. L'origine di tale riferimento deve essere posta sulla retta r e, precisamente:

- nell'unico punto per cui passa una retta incidente s e perpendicolare ad entrambe, nel caso in cui r ed s siano sghembe;
- nel punto di incidenza se r ed s sono incidenti;
- in un qualunque punto di r se le due rette sono parallele.

Inoltre, osserviamo che, nel caso in cui r ed s siano sghembe o parallele e distinte, il versore dell'asse z deve essere opportunamente orientato (come?) e k è la distanza tra le due rette. Infine, in ogni caso, β ed α sono, rispettivamente, il coseno ed il seno dell'angolo formato dalle due rette. È chiaro perciò che le due rette sono incidenti per $k = 0$ e parallele per $\alpha = 0$, negli altri casi le rette sono sghembe.

(b). Siano quindi r ed s le rette di equazioni date, con $k \neq 0 \neq \alpha$. Allora r passa per $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, mentre s passa per $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$; per un generico punto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, si ha quindi che $X \in \mathcal{Q}$ se, e solo se,
$$\delta(X, r) = \frac{\|(X - O) \times v\|}{\|v\|} = \frac{\|(X - Q) \times w\|}{\|w\|} = \delta(X, s),$$
e quindi i punti di $\mathcal{Q}$ soddisfano all'equazione
$$\mathcal{Q} : \alpha^2(x^2 - y^2) + 2\alpha\beta xy - 2kz + k^2 = 0.$$

(c). L'intersezione tra $\mathcal{Q}$ ed il piano improprio è la coppia di rette di equazioni
$$t_1 : \begin{cases} x_0 = 0 \\ \alpha x_1 + (\beta - 1)x_2 = 0 \end{cases}, \qquad t_2 : \begin{cases} x_0 = 0 \\ \alpha x_1 + (\beta + 1)x_2 = 0 \end{cases};$$
quindi, se si considera il punto $P = t_1 \cap t_2$ e la stella di piani centrata in tale punto, si ha la condizione desiderata. Il punto P corrisponde alla direzione dell'asse z (coordinate omogenee $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) e quindi i piani (propri) di tale stella hanno equazione affine $ax + by + c = 0$ al variare dei parametri omogenei (a, b, c). □

ESERCIZIO 9 *Si consideri la famiglia di coniche*

$$\mathcal{F}_k : x^2 - (3k-4)y^2 - 4(k-1)xy + 2ky - 4kx = 0,$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Si dica per quali valori di k *la conica* $\mathcal{F}_k$ *è affinemente equivalente alla conica* $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x + 4y$ *e per quali valori di* k *le due coniche sono isometriche.*

Svolgimento: La conica $\mathcal{C}$ è un circolo del piano euclideo, di raggio $\sqrt{5}$. Dunque, ogni ellissoide non degenere della famiglia $\mathcal{F}_k$ è affinemente equivalente a $\mathcal{C}$, ed $\mathcal{F}_k$ è un ellissoide non-degenere per $0 < k < \frac{5}{4}$.

La conica $\mathcal{F}_k$ è un circolo per $k = 1$, ed in tal caso, il raggio è proprio uguale a $\sqrt{5}$ e quindi $\mathcal{F}_1$ è isometrica a $\mathcal{C}$. □

ESERCIZIO 10 *Nello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^3$, *con la base canonica* $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_3\}$, *si considerino i vettori*

$$v_1 = 2e_1 + e_2, \quad v_2 = -4e_1 + 3e_2 + 5e_3, \quad v_3 = 2e_1 + 5e_2 + 4e_3$$

e

$$w_1 = 5e_3, \quad w_2 = 5e_2, \quad w_3 = 4e_2 + 13e_3.$$

Si scrivano le matrici, rispetto alla base canonica, di tutti gli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ *che mandano ordinatamente* v_i *su* w_i *per* $i = 1, 2, 3$.

Svolgimento: I vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti, essendo $13v_1 + 4v_2 - 5v_3 = 0$; e quindi un endomorfismo del tipo richiesto può esistere se, e solo se, anche i vettori w_1, w_2, w_3, soddisfano alla stessa relazione, e ciò accade.

Dunque è sufficiente determinare tutti gli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ che mandano ordinatamente v_1 su w_1 e v_2 su w_2. Poichè $\{e_1, v_1, v_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e si ha

$$e_2 = v_1 - 2e_1, \qquad e_3 = \frac{1}{5}(v_2 - 3v_1 + 10e_1),$$

gli endomorfismi cercati devono soddisfare alle condizioni

$$\phi(e_2) = 5e_3 - 2\phi(e_1), \qquad \phi(e_2) = e_2 - 3e_3 + 2\phi(e_1),$$

ove $\phi(e_1)$ è un arbitrario vettore di $\mathbb{R}^3$. Dunque le matrici (rispetto alla base canonica) dei possibili endomorfismi soddisfacenti alla condizione proposta sono

$$\begin{pmatrix} a & -2a & 2a \\ b & -2b & 1+2b \\ c & 5-2c & 2c-3 \end{pmatrix},$$

al variare di $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3(\dagger)}$. □

(†) Si osservi che

$$\begin{pmatrix} a & -2a & 2a \\ b & -2b & 1+2b \\ c & 5-2c & 2c-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -2a & 2a \\ b & -2b & 2b \\ c & -2c & 2c \end{pmatrix},$$

ove il primo addendo è una soluzione particolare del problema, mentre il secondo è la soluzione generale del problema omogeneo associato, in quanto le tre righe della matrice sono tutte proporzionali al generatore $e_1^* - 2e_2^* + 2e_3^*$ del sottospazio $\langle v_1, v_2 \rangle^{\perp}$ (nella dualità canonica).

Sommario del contenuto