Vettori di Witt ed anelli di Fontaine

note di Maurizio Candilera

1. Vettori di Witt

Sia p un primo razionale fissato. Sia $X = (X_0, X_1, \dots)$ una successione di indeterminate sull'anello $\mathbb{Z}$ dei numeri interi e si indichi con B (risp. B') l'anello di polinomi $\mathbb{Z}[X_0, X_1, \dots]$ (risp. $\mathbb{Q}[X_0, X_1, \dots] = B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$). Si definiscono, al variare di n, i polinomi $\phi_n(X) = \phi_n(X_0, \dots, X_n) \in B$ ponendo

$$\phi_n(X) := \sum_{j=0}^{n} p^j X_j^{p^{n-j}} \tag{1.1}$$

È immediato verificare che si ha:

$$\phi_0(X) = X_0 \qquad \text{e} \qquad X_n = \frac{1}{p^n}\left(\phi_n(X_0, \dots, X_n) - \sum_{j=0}^{n-1} p^j X_j^{p^{n-j}}\right), \tag{1.2}$$

e quindi, per ogni $n \geq 0$, si ha $\mathbb{Q}[X_0, \dots, X_n] = \mathbb{Q}[\phi_0, \dots, \phi_n]$; da cui si deduce $B' = \mathbb{Q}[\phi_0, \phi_1, \dots]$.

Se R è un'algebra su $\mathbb{Q}$ indicheremo con $\mathbf{W}(R)$ l'insieme $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(B', R)$ i cui elementi saranno detti i *vettori di Witt (di lunghezza infinita)* ad elementi in R. Un elemento $x \in \mathbf{W}(R)$ è quindi individuato da una successione $x = (x_0, x_1, \dots)$ di elementi di R, ove $x_i = x(X_i)$ è detta *l'i-esima componente* del vettore x. Inoltre, indicheremo con $x^{(n)}$, al variare di n tra gli interi non negativi, l'elemento $x(\phi_n(X))$ di R, che sarà detto *l'n-esima componente fantasma* del vettore x.

L'insieme $\mathbf{W}(R)$ diviene un anello commutativo con le operazioni definite ponendo

$$(x+y)^{(n)} = x^{(n)} + y^{(n)} \qquad \text{e} \qquad (xy)^{(n)} = x^{(n)} y^{(n)},$$

per ogni $n \geq 0$.

Per descrivere le relazioni tra le componenti della somma (risp. prodotto) di vettori di Witt e le componenti dei relativi addendi (risp. fattori), si considerino ora i vettori X ed Y in $\mathbf{W}(B' \otimes B')$, di componenti $X_j = 1 \otimes X_j$ ed $Y_j = X_j \otimes 1$, rispettivamente, per $j = 0, 1, \dots$. Utilizzando le relazioni ricorsive descritte in (1.2), si ricava che le componenti di somma e prodotto di tali vettori, sono dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$, nelle variabili X_0, Y_0, X_1, $Y_1, \dots$. Più precisamente, per ogni intero non negativo n, si ha

$$
\begin{aligned}
(X+Y)_n &= S_n(X;Y) = S_n(X_0, \dots, X_n; Y_0, \dots, Y_n) \\
(XY)_n &= P_n(X;Y) = P_n(X_0, \dots, X_n; Y_0, \dots, Y_n)
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

ove i polinomi $S_n(X;Y)$ e $P_n(X;Y)$ sono determinati dalle relazioni

$$
\begin{aligned}
\phi_n(S_0(X;Y), \dots, S_n(X;Y)) &= \phi_n(X) + \phi_n(Y) \\
\phi_n(P_0(X;Y), \dots, P_n(X;Y)) &= \phi_n(X)\ \phi_n(Y)
\end{aligned}
.
$$

In particolare, dalle relazioni scritte sopra si ricava

$$
\begin{aligned}
S_0(X;Y) &= X_0 + Y_0 \\
S_1(X;Y) &= \tfrac{1}{p}(\phi_1(X) + \phi_1(Y) - S_0(X;Y)^p) = \\
&= X_1 + Y_1 - \tfrac{1}{p}\sum_{h=1}^{p-1}\tbinom{p}{h} X_0^h Y_0^{p-h} \\
P_0(X;Y) &= X_0 Y_0 \\
P_1(X;Y) &= \tfrac{1}{p}(\phi_1(X)\phi_1(Y) - P_0(X;Y)^p) = \\
&= pX_1Y_1 + X_0^pY_1 + X_1Y_0^p
\end{aligned}
$$

Osserviamo che in ognuno dei casi considerati si ottengono polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}$; mostreremo nel seguito che non si tratta di un fatto casuale ma di una proprietà delle operazioni tra vettori di Witt.

Passiamo ora ad un'altra interessante proprietà dei polinomi che definiscono le operazioni di Witt.

1.4 Proposizione. *Notazioni come sopra. Si attribuisca alle variabili X_j ed Y_j peso p^j; allora, per ogni $n \ge 0$, il polinomio $S_n(X;Y)$ è isobarico di peso p^n, ed il polinomio $P_n(X;Y)$ è isobarico di peso $2p^n$.*

dim. L'affermazione è certo vera per i polinomi $S_0(X;Y) = X_0 + Y_0$ e $P_0(X;Y) = X_0Y_0$. Dunque possiamo supporre $n \ge 1$ e che la tesi sia vera per ogni intero minore di n. In tal caso, si ha

$$S_n(X;Y) = \frac{1}{p^n}\left(\phi_n(X) + \phi_n(Y) - \sum_{j=0}^{n-1} p^j S_j(X;Y)^{p^{n-j}}\right)$$

e

$$P_n(X;Y) = \frac{1}{p^n}\left(\phi_n(X)\phi_n(Y) - \sum_{j=0}^{n-1} p^j P_j(X;Y)^{p^{n-j}}\right).$$

È quindi sufficiente osservare che i polinomi $\phi_n(X)$ e $\phi_n(Y)$ sono isobarici di peso p^n (cf. (1.1)) e che il prodotto di p^{n-j} monomi di peso p^j (risp. $2p^j$), è un monomio di peso p^n (risp. $2p^n$). **CVD** ■

Al variare di a in R, useremo il simbolo $\{a\}$ per indicare il vettore $(a, 0, 0, \dots)$, la cui componente zerea è uguale ad a, mentre le componenti di indice positivo sono tutte nulle. Un calcolo diretto permette di ricavare le relazioni

$$\phi_n(\{a\}) = a^{p^n} \quad \text{per ogni } n$$
$$\{a\}x = (ax_0, a^p x_1, a^{p^2} x_2, \dots)$$

Considerando solo un numero finito di indeterminate $(X_0, X_1, \dots, X_k)$ si definiscono in modo perfettamente analogo i *vettori di Witt di lunghezza* $k+1$ che indichiamo con il simbolo $\mathbf{W}_k(R)$.

Definiamo ora alcuni notevoli operatori sui vettori di Witt. Se x è un vettore di Witt, si definiscono i vettori Vx, Fx e l'operatore di troncamento, ponendo

$$\begin{aligned} &\textit{Verschiebung:} && (Vx)(X_i) = x(X_{i-1}), \text{ per } i \geq 1 \quad \text{e} \quad (Vx)(X_0) = 0; \\ &\textit{Frobenius:} && (Fx)(X_i) = x(X_i)^p; \\ &\textit{Troncamento:} && \rho_n \colon \mathbf{W}_n(R) \longrightarrow \mathbf{W}_{n-1}(R); \\ &&& (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1}) \end{aligned} \tag{1.5}$$

In particolare, la successione $(\mathbf{W}_k(R), \rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è un sistema proiettivo e si ha $\mathbf{W}(R) = \varprojlim \mathbf{W}_k(R)$. Le proiezioni dal limite verso i termini del sistema proiettivo sono l'estensione del troncamento ai vettori di Witt di lunghezza infinita.

Osserviamo inoltre, che si possono definire anche sui vettori finiti gli operatori $F : \mathbf{W}_k(R) \to \mathbf{W}_k(R)$ e $V : \mathbf{W}_k(R) \to \mathbf{W}_{k+1}(R)$ parafrasando le definizioni date sopra. Si può dimostrare che gli operatori definiti su $\mathbf{W}(R)$ si ottengono dagli omonimi operatori sui vettori finiti passando al limite inverso.

Gli operatori definiti sopra sono legati da alcune notevoli relazioni.

1.6 Proposizione. *Notazioni come sopra. Valgono le seguenti relazioni:*

$$\begin{aligned}
(i)\ & \phi_n(X) = \phi_{n-1}(FX) + p^n X_n \\
(ii)\ & \phi_n(VX) = p\phi_{n-1}(X) \\
(iii)\ & V(X+Y) = VX + VY \\
(iv)\ & \rho(X+Y) = \rho X + \rho Y \\
(v)\ & \rho(XY) = (\rho X)(\rho Y) \\
(vi)\ & S_n(X;Y) - X_n - Y_n \in \mathbb{Q}[X_0, \dots, X_{n-1}; Y_0, \dots, Y_{n-1}].
\end{aligned}$$

dim. Le prime cinque asserzioni sono di immediata verifica; a titolo di esempio dimostriamo la (iii). Siano $X = (X_0, X_1, \dots)$ ed $Y = (Y_0, Y_1, \dots)$ i due vettori di Witt di indeterminate in $\mathbf{W}(B' \otimes_{\mathbb{Q}} B')$ descritti sopra; si tratta di mostrare che, per ogni intero $n \geq 0$ si ha $S_{n+1}(VX;VY) = S_n(X,Y)$. Con un calcolo diretto si verifica che la tesi è vera per $n = 0$. Inoltre

$$\phi_{n+1}(VX) = \sum_{j=1}^{n+1} p^j X_{j-1}^{p^{n+1-j}} = \sum_{j=0}^{n} p^{j+1} X_j^{p^{n-j}} = p\phi_n(X).$$

Possiamo quindi applicare un'ipotesi induttiva ed ottenere la catena di uguaglianze

$$\begin{aligned}
S_{n+1}(VX;VY) &= \frac{1}{p^{n+1}}(\phi_{n+1}(VX) + \phi_{n+1}(VY) - \sum_{j=1}^{n} p^j S_j(VX;VY)^{p^{n+1-j}}) \\
&= \frac{1}{p^{n+1}}(p\phi_n(X) + p\phi_n(Y) - \sum_{j=0}^{n-1} p^{j+1} S_j(X;Y)^{p^{n-j}}) \\
&= \frac{1}{p^{n}}(\phi_n(X) + \phi_n(Y) - \sum_{j=0}^{n-1} p^{j} S_j(X;Y)^{p^{n-j}}) = S_n(X,Y),
\end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione di (iii). Infine, osserviamo che (vi) discende da (i) ragionando come segue

$$p^n S_n(X;Y) - [\phi_n(X) + \phi_n(Y)] \in \mathbb{Q}[X_0, \dots, X_{n-1}; Y_0, \dots, Y_{n-1}]$$

ove

$$\phi_n(X) + \phi_n(Y) = p^n X_n + p^n Y_n + H$$

per un opportuno $H \in \mathbb{Q}[X_0, \dots, X_{n-1}; Y_0, \dots, Y_{n-1}]$. **CVD** ∎

Il nostro prossimo obiettivo è dimostrare che le operazioni tra vettori di Witt sono definite da polinomi a coefficienti interi, ovvero che $S_n(X;Y)$ e $P_n(X;Y)$ appartengono a $B \otimes_{\mathbb{Z}} B$. Cominciamo con un lemma:

1.7 Lemma. *Notazioni come sopra. Siano r un numero intero positivo ed $m \geq 0$; e siano dati due vettori di Witt G e H in $\mathbf{W}(B')$. Allora:*

$$G_i \equiv H_i \bmod p^r B \quad \forall i \leq m \;\Leftrightarrow\; \phi_i(G) \equiv \phi_i(H) \bmod p^{r+i} B \quad \forall i \leq m$$

dim. Ricordiamo che, in generale, si ha:

$$a \equiv b \bmod p^r B \;\Rightarrow\; a^p \equiv b^p \bmod p^{r+1} B.$$

Da ciò si ricava che $G_i \equiv H_i \bmod p^r B$ implica che $(FG)_i \equiv (FH)_i \bmod p^{r+1} B$. Passiamo quindi a dimostrare l'implicazione diretta ($\Rightarrow$), facendo induzione su i, in quanto la tesi è certamente vera per $i = 0$ (cf. 1.2). In base a ciò si ha $\phi_{i-1}(FG) \equiv \phi_{i-1}(FH) \bmod p^{r+i} B$ e quindi, dalla *Proposizione 1.6.*(i), si ricava:

$$[\phi_i(G) - \phi_i(H)] - p^i(G_i - H_i) \in p^{r+i} B\,,$$

che ci permette di concludere.

Dobbiamo ora mostrare l'implicazione nel verso contrario ($\Leftarrow$) e, ancora una volta, facciamo induzione su i, osservando che la tesi è banalmente vera per $i = 0$. In base ad (1.2) si ha

$$G_i - H_i = \tfrac{1}{p^i}[\phi_i(G) - \phi_i(H) + \sum_{j=0}^{i-1} p^j (G_j^{p^{i-j}} - H_j^{p^{i-j}})],$$

ove ogni addendo della sommatoria è in $p^{r+i}B$ per l'ipotesi induttiva e l'osservazione fatta all'inizio della dimostrazione. **CVD** ■

Siamo quindi in grado di dimostrare il risultato annunciato.

1.8 Teorema. *Notazioni come sopra. Per ogni n i polinomi $S_n(X;Y)$ e $P_n(X;Y)$ hanno coefficienti in $\mathbb{Z}$.*

dim. Siano di nuovo $X = (X_0, X_1, \dots)$ ed $Y = (Y_0, Y_1, \dots)$ i due vettori di Witt di indeterminate in $\mathbf{W}(B' \otimes_{\mathbb{Q}} B')$ descritti sopra. Dimostriamo la tesi per induzione su n, visto che per $n = 0$ ed $n = 1$ la tesi è vera, come abbiamo verificato in precedenza con un calcolo diretto. Dunque, l'ipotesi è che, per $j < n$ si abbia $S_j(X;Y) \in B \otimes B$. Da ciò si deduce

$$F(X+Y)_j = S_j(X;Y)^p \equiv S_j(FX;FY) \bmod p(B \otimes B) \quad \text{per } j < n.$$

Quindi, applicando il *Lemma 1.7*, si ottiene la congruenza

$$\phi_{n-1}(F(X+Y)) \equiv \phi_{n-1}(FX) + \phi_{n-1}(FY) \bmod p^n(B \otimes_{\mathbb{Z}} B).$$

Applicando la proprietà (i) della *Proposizione 1.6*, si ha

$$\phi_{n-1}(FX) + \phi_{n-1}(FY) \equiv \phi_n(X) + \phi_n(Y) \bmod p^n(B \otimes_{\mathbb{Z}} B).$$

e, ricordando che $\phi_n(X) + \phi_n(Y) = \phi_n(X+Y)$, si conclude che

$$p^n S_n(X,Y) = \phi_n(X+Y) - \phi_{n-1}(F(X+Y)) \in p^n(B \otimes_{\mathbb{Z}} B),$$

che è quanto volevamo.

In modo analogo si ragiona per i polinomi $P_n(X;Y)$. **CVD** ■

Grazie al risultato precedente ha senso parlare degli anelli $\mathbf{W}(A)$ e $\mathbf{W}_n(A)$ per una qualunque $\mathbb{Z}$–algebra A, ove $\mathbf{W}(A)$ è uguale, come insieme, ad $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B,A)$, mentre le operazioni di anello sono definite applicando i polinomi $S_n(X;Y)$ e $P_n(X;Y)$ alle componenti dei vettori di Witt.

Passiamo quindi a dimostrare alcune ulteriori proprietà degli operatori definiti in (1.5) e, per comodità, continuiamo la numerazione della *Proposizione 1.6*.

1.9 Proposizione. *Notazioni come sopra. Valgono le seguenti relazioni:*

$$\begin{aligned} (vii)&\ FV = VF \\ (viii)&\ V\rho = \rho V \\ (ix)&\ F\rho = \rho F \\ (x)&\ (FV(X))_n \equiv (pX)_n \bmod pB \quad \forall n. \end{aligned}$$

dim. Le prime tre asserzioni sono di immediata verifica. Verifichiamo la (x). In base alla (i), si ha:

$$\phi_n(pX) = p\phi_n(X) \equiv p\phi_{n-1}(FX) \bmod p^{n+1}B.$$

D'altro canto, in base alla (ii), si ha $p\phi_{n-1}(FX) = \phi_n(VFX)$; e questo, permette di concludere in forza del *Lemma 1.7*. **CVD** ■

In base al *Teorema 1.8* ed alle proprietà dimostrate sopra, possiamo considerare l'anello dei vettori di Witt $\mathbf{W}(A)$, ove A è un qualsiasi anello di caratteristica uguale al primo p fissato. In tal caso le operazioni sono definite riducendo $\bmod\, p$ i coefficienti dei polinomi $S_n(X;Y)$ e $P_n(X;Y)$, ed in particolare si ha:

$$FVy = VFy = py \quad \text{per ogni } y \in \mathbf{W}(A). \tag{1.10}$$

Per i vettori di lunghezza finita vi è l'analoga relazione $\rho VFy = py$ per ogni $y \in \mathbf{W}(A)$.

1.11 Proposizione. *Sia A un anello di caratteristica p. Allora:*

(a) $\mathbf{W}_{n-1}(A)$ *è un anello di caratteristica* p^n.

(b) $\mathbf{W}(A)$ *è un anello di caratteristica* 0.

dim. È chiaro che, in base a (1.10) si ha $p^n y = 0$ per ogni $y \in \mathbf{W}_{n-1}(A)$. D'altra parte, si ha $p^{n-1}\{1\} \neq 0$ e ciò permette di concludere la dimostrazione del punto (a). Per quanto concerne (b), dato un vettore z, dalla relazione $nz = 0$ si deduce che la componente zerea di z deve soddisfare alla analoga condizione $nz_0 = 0$. Dunque, deve essere $n = p^i$ per un qualche i, ma qualunque sia i si ha $p^i\{1\} \neq 0$ e ciò permette di concludere la dimostrazione. **CVD** ■

Abbiamo quindi mostrato che tramite gli algoritmi di Witt si costruisce un funtore $\mathbf{W}(-)$ che associa ad ogni anello di caratteristica $p > 0$ un anello di caratteristica zero. Analogamente, i vettori di Witt di lunghezza finita definiscono dei funtori dalla categoria degli anelli di caratteristica $p > 0$ a quella degli anelli di caratteristica p^n. È lasciato al lettore attento il compito di verificare che ogni omomorfismo di anelli $\alpha : A \to A'$, applicato sulle componenti dei vettori di Witt definisce un omomorfismo di anelli $\mathbf{W}(\alpha) : \mathbf{W}(A) \to \mathbf{W}(A')$.

Enunciamo due ulteriori proprietà degli operatori fondamentali sui vettori di Witt, la prima delle quali è valida quando A è un anello di caratteristica p.

(xi) *F è un endomorfismo dell'anello* $\mathbf{W}(A)$;

(xii) *V è iniettivo.*

Proseguiamo nella nostra analisi delle relazioni tra gli anelli di caratteristica p ed i loro anelli di vettori di Witt e cominciamo con un utile lemma.

1.12 Proposizione. *Siano X ed Y in $\mathbf{W}(B \otimes_{\mathbb{Z}} B)$ come sopra, e siano dati due interi $i \leq j$ non-negativi; allora*

$$(xiii)\ (V^iX)(V^jY) \equiv V^{i+j}[(F^jX)(F^iY)] \bmod p(B \otimes_{\mathbb{Z}} B).$$

dim. È facile osservare che, se $n < i + j$, allora $P_n((V^iX);(V^jY)) \equiv 0 \bmod p(B \otimes B)$. Supponiamo allora che si abbia $n \geq i+j$, e consideriamo la seguente catena di congruenze:

$$\begin{aligned}\phi_n((V^iX)(V^jY)) = \phi_n(V^iX)\,\phi_n(V^jY) &\overset{(ii)}{=} p^{i+j}\phi_{n-i}(X)\phi_{n-j}(Y) \equiv \\ &\overset{(i)}{\equiv} (\bmod p^{n+1}B)\ p^{i+j}\phi_{n-i-j}(F^jX)\phi_{n-i-j}(F^iY) = \\ &= p^{i+j}\phi_{n-i-j}(F^jX\,F^iY) \overset{(ii)}{=} \phi_n(V^{i+j}[(F^jX)(F^iY)]).\end{aligned}$$

In base al *Lemma 1.7* siamo in grado di concludere. **CVD** ∎

Enunciamo l'analoga formula per i Vettori di Witt di lunghezza finita, che si può dimostrare allo stesso modo di $(xiii)$.

$$(xiii\ bis)\ (V^iX)(\rho_{j-i}(V^jY)) \equiv \rho_j V^{i+j}[(F^jX)(F^iY)] \bmod p(B\otimes B).$$

Siamo quindi in grado di dimostrare un risultato sulla struttura degli anelli di vettori di Witt

1.13 Teorema. *Sia A un dominio di integrità di caratteristica $p>0$. Allora*

(a) $\mathbf{W}(A)$ è un dominio di integrità di caratteristica zero;

(b) i sottogruppi $V^n\mathbf{W}(A)$ sono ideali in $\mathbf{W}(A)$ e formano un sistema fondamentale di intorni di zero, rispetto a cui $\mathbf{W}(A)$ è un anello topologico completo;

(c) un vettore ξ è invertibile in $\mathbf{W}(A)$ se, e solo se, la sua componente zerea x_0 è invertibile in A.

dim. *(a).* Siano $\hat\xi, \hat\eta \in \mathbf{W}(A)$ due vettori non nulli. Allora, esistono due interi non negativi i e j massimi rispetto alla condizione $V^i\xi = \hat\xi$ e $V^j\eta = \hat\eta$, per opportuni ξ, $\eta \in \mathbf{W}(A)$. Ciò implica, in particolare, che le componenti zeree x_0 ed y_0 di ξ ed η rispettivamente, sono entrambe non nulle. In forza della *Proposizione 1.12*, si ha: $\hat\xi\hat\eta = (V^i\xi)(V^j\eta) = V^{i+j}[(F^j\xi)(F^i\eta)] \neq 0$, perchè la componente zerea del prodotto $(F^j\xi)(F^i\eta)$ è $x_0^{p^j}y_0^{p^i} \neq 0$.

(b). Dalle proprietà (iii) e $(xiii)$ discende che i sottogruppi $V^n\mathbf{W}(A)$ sono ideali in $\mathbf{W}(A)$ ed è immediato verificare che formano un sistema fondamentale di intorni di zero. Inoltre, dal fatto che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V^n\mathbf{W}(A) = (0)$, discende che la topologia è separata (o di Hausdorff). Consideriamo ora una successione di Cauchy $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per la topologia in questione. La condizione di Cauchy, dice che, fissato comunque un intero positivo r, esiste un indice n_0 tale che, per $n \geq n_0$, si abbia $\xi_n - \xi_{n_0} \in V^r\mathbf{W}(A)$. Ovvero le prime r componenti di ogni vettore ξ_n, con $n \geq n_0$, sono uguali alle prime r componenti di ξ_{n_0}. L'arbitrarietà di r permette di concludere che le successioni delle componenti dei vettori della successione sono tutte stazionarie e quindi che la successione converge ad un vettore $\xi \in \mathbf{W}(A)$.

(c). In base a (1.2) e (1.3) si ha che, se ζ è invertibile in $\mathbf{W}(A)$, allora la sua componente zerea z_0 è invertibile in A. Viceversa, se la componente zerea z_0 di un vettore ζ è invertibile in A, allora $1 - \{z_0^{-1}\}\zeta = V\eta$, per qualche $\eta \in \mathbf{W}(A)$; e quindi la serie

$$(1-V\eta)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(V\eta)^i = \sum_{i=0}^{\infty} V^i(F^{i-1}\eta^i)$$

converge in $\mathbf{W}(A)$ perchè $\lim_{i\to\infty} V^i(F^{i-1}\eta^i) = 0$. Si conclude che $\zeta^{-1} = \{z_0^{-1}\}(1-V\eta)^{-1} \in \mathbf{W}(A)$. **CVD** ■

Se A è un anello integro di caratteristica $p > 0$, si può definire l'applicazione

$$v\colon \mathbf{W}(A) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

ponendo :

$$v(x) = \begin{cases} \max\{\, n \in \mathbb{N} \,|\, x \in V^n\mathbf{W}(A)\,\} & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases} . \tag{1.14}$$

In tal modo si definisce una valutazione sul campo $K = Fr(\mathbf{W}(A))$; tale valutazione è discreta e $\mathbf{W}(A)$ è contenuto nell'anello di valutazione $R_v = \{x \in K | v(x) \geq 0\}$ di K; in particolare, se A è un corpo perfetto, allora $\mathbf{W}(A)$ coincide con l'anello di valutazione , e $V\mathbf{W}(A) = p\mathbf{W}(A)$ è l'ideale della valutazione $m_v = \{x \in K|v(x) > 0\}$. Precisamente, vale la seguente

1.15 Proposizione. *Siano A un dominio di integrità di caratteristica $p > 0$, $K = Fr(\mathbf{W}(A))$ e si indichi con v la valutazione definita in* (1.14). *Allora l'anello di valutazione $R_v = \{x \in K|v(x) \geq 0\}$ è uguale a $\mathbf{W}(A)$ se, e solo se, A è un corpo perfetto. In tal caso, il corpo residuo $k_v = R_v/m_v$ coincide con A.*

dim. Sia A un corpo perfetto; in tal caso $F\mathbf{W}(A) = \mathbf{W}(A)$; ovvero il Frobenius è un automorfismo dell'anello dei vettori di Witt. Sia poi $z \in K$ con $v(z) \geq 0$ e sia $z = \frac{x}{y}$ con $x, y \in \mathbf{W}(A)$. In particolare, possiamo scrivere $x = p^n x'$ ed $y = p^m y'$ con $x', y' \in \mathbf{W}(A)$ ed ivi invertibili (cf. *Teorema 1.13*), per due interi opportuni $n \geq m$. Da ciò si deduce che $z = p^{n-m}x'y'^{-1}$ ed $x'y'^{-1} \in \mathbf{W}(A)$; quindi $z \in \mathbf{W}(A)$.

Viceversa, se $R_v = \mathbf{W}(A)$ ed $x_0 \neq 0$ è un elemento di A; l'elemento $\{x_0\}$ appartiene ad R_v, ma non all'ideale massimale m_v ed è quindi invertibile in R_v. Posto inoltre: $z = \frac{V\{x_0\}}{V\{1\}}$ si ha $v(z) = 0$ e quindi $z \in \mathbf{W}(A) = R_v$. Ricordando che $V\{1\} = VF\{1\} = p$, se ne deduce che $V\{x_0\} = pz$ e, quindi, poichè V è iniettivo (cf. (xii)), se ne deduce che $\{x_0\} = Fz$ e, quindi che $x_0 = z_0^p$ ove z_0 è la componente zerea di z. Dunque A è perfetto ed il corpo residuo $k_v = R_v/m_v$ coincide con $\mathbf{W}(A)/V\mathbf{W}(A) = A$. **CVD** ■

Siamo quindi in grado di dare una descrizione dei corpi valutati completi relativamente ad una valutazione discreta, il cui corpo residuo sia perfetto. Cominciamo a distinguere due classi di valutazioni.

1.16 Definizione. Sia C un corpo valutato di caratteristica $p \geq 0$. La valutazione si dirà *equicaratteristica* se il corpo residuo k_v ha la stessa caratteristica p di C. La valutazione si dirà *eterocaratteristica* altrimenti.

È chiaro che una valutazione eterocaratteristica può presentarsi solo su un campo C di caratteristica 0, in quanto, l'esistenza dell'omomorfismo di riduzione da $R_v \subset C$ su k_v, impone che la caratteristica del corpo residuo sia un divisore della caratteristica del campo C. In particolare, se la valutazione su C è eterocaratteristica, allora esiste un unico primo razionale $p \in \mathbb{Q} \subseteq C$ per cui si abbia $v(p) > 0$.

1.17 Lemma. *Sia C un corpo completo rispetto ad una valutazione discreta, normalizzata v, di corpo residuo perfetto k_v, di caratteristica $p > 0$. Infine, indichiamo con $\sigma: R_v \to k_v$ l'omomorfismo di riduzione modulo l'ideale massimale m_v. Allora esiste un unico sottoinsieme moltiplicativamente chiuso $T \subset R_v$ i cui elementi sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi del corpo residuo k_v tramite σ. Infine*

$$T = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_v^{p^n} = \{\, x \in R_v \,:\, \forall n \in \mathbb{N},\ \exists y_n \in R_v, \quad x = y_n^{p^n} \,\}.$$

dim. Dimostriamo che l'insieme T descritto sopra soddisfa alle condizioni del Lemma. Verifichiamo innanzitutto che la restrizione di σ a T è suriettiva. Sia a un elemento del corpo residuo k_v; allora, poichè k_v è perfetto, per ogni intero $n \geq 0$ esiste un elemento $b_n \in R_v$ tale che $\sigma(b_n) = a^{p^{-n}}$. Osserviamo che, in base alla definizione della sequenza dei b_n, si ha $b_{n+1}^p \equiv b_n \bmod m_v$ e quindi $b_{n+1}^{p^{n+1}} \equiv b_n^{p^n} \bmod m_v^n$ (cf. la dimostrazione del *Lemma 1.7*). Ciò implica che $v(b_{n+1}^{p^{n+1}} - b_n^{p^n}) \geq n$ e quindi che la successione $(b_n^{p^n})_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa alla condizione di Cauchy in R_v e perciò converge ad un elemento $b \in T$. In particolare, per un tale elemento b si ha $\sigma(b) = a$ essendo $\sigma(b_n^{p^n}) = a$ per ogni n.

Mostriamo ora che la restrizione di σ a T è iniettiva. Se c fosse un altro elemento di T per cui $\sigma(c) = a$, allora si consideri una successione di elementi $y_n \in R_v$ tali che $y_n^{p^n} = c$ al variare di n. Allora, per ogni valore di n si ha che $y_n^{p^n} = c \equiv b_n^{p^n} \bmod m_v^n$, e quindi

$$c = \lim_{n\to\infty} y_n^{p^n} = \lim_{n\to\infty} b_n^{p^n} = b.$$

La verifica che T sia moltiplicativamente chiuso discende senza difficoltà dalla definizione stessa. **CVD** ∎

Gli elementi del sottoinsieme T descritto nel Lemma precedente sono chiamati i *rappresentanti di Teichmüller* degli elementi di k_v.

1.18 Teorema. *Poniamoci nelle ipotesi del Lemma precedente e supponiamo inoltre che la valutazione v sia equicaratteristica. Allora T è un sottocorpo di C e $C \cong T((x))$, ove x è un qualunque elemento di m_v, di valore minimo. Infine, T contiene ogni sottocorpo perfetto di R_v.*

dim. È sufficiente osservare che T è chiuso rispetto alla somma perchè C ha caratteristica $p > 0$. Fissato un elemento $x \in m_v$ di valore minimo, si costruisce con un procedimento di approssimazioni successive un isomorfismo tra R_v e $T[\![x]\!]$ nel modo seguente: se $b \in R_v$ sia b_0 l'elemento di T tale che $\sigma(b) = \sigma(b_0)$. Allora $b - b_0 \in m_v$ e quindi $\beta_1 = x^{-1}(b - b_0)$ appartiene ad R_v e perciò esiste un unico elemento $b_1 \in T$ tale che $\sigma(\beta_1) = \sigma(b_1)$. Se ne deduce che $b - b_0 - b_1 x \in m_v^2$ e, proseguendo in questo modo, si ottiene una successione di elementi $b_n \in T$ tali che, qualunque sia n, si abbia

$$b \equiv b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \mod m_v^{n+1}.$$

L'isomorfismo (di anelli topologici) $\phi' : R_v \to T[\![x]\!]$, definito da $\phi'(b) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$, si estende ad un isomorfismo $\phi : C \to T(\!(x)\!)$ nel modo seguente: dato un elemento $c \in C$, sia $m \geq 0$ un intero tale che $x^m c \in R_v$, quindi si ponga $\phi(c) = x^{-m}\phi'(x^m c)$. Infine, se K è un sottocorpo perfetto di R_v, allora per ogni elemento $y \in K$ esiste un elemento $z \in K$ tale che $y = z^p$ e perciò $K \subseteq T$. **CVD** ■

1.19 Teorema. *Poniamoci nelle ipotesi del Lemma 1.17 e supponiamo inoltre che la valutazione v sia eterocaratteristica e non–ramificata ($m_v = pR_v$). Allora, posto $W = \mathbf{W}(k_v)$, vi è un isomorfismo bicontinuo $\tau: W \to R_v$, che associa al vettore $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots) \in W$ l'elemento*

$$\tau(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} p^j x_j^{p^{-j}} \in R_v,$$

ove $x_j \in T$ e $\sigma(x_j) = \xi_j$.

dim. Osserviamo che, qualunque sia $\xi \in W$, la serie $\sum_{j=0}^{\infty} p^j x_j^{p^{-j}}$ converge in R_v perchè $v(p) = 1$. Inoltre la definizione di τ è ben posta in quanto σ induce una biiezione tra T ed il corpo residuo. Con il procedimento di approssimazioni successive descritto nella dimostrazione precedente, si può associare ad ogni elemento di R_v una serie del tipo descritto nell'enunciato e quindi un vettore di Witt a componenti in k_v; ciò permette di affermare che τ è una biiezione tra W ed R_v. Bisogna verificare che si tratta di un isomorfismo.

Dato un vettore $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots) \in W$, sia $\tau(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} p^j x_j^{p^{-j}}$, e si osservi che $x = (x_0, x_1, \dots)$ può essere visto come un elemento di $\mathbf{W}(R_v)$. Inoltre, poichè R_v ha caratteristica 0, han senso in tale anello le componenti fantasma degli elementi di $\mathbf{W}(R_v)$, ed in particolare l'applicazione τ, si può scrivere come

$$\tau(\xi) = \lim_{n \to \infty} \phi_n(F^{-n} x).$$

Siano quindi ξ, η e $\zeta = \xi + \eta$ in W, e siano x, y e z i corrispondenti elementi di $\mathbf{W}(R_v)$, ottenuti nel modo descritto sopra. Poichè F è un automorfismo dell'anello W (cf. (xi)), dalla relazione $F^{-n}\xi + F^{-n}\eta = F^{-n}\zeta$, valida in W qualunque sia l'intero n, si ricava che le componenti dei vettori x, y e z soddisfano alle relazioni

$$(F^{-n}x + F^{-n}y)_m \equiv (F^{-n}z)_m \bmod m_v$$

qualunque siano $m \geq 0$ ed $n \in \mathbb{Z}$. Tramite il *Lemma 1.7*, si deduce

$$\phi_n(F^{-n}x) + \phi_n(F^{-n}y) = \phi_n(F^{-n}x + F^{-n}y) \equiv \phi_n(F^{-n}z) \bmod m_v^n.$$

Passando al limite, questa congruenza diventa la relazione $\tau(\xi) + \tau(\eta) = \tau(\xi + \eta)$ in R_v. La verifica che τ rispetta il prodotto procede in modo analogo. Infine, ricordando la valutazione v_W su W definita in (1.14), si osservi che $v_W(\xi) = v(\tau(\xi))$, qualunque sia $\xi \in W$ e ciò permette di concludere che τ è un isomorfismo bicontinuo. **CVD** ■

Il Teorema appena dimostrato ha alcune interessanti conseguenze; la prima delle quali permette di introdurre una ulteriore notazione per i vettori di Witt. Nell'isomorfismo tra $W = \mathbf{W}(k_v)$ e l'anello di valutazione R_v i rappresentanti di Teichmüller in R_v corrispondono ai vettori del tipo $\{x\} = (x, 0, 0, \dots)$ e quindi ogni vettore $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots) \in W$ si può scrivere nella forma

(1.20) *(rappresentazione di Teichmüller)* $$\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots) = \sum_{j=0}^{\infty} p^j \{\xi_j^{p^{-j}}\}.$$

Questa rappresentazione può essere usata per vettori di Witt ad elementi in qualunque anello perfetto di caratteristica $p > 0$, e la somma converge nella topologia determinata dalla valutazione definita in (1.14).

Una conseguenza del *Teorema 1.19* sulla struttura del campo C può essere sintetizzata nel seguente

1.21 Corollario. *Nelle ipotesi del Lemma 1.17 esiste un unico automorfismo continuo F_C del campo C, soddisfacente alle condizioni:*

(a) $F_C(x) \equiv x^p \bmod (m_v)$ per ogni $x \in R_v$;

(b) $F_C(p) = p$.

2. Covettori e Bivettori

Sia k un corpo perfetto di caratteristica $p > 0$; in questa sezione vogliamo estendere opportunamente le operazioni di Witt in modo da associare a certe k-algebre R dei moduli sull'anello $\mathbf{W}(k)$.

Cominciamo con dei lemmi sui polinomi di Witt tratti da [FO1], che saranno utili per le successive costruzioni.

2.1 Lemma. *Si consideri l'anello $\mathbb{Z}[(X_{-n})_{n\in\mathbb{N}}, (Y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}]$, ove $(X_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ ed $(Y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sono successioni di indeterminate e si indichi con I_r l'ideale generato dalle indeterminate X_{-j}, Y_{-j} con $j \geq r$. Allora, per ogni coppia di interi $r, s \geq 1$, vale la relazione*

$$S_m(X_{-m-1},\dots,X_{-1};Y_{-m-1},\dots,Y_{-1}) \equiv$$
$$\equiv S_{m+1}(X_{-m-2},\dots,X_{-1};Y_{-m-2},\dots,Y_{-1}) \mod I_r^s,$$

ove $m \geq r-1$ se $s < p$, oppure $m \geq r - 1 + \frac{s-p}{p-1}$ se $s \geq p$.

dim. Ricordiamo che, qualunque sia $n \geq 0$, se si attribuisce peso p^j alle variabili X_j ed Y_j, i polinomi $S_n(X_0,\dots,X_n;Y_0,\dots,Y_n)$ sono isobarici, di peso p^n (cf.*Proposizione 1.4*). Inoltre, come mostrato nella *Proposizione 1.6.(iii)*, per ogni $n \geq 0$, si ha

$$S_{n+1}(0,X_0,\dots,X_n;0,Y_0,\dots,Y_n) = S_n(X_0,\dots,X_n;Y_0,\dots,Y_n).$$

Se ne deduce che la differenza

$$T_m = S_m(X_{-m-1},\dots,X_{-1};Y_{-m-1},\dots,Y_{-1}) - S_{m+1}(X_{-m-2},\dots,X_{-1};Y_{-m-2},\dots,Y_{-1})$$

è combinazione di monomi del tipo $X_{-m-2}^{\lambda_0}Y_{-m-2}^{\mu_0}X_{-m-1}^{\lambda_1}Y_{-m-1}^{\mu_1}\cdots X_{-1}^{\lambda_{m+1}}Y_{-1}^{\mu_{m+1}}$, ove λ_i e μ_j sono interi non negativi e, posto $\nu_i = \lambda_i + \mu_i$ per ogni i, si ha

$$\nu_0 + p\nu_1 + \cdots + p^{m+1}\nu_{m+1} = p^{m+1}, \quad \text{con } \nu_0 \neq 0. \tag{2.2}$$

In particolare, per $0 \leq t \leq m$, si ha che p^{t+1} divide $\nu_0 + p\nu_1 + \cdots + p^t\nu_t$ e quindi è sufficiente dimostrare che, sotto tali ipotesi, si ha

$$\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_t \geq t(p-1) + p. \tag{2.3}$$

Infatti, da (2.3) si deduce che $T_m \in I_{m+1-t}^{t(p-1)+p}$, ed è quanto volevamo. Infatti, per $t = 0$ si ha $T_m \in I_{m+1}^p$, che è la tesi per $s < p$; se poi $s \geq p$ ed $m \geq r - 1 + \frac{s-p}{p-1}$ come nell'enunciato, posto $t = m+1-r$, si ha $T_m \in I_r^{t(p-1)+p} \subset I_r^s$, perchè $t(p-1)+p \geq s$.

Resta quindi da dimostrare che (2.2) $\Rightarrow$ (2.3). Ciò si ottiene facendo induzione su t. Infatti, la tesi è vera se $t = 0$ e perciò supponiamo $t > 0$ e che, per ogni t–upla di interi non negativi $(w_0, w_1, \cdots, w_{t-1})$, tale che $w_0 > 0$ e p^t divida $w_0 + pw_1 + \cdots + p^{t-1}w_{t-1}$, si abbia $w_0 + w_1 + \cdots + w_{t-1} \geq (t-1)(p-1) + p$.

Poichè p^{t+1} divide $\nu_0 + p\nu_1 + \cdots + p^t\nu_t$ e $\nu_0 > 0$, si ha $\nu_0 = pu_0$, con $u_0 \neq 0$. Se si pone

$$w_0 = u_0 + \nu_1 \qquad \text{e} \qquad w_i = \nu_{i+1} \quad \text{per } i = 1, \ldots, t-1,$$

si può applicare l'ipotesi induttiva alla t–upla di interi non negativi $(w_0, w_1, \cdots, w_{t-1})$ ed ottenere

$$(t-1)(p-1) + p \leq w_0 + w_1 + \cdots + w_{t-1} = \nu_0/p + \nu_1 + \cdots + \nu_t,$$

da cui si deduce (2.3). **CVD** ■

In modo analogo si dimostra il seguente

2.4 Lemma. *Sia k un corpo perfetto di caratteristica $p > 0$. Si consideri l'anello di polinomi $k[(Y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}]$, ove $(Y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di indeterminate, e si indichi con J_r l'ideale $(Y_{-r}, Y_{-r-1}, \ldots)$. Sia inoltre $x = (x_0, x_1, \ldots) \in \mathbf{W}(k)$; allora, per ogni coppia di interi $r, s \geq 1$, vale la relazione*

$$\begin{aligned} P_m(x_0^{p^{-m}}, \ldots, x_m^{p^{-m}}; Y_{-m-1}, \ldots, Y_{-1}) \equiv \\ \equiv P_{m+1}(x_0^{p^{-m-1}}, \ldots, x_{m+1}^{p^{-m-1}}; Y_{-m-2}, \ldots, Y_{-1}) \mod J_r^s, \end{aligned}$$

ove $m \geq r-1$ se $s < p$, oppure $m \geq r - 1 + \frac{s-p}{p-1}$ se $s \geq p$.

dim. Dalla semilinearità del Verschiebung (cf. *Proposizione 1.12.(xiii)* con $i = 0$) discende la relazione

$$\begin{aligned} P_m(x_0^{p^{-m}}, \ldots, x_m^{p^{-m}}; Y_{-m-1}, \ldots, Y_{-1}) = \\ = P_{m+1}(x_0^{p^{-m-1}}, \ldots, x_{m+1}^{p^{-m-1}}; 0, Y_{-m-1}, \ldots, Y_{-1}). \end{aligned}$$

Inoltre, se si dà peso p^j alle variabili Y_j, i polinomi $P_m(x_0^{p^{-m}}, \ldots, x_m^{p^{-m}}; Y_0, \ldots, Y_m)$ sono isobarici, di peso p^m; si deduce che la differenza tra i due polinomi dell'enunciato è combinazione lineare di monomi del tipo $Y_{-m-2}^{\nu_0} Y_{-m-1}^{\nu_1} \cdots Y_{-1}^{\nu_{m+1}}$, ove $\nu_0 + p\nu_1 + \cdots + p^{m+1}\nu_{m+1} = p^{m+1}$ e $\nu_0 \neq 0$. Si può quindi concludere come nella dimostrazione del lemma precedente. **CVD** ■

Siamo quindi in grado di dare la definizione e le prime proprietà dei Covettori di Witt.

2.5 Definizione. Sia S una k-algebra (commutativa). I *covettori di Witt* (discreti) a componenti in S sono gli elementi dell'insieme

$$CW^d(S) = \{(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \exists(i,j),\ (x_{-j}, x_{-j-1}, \dots)^i = 0\},$$

ove $(x_{-j}, x_{-j-1}, \dots)^i$ indica l'i-esima potenza dell'ideale di S generato dalle componenti x_h con $h \leq -j$.

In realtà l'insieme $CW^d(S)$ è un $\mathbf{W}(k)$-modulo, come andiamo a dimostrare nel seguente Teorema (cf. il Teorema 1.1 di [MA]).

2.6 Teorema. *L'insieme $CW^d(S)$ è un $\mathbf{W}(k)$-modulo tramite le operazioni definite di seguito.*

(i) *Se $x = (x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ ed $y = (y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sono due covettori, il covettore $x + y = (z_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ è definito ponendo*

$$z_{-n} = \lim_{m\to\infty} S_m(x_{-m-n}, \dots, x_{-n}; y_{-m-n}, \dots, y_{-n}).$$

(ii) *Se $y = (y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ è un covettore ed $a = (a_0, a_1, \dots) \in \mathbf{W}(k)$, il covettore $ay = (u_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ è definito ponendo*

$$u_{-n} = \lim_{m\to\infty} P_m(a_0^{p^{-m-n}}, \dots, a_m^{p^{-m-n}}; y_{-m-n}, \dots, y_{-n}).$$

(iii) *Il modulo $CW^d(S)$ è dotato di due endomorfismi semilineari F e V, così definiti*

$$\begin{aligned} (Frobenius) \quad & F(\dots, y_{-2}, y_{-1}) = (\dots, y_{-2}^p, y_{-1}^p) \\ (Verschiebung) \quad & V(\dots, y_{-2}, y_{-1}) = (\dots, y_{-3}, y_{-2}) \end{aligned}$$

ove $F(ay) = F(a)F(y)$ e $V(ay) = F^{-1}(a)V(y)$, per ogni $a \in \mathbf{W}(k)$ ed $y \in CW^d(S)$.

(iv) *Infine, se S ed S' sono due k-algebre ed $\alpha\colon S \to S'$ un omomorfismo di k-algebre, l'applicazione*

$$CW^d(\alpha)\colon CW^d(S) \to CW^d(S'), \quad (x_{-n})_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\alpha(x_{-n}))_{n\in\mathbb{N}}$$

è un omomorfismo di $\mathbf{W}(k)$-moduli.

dim. Dai *Lemmi 2.1* e *2.3* e dalla definizione di covettore discende che le due successioni i cui limiti definiscono le operazioni in $CW^d(S)$ sono entrambe stazionarie e quindi tali limiti esistono in S. Che in tal modo si definisca una struttura di modulo su $CW^d(S)$ è conseguenza del fatto che i polinomi di Witt definiscono una struttura di anello. Sono sempre conseguenza delle proprietà dei polinomi di Witt l'esistenza e le proprietà dell'endomorfismo di Frobenius e del Verschiebung. **CVD** ■

Osserviamo a margine che, in base alle definizioni date, $CW^d(\ )$ è un funtore dalla categoria delle k-algebre alla categoria dei $\mathbf{W}(k)$-moduli. In particolare, se S è una k-algebra perfetta –ovvero l'applicazione $a \mapsto a^p$ è un isomorfismo– allora $CW^d(S)$ è in modo naturale anche un $\mathbf{W}(S)$-modulo.

2.7 Osservazione. La definizione di covettore (discreto) richiede che un certo ideale dell'anello S sia nilpotente e tale condizione è particolarmente restrittiva; ad esempio, se la k-algebra S è integra, l'unico ideale con tale proprietà è l'ideale banale e quindi ogni covettore $y = (y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ ad elementi in S deve soddisfare alla condizione $y_{-h} = 0$ per $h \gg 0$ (*covettore speciale*). Lasciamo al lettore interessato il compito di verificare che, per una qualsiasi k-algebra S, i covettori speciali formano un sottomodulo $CW^s(S)$ di $CW^d(S)$.

Se M è un $\mathbf{W}(k)$-modulo ed i un numero intero, indichiamo con $M^{(i)}$ il modulo che si ottiene modificando gli scalari tramite l'omomorfismo F^i; ovvero, definendo la moltiplicazione tra $a \in \mathbf{W}(k)$ ed $m \in M$ come $am := F^i(a)m$, ove a destra del segno di uguale si utilizza la struttura di modulo fissata su M. Si può verificare che si ha l'isomorfismo

$$CW^s(S) \cong \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{W}_n(S)^{(-n)},$$

ove le freccie di connessione nel limite inverso sono date dal Verschiebung tra Vettori di Witt di lunghezza finita $V\colon \mathbf{W}_n(S)^{(-n)} \to \mathbf{W}_{n+1}(S)^{(-n-1)}$, che è un'applicazione *lineare* rispetto alle strutture di modulo fissate.

Vogliamo quindi estendere la definizione di covettore in modo da ottenere covettori non-speciali ad elementi in opportune k-algebre topologiche. Cominciamo quindi col definire la categoria di algebre a cui siamo interessati.

2.8 Definizione. Sia k un corpo perfetto di caratteristica $p > 0$. Indichiamo con L_k la categoria di tutte le k-algebre linearmente topologizzate, separate e complete. In particolare, se R è un oggetto di L_k ed Ω_R indica un insieme fondamentale di intorni di zero in R fatto di ideali, la completezza di R implica che

$$R \cong \varprojlim_{I\in\Omega_R} R/I,$$

ove su R/I si ponga la topologia discreta.

Diamo quindi la definizione di covettori a componenti in un anello R in L_k.

2.9 Definizione. Sia k un corpo perfetto di caratteristica $p > 0$ e sia R un oggetto di L_k. I *covettori di Witt* a componenti in R sono gli elementi del modulo

$$CW(R) = \varprojlim_{I \in \Omega_R} CW^d(R/I),$$

ove le freccie di connessione sono indotte dalle proiezioni naturali su quozienti successivi di R. Le operazioni di modulo si ottengono ugualmente come limiti inversi.

Dalla completezza di R discende gli elementi di $CW(R)$ si possono ancora scrivere come covettori ad elementi in R e che le componenti della somma di due covettori o del prodotto di un vettore per un covettore si ottengono tramite i limiti descritti nel *Teorema 2.6*, in particolare, la successione $y = (y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ ad elementi in R è un covettore se è verificata la condizione

(CW) *per ogni ideale aperto I di R esistono degli interi i, j tali che la potenza i-esima dell'ideale generato dagli y_{-n} con $n \geq j$ sia contenuta in I.*

Anche in $CW(R)$ sono definiti gli omomorfismi semilineari F (Frobenius) e V (Verschiebung), come nell'enunciato del *Teorema 2.6.(iv)* e si ha la relazione fondamentale

$$FV = VF = p,$$

analoga a quella valida per i vettori di Witt (cf. *Proposizione 1.9.(x)*).

Osserviamo che i *covettori speciali* a componenti in R, ovvero i covettori $(y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$, soddisfacenti alla condizione

$$y_{-h} = 0 \quad \text{per ogni } h \gg 0 \tag{2.10}$$

formano ancora un sotto-$\mathbf{W}(k)$-modulo del modulo $CW(R)$. In generale, si ha l'inclusione

$$CW^s(R) \subset \varprojlim_{I \in \Omega_R} CW^s(R/I),$$

ma non vale l'uguaglianza.

2.11 Esempi. (a) Se k è pensato come elemento di L_k ponendo la topologia discreta (0 è ideale aperto), allora $CW(k) = CW^d(k) = CW^s(k)$; ovvero i covettori a componenti in k sono tutti e soli i covettori speciali a componenti in k.

(b) Se C è un'estensione di k, dotato di una valutazione v a valori in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, necessariamente equicaratteristica, ma non necessariamente discreta, ed A è l'anello di valutazione di C, allora una successione $y = (y_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ ad elementi in A è un covettore se, e solo se, $\liminf_{n \to \infty} v(y_{-n}) = c > 0$. Infatti, gli ideali aperti $I_r = \{x \in A \,|\, v(x) > r\}$, al variare di r in N, formano un sistema fondamentale di intorni dello zero in A e quindi, se

$y = (y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ è un covettore, fissato un intero positivo r esistono due interi i e j, tali che $y_{-n}^i \in I_r$ per ogni $n \geq j$; ciò implica che per $n \geq j$, si ha $v(y_{-n}) > \frac{r}{i} > 0$ e quindi $\liminf v(y_{-n}) \geq \frac{r}{i} > 0$. Il viceversa è conseguenza del fatto che in $\mathbb{R}$ vale l'assioma di Archimede.

Possiamo dare la definizione dei bivettori di Witt.

2.12 Definizione. Sia R un oggetto di L_k. Utilizzando le notazioni dell'*Osservazione 2.7*, per ogni intero non-negativo n, consideriamo il $\mathbf{W}(k)$-modulo $CW(R)^{(n)}$ e l'applicazione lineare $V: CW(R)^{(n+1)} \to CW(R)^{(n)}$. I *bivettori* (di Witt) sono gli elementi del $\mathbf{W}(k)$-modulo

$$biv(R) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} CW(R)^{(n)}.$$

Gli elementi del modulo $biv(R)$ possono essere rappresentati da successioni $y = (y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, ove il covettore $y^{(<r)} = (\dots, y_{r-2}, y_{r-1})$ è la proiezione di y su $CW(R)^{(r)}$, per ogni $r \geq 0$. Inoltre il modulo $biv(R)$ è dotato dei due endomorfismi F e V che si ottengono passando al limite gli analoghi endomorfismi dei covettori; in particolare, si ha

$$F(\dots, x_n, x_{n+1}, \dots) = (\dots, x_n^p, x_{n+1}^p, \dots) \qquad V(\dots, x_n, x_{n+1}, \dots) = (\dots, x_{n-1}, x_n, \dots)$$

ove il Verschiebung è biiettivo e anche in $biv(R)$ vale la relazione fondamentale $FV = VF = p$.

In analogia con quanto fatto per i vettori di Witt quando l'anello R è una k-algebra perfetta (cf. (1.20)), si può introdurre anche per i bivettori la *rappresentazione di Teichmüller* e scrivere

$$y = (y_j)_{j\in\mathbb{Z}} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} p^j \{y_j^{p^{-j}}\},$$

ove $\{y\}$ denota il bivettore con l'unica componente non-nulla uguale ad y nel posto di indice 0.

Introduciamo un'ulteriore notazione che ci sarà utile nel seguito: se $x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ è un bivettore ed r è un qualsiasi numero intero, si definiscono la *r-testa* e la *r-coda* del bivettore x, come i bivettori

$$\begin{aligned} &(r\text{-testa}) \quad x^{(\geq r)} = x^{(>r-1)} = (\dots, 0, x_r, x_{r+1}, \dots) \\ &(r\text{-coda}) \quad x^{(<r)} = x^{(\leq r-1)} = (\dots, x_{r-2}, x_{r-1}, 0, \dots), \end{aligned} \tag{2.13}$$

ed osserviamo che, per ogni intero r, vale la relazione $x = x^{(<r)} + x^{(\geq r)}$ che è di immediata verifica utilizzando la rappresentazione di Teichmüller.

Come per i covettori, possiamo parlare di *bivettori speciali* quando una tra le code è uguale a 0 (il bivettore con tutte le componenti nulle); anche i bivettori speciali formano un sottomodulo $biv^s(R) \subset biv(R)$, isomorfo al limite inverso dei sottomoduli di covettori speciali. In particolare, tutti i bivettori che coincidono con la loro 0-testa definiscono un sottomodulo di $biv^s(R)$, isomorfo a $\mathbf{W}(R)$ che identificheremo con tale anello. Infine si osservi che valgono gli isomorfismi di $\mathbf{W}(k)$-moduli

$$CW(R) \cong biv(R)/\mathbf{W}(R) \qquad \text{e} \qquad CW^s(R) \cong biv^s(R)/\mathbf{W}(R).$$

Sul modulo $biv(R)$ si possono porre diverse topologie che rendano "convergente" la rappresentazione di Teichmüller dei bivettori. Cominciamo col definire la topologia introdotta da Barsotti come la "topologia canonica" dei bivettori. Nel seguito, per particolari anelli di coefficienti, introdurremo una topologia più fine della topologia canonica di Barsotti che però indurrà una topologia equivalente sui vettori di Witt.

2.14 Definizione. Sia R in L_k una k-algebra perfetta. La *topologia canonica* in $biv(R)$ ha come sistema fondamentale di intorni dello zero i sottomoduli

$$U(I,m) = \{\, x \in biv(R) \,|\, n \leq m \Rightarrow x_n^{p^{-n}} \in I \,\},$$

al variare di I in Ω_R e di m in $\mathbb{Z}$.

Esprimiamo tramite la rappresentazione di Teichmüller la condizione di appartenenza di un bivettore ad un intorno di zero in $biv(R)$; infatti, se

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} p^i\{x'_i\} \qquad (\text{ove } x'_i = x_i^{p^{-i}}),$$

allora

$$x = \sum_{i\in\mathbb{Z}} p^i\{x'_i\} \in U(I,m) \Longleftrightarrow x'_i \in I \ \forall i \leq m. \tag{2.15}$$

Vogliamo mostrare alcune facili proprietà della topologia canonica.

2.16 Proposizione. *Sia R una k-algebra perfetta in L_k.*

(a) Il sottomodulo $biv^s(R)$ è denso in $biv(R)$; in particolare, per ogni bivettore $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ si ha

$$y = \lim_{r\to\infty} y^{(>-r)}.$$

(b) Se $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ è un bivettore, la somma $\sum_{n\in\mathbb{Z}} p^n\{y_n^{p^{-n}}\}$ converge ad y in $biv(R)$.

dim. Sia $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un bivettore, allora, fissato comunque un ideale $I \in \Omega_R$, in base alla condizione (CW), esistono due interi i e j tali che $y_{-n}^i \in I$ per ogni $n \geq j$. In particolare, se r è un intero positivo per cui si abbia $r \geq j$ e $p^r \geq i$, allora, per $n \geq r$

si ha che $y_{-n}^{p^n} \in I$. Ciò significa in particolare che, per ogni intero m ed $n \geq r$, si ha $y - y^{(>-n)} = y^{(\leq -n)} \in U(I,m)$ che permette di concludere la dimostrazione di (a). Per quanto riguarda (b), fissato un intorno di zero $U(I,m)$ in $biv(R)$, esiste un intero r tale che, per $j \geq r$ si abbia $y^{(<-j)} \in U(I,m)$ ed inoltre, se $h \geq m$, allora $y^{(>h)} \in U(I,m)$. Dunque, fissato un indice $s > \max\{-m, r\}$, si ha, per $j \geq s$ e $h \geq m$

$$y - \sum_{n=-j}^{h} p^n \{y_n^{p^{-n}}\} = y^{(<-j)} + y^{(>h)} \in U(I,m),$$

che è quanto ci serve per concludere. **CVD** ∎

In generale, il modulo $biv(R)$ non è completo per la topologia canonica ed il suo completamento viene usualmente indicato con il simbolo $Biv(R)$ ("B" maiuscola). Lasciamo al lettore il compito di verificare sulla falsariga dell'*Esempio 2.10.(a)* che, posta su k la topologia discreta, si ha

$$Biv(k) = biv(k) = biv^s(k) \cong Fr(\mathbf{W}(k)).$$

Esempi di moduli di bivettori non completi si possono trovare nel §.11 di [MA] o nel §.1 di [BIV]. In base a quanto detto, diventa utile avere dei criteri per conoscere quando una successione di bivettori converge in $biv(R)$. Nel prossimo numero dimostreremo per particolari anelli di coefficienti un criterio di convergenza in biv per una topologia sui bivettori più fine della topologia canonica (cf. *Teorema 3.18*). Tale criterio adatta a quel contesto il cosiddetto "criterio di convergenza uniforme di Barsotti" (cf. Teorema 2.1 di [MA] o Lemma 4.2.1 di [WR]). Non enunciamo tale criterio nella sua forma generale per evitare di introdurre ulteriori notazioni, necessarie a tale scopo.

Concludiamo questo numero con un'ultima osservazione su $Biv(R)$.

2.17 Proposizione. *Sia R una k-algebra perfetta in L_k. Il prodotto definito in $\mathbf{W}(R)$ si estende ad un prodotto tra bivettori speciali continuo rispetto alla topologia canonica. La sua estensione per continuità induce quindi un prodotto continuo in $Biv(R)$, che rende tale modulo un anello commutativo.*

dim. Siano x ed y due bivettori speciali e siano n ed m due interi non-negativi, tali che $x = V^{-n}x'$ ed $y = V^{-m}y'$,con $x', y' \in \mathbf{W}(R)$. Definiamo il prodotto di questi due bivettori speciali generalizzando la formula $(xiii)$ valida per i vettori di Witt (cf. *Proposizione 1.12*) e poniamo quindi

$$xy = V^{-m-n}[(F^{-m}x')(F^{-n}y')].$$

Usando la rappresentazione di Teichmüller si può ottenere una descrizione più esplicita del prodotto; siano

$$x = \sum_{i>>-\infty}^{+\infty} p^i \{x_i^{p^{-i}}\} \quad \text{ed} \quad y = \sum_{j>>-\infty}^{+\infty} p^j \{y_j^{p^{-j}}\},$$

allora

$$xy = \sum_{h>>-\infty}^{+\infty} p^h \sum_{i+j=h} \{x_i^{p^{-i}} y_j^{p^{-j}}\}.$$

Da tale rappresentazione risulta evidente che, se x è un bivettore speciale in $U(I, m)$ ed y è un bivettore speciale in $U(I', m')$ allora il prodotto xy è in $U(I + I', m + m')$ (cf. *Definizione 2.14*); da cui si deduce che il prodotto di bivettori speciali è continuo. In base alla precedente *Proposizione 2.16.(a)* estendiamo il prodotto per continuità, ponendo per due bivettori ξ ed η (non necessariamente speciali)

$$\xi\eta = \lim_{r\to\infty} \xi^{(>-r)}\eta^{(>-r)}.$$

È sufficiente verificare che tale successione è di Cauchy (e quindi converge in $Biv(R)$). Fissato un intorno di zero $U(I, m)$, esiste un intero (positivo) r_0 tale che $\xi^{(\leq -r_0)}$ ed $\eta^{(\leq -r_0)}$ siano entrambi in $U(I, m)$. Sia $r \geq r_0$, allora si ha

$$\xi^{(\leq -r-1)}\eta^{(\leq -r-1)} = (p^{-r}\{\xi_{-r}^{p^r}\} + \xi^{(\leq -r)})(p^{-r}\{\eta_{-r}^{p^r}\} + \eta^{(\leq -r)})$$

e quindi

$$\begin{aligned} \xi^{(\leq -r-1)}\eta^{(\leq -r-1)} - \xi^{(\leq -r)}\eta^{(\leq -r)} = \\ = p^{-2r}\{\xi_{-r}^{p^r}\eta_{-r}^{p^r}\} + p^{-r}(\{\xi_{-r}^{p^r}\}\eta^{(\leq -r)} + \{\eta_{-r}^{p^r}\}\xi^{(\leq -r)}). \end{aligned}$$

Poichè I è un ideale di R, tutti gli addendi a destra del segno di uguaglianza stanno in $U(I, m)$. **CVD** ■

3. Un anello di Bivettori

In questo numero vogliamo introdurre un anello di Bivettori (cf. [PD]) che sarà l'oggetto fondamentale nel confronto con gli anelli di Fontaine. Sia fissato un corpo perfetto k di caratteristica $p > 0$ ed iniziamo questa sezione introducendo una k-algebra perfetta $\mathcal{R}$, su cui costruiremo poi il modulo dei bivettori. Indichiamo con A l'anello $\mathbf{W}(k)$ e con K il suo corpo delle frazioni ($K = biv(k) = A[\frac{1}{p}]$); siano poi $\bar{K}$ ed $\bar{A}$ la chiusura algebrica di K ed il suo anello degli interi. Poichè K è dotato di una valutazione (discreta), questa di estende in modo naturale a $\bar{K}$, con valori in $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, e definisce su tale corpo una topologia; in particolare, $\bar{A}$ è l'anello di valutazione di $\bar{K}$. Sia C il completamento di $\bar{K}$, rispetto alla topologia della valutazione (C è un campo algebricamente chiuso) ed indichiamo con A_C il suo anello di valutazione. Supporremo che la valutazione

v su C sia normalizzata ponendo $v(p) = 1$. Indichiamo infine con $\mathcal{G}$ il gruppo di Galois $Gal(\bar{K}|K)$, la cui azione su $\bar{K}$, si estende per continuità a C.

La k-algebra a cui siamo interessati è

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{A_C} = \varprojlim_{\mathbb{N}}(A_C/pA_C \xleftarrow{x^p} A_C/pA_C \xleftarrow{x^p} \dots). \tag{3.1}$$

Osserviamo che gli elementi di $\mathcal{R}$ possono essere rappresentati come successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi del quoziente $A_C/pA_C \supset k$ legati dalla relazione $x_n = x_{n+1}^p$, qualunque sia $n \in \mathbb{N}$, e le operazioni su tale anello si effettuano componente per componente. In particolare, da ciò discende che $\mathcal{R}$ è una k-algebra perfetta.

Onde approfondire le nostre conoscenze sull'anello $\mathcal{R}$, introduciamo un'altra notazione per indicare i suoi elementi. L'elemento $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}$ può essere rappresentato dalla successione $x = (\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (da non confondere con un bivettore!), ove $\hat{x}_n$ è definito come segue: se $\tilde{x}_n$ è un qualunque rialzamento ad A_C dell'elemento $x_n \in A_C/pA_C$, al variare di $n \in \mathbb{N}$, si pone

$$\hat{x}_n = \begin{cases} \lim_{m\to\infty} \tilde{x}_{m+n}^{p^m} & \text{se } n \geq 0 \\ \hat{x}_0^{p^{-n}} & \text{se } n < 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

ove il limite nella definizione esiste perchè $\tilde{x}_{m+n} \equiv \tilde{x}_{m+1+n}^p$ modulo pA_C (cf. la dimostrazione del *Lemma 1.7*) e tale limite non dipende dalla scelta degli elementi $\tilde{x}_n$ e si ha $\hat{x}_n = \hat{x}_{n+1}^p$. Osserviamo che, tramite questa nuova rappresentazione degli elementi di $\mathcal{R}$, le operazioni sono definite ponendo

$$(xy)\hat{}_n = \hat{x}_n\hat{y}_n \quad \text{e} \quad (x+y)\hat{}_n = \lim_{m\to\infty}(\hat{x}_{n+m} + \hat{y}_{n+m})^{p^m}. \tag{3.3}$$

Tramite questa rappresentazione si verifica facilmente che $\mathcal{R}$ è integro, perchè A_C lo è e, se $\hat{x}_n = 0$ per qualche intero n, allora $\hat{x}_n = 0$ per ogni n. Inoltre, è definita su $\mathcal{R}$ una valutazione ponendo per $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$,

$$v(x) = v_C(\hat{x}_0) \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}, \tag{3.4}$$

ove v_C indica la valutazione del campo C. Infatti,

$$\begin{aligned} v(x+y) &= v_C((x+y)\hat{_0}) = \lim_{m\to\infty} v_C((\hat{x}_m + \hat{y}_m)^{p^m}) \geq \\ &\geq \lim_{m\to\infty} \min\{p^m v_C(\hat{x}_m), p^m v_C(\hat{y}_m)\} = \\ &= \min\{v_C(\hat{x}_0), v_C(\hat{y}_0)\} = \min\{v(x), v(y)\}; \end{aligned}$$

e inoltre

$$v(xy) = v_C((xy)\hat{_0}) = v_C(\hat{x}_0) + v_C(\hat{y}_0) = v(x) + v(y);$$

ed infine, per quanto già osservato,

$$v(x) = \infty \Leftrightarrow v_C(\hat{x}_0) = \infty \Leftrightarrow \hat{x}_0 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Possiamo infine osservare che questa valutazione si estende al campo delle frazioni $Fr\mathcal{R}$ e che $\mathcal{R}$ coincide con l'anello di valutazione, come si può verificare facilmente rappresentando gli elementi di $Fr\mathcal{R}$ come successioni di elementi di C.

Raccogliamo e completiamo le informazioni sull'anello $\mathcal{R}$ nel seguente enunciato.

3.5 Proposizione. *Notazioni come sopra. L'anello $\mathcal{R}$ è una k-algebra perfetta. Inoltre $\mathcal{R}$ è un anello di valutazione completo rispetto alla valutazione definita in (3.4), con corpo residuo isomorfo a $\bar{k} \cong A_C/m$, ove m è l'ideale massimale di A_C. Infine vi è un'azione naturale di $\mathcal{G}$ su $\mathcal{R}$.*

dim. Resta solo da dimostrare che $\mathcal{R}$ è completo e le affermazioni successive. Per quanto riguarda la completezza, è sufficiente osservare che, se $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ed $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartengono a $\mathcal{R}$

e $v(x-y) > p^j$, per un qualche intero j, allora $x_i - y_i = 0$ in A_C/pA_C per ogni $i \leq j$. Ciò implica che una successione di Cauchy in $\mathcal{R}$ è ivi convergente, componente per componente.

La mappa $\mathcal{R} \to A_C$, che manda $x \mapsto \hat{x}_0$, è suriettiva e invia gli elementi dell'ideale di valutazione $\mathcal{R}^+$ in m. Se ne deduce un omomorfismo suriettivo di anelli da $\mathcal{R}/\mathcal{R}^+$ su $\bar{k} \cong A_C/m$.

Infine, l'azione di $\mathcal{G}$ su $\mathcal{R}$ è definito ponendo, per $x = (\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{R}$ e $\sigma \in \mathcal{G}$, $\sigma(x) = (\sigma(\hat{x}_n))_{n\in\mathbb{Z}}$. Poichè σ è continuo su C, discende da (3.3) che σ agisce come omomorfismo su $\mathcal{R}$. **CVD** ∎

Consideriamo ora l'anello $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ e le famiglie di ideali

$$\begin{aligned} U(a,k) &= \{\, \xi \in \mathbf{W}(\mathcal{R}) \,|\, n < k \Rightarrow v(\xi_n^{p^{-n}}) \geq a \,\}, \quad k \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ W_a &= \{\, \xi \in \mathbf{W}(\mathcal{R}) \,|\, n < a \Rightarrow v(\xi_n^{p^{-n}}) \geq a - n \,\}, \quad a \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dimostreremo nel seguito (cf. *Proposizione 3.7*) che i sottoinsiemi W_a sono effettivamente degli ideali di $\mathbf{W}(\mathcal{R})$, per il momento osserviamo che le topologie lineari su $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ determinate prendendo queste famiglie di ideali come sistemi fondamentali di intorni dello zero, sono tra loro equivalenti ed infatti, posto $[a] = \min\{\, n \in \mathbb{Z} \,|\, n \geq a \,\}$ al variare di a tra i numeri reali positivi, si ha

$$U(a,[a]) \subseteq W_a \qquad \text{e} \qquad W_{m+b} \subseteq U(b,m).$$

Il lettore attento avrà già osservato che la topologia degli $U(a,k)$ coincide con la (restrizione della) topologia canonica di Barsotti (cf. *Definizione 2.14*). Vedremo nel seguito che le topologie date ammettono entrambe un'estensione naturale al modulo dei bivettori, ma le due estensioni non sono più tra loro equivalenti. Nel seguito ci occuperemo esclusivamente della topologia dei W_a, lasciando in disparte la topologia canonica. Occupiamoci quindi di raccogliere informazioni su questa topologia.

3.7 Proposizione. *Notazioni come sopra. I sottoinsiemi W_a sono ideali di $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ e vale la relazione $W_aW_b \subseteq W_{a+b}$.*

dim. Cominciamo verificando che i sottoinsiemi W_a sono sottogruppi additivi di $\mathbf{W}(\mathcal{R})$. Siano $\xi = (x_0, x_1, \dots)$ ed $\eta = (y_0, y_1, \dots)$ due elementi di W_a, e ricordiamo che il polinomio di Witt S_m che definisce la componente m-esima della somma è isobarico, di peso p^m (cf. *Proposizione 1.4*). Dunque, poichè per $i < a$, si ha $v(x_i) \geq p^i(a-i) \leq v(y_i)$, dato un monomio $x_0^{\lambda_0}y_0^{\mu_0} \cdots x_m^{\lambda_m}y_m^{\mu_m}$, di peso $p^m = \sum_{i=0}^m p^i(\lambda_i + \mu_i)$, si ha, per $m < a$,

$$v(x_0^{\lambda_0}y_0^{\mu_0} \cdots x_m^{\lambda_m}y_m^{\mu_m}) \geq \sum_{i=0}^m p^i(a-i)(\lambda_i+\mu_i) \geq \sum_{i=0}^m p^i(a-m)(\lambda_i+\mu_i) = p^m(a-m).$$

Se ne deduce che $\xi + \eta \in W_a$. La dimostrazione che $-\xi$ appartiene anch'esso a W_a è perfettamente analoga e quindi la tralasciamo; passiamo quindi a dimostrare l'asserzione sul prodotto ed utilizziamo a tale scopo la rappresentazione di Teichmüller dei vettori di Witt (cf. (1.20)). Siano quindi $\xi = \sum_{n=0}^\infty p^n\{x'_n\} \in W_a$ e $\zeta = \sum_{n=0}^\infty p^n\{z'_n\} \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ e mostriamo che

$$\xi\zeta = \sum_{i=0}^\infty p^i \sum_{j=0}^i \{x'_j z'_{i-j}\} = \sum_{i=0}^\infty p^i\{y'_i\} \in W_a.$$

Dunque, le ipotesi sono che, per $n < a$, si abbia $v(x'_n) \geq a - n$ e dobbiamo mostrare che, per gli stessi indici n, si ha $v(y'_n) \geq a - n$. L'asserto è certamente vero per $n = 0$, essendo: $y'_0 = x'_0 z'_0$ e quindi $v(y'_0) = v(x'_0) + v(z'_0) \geq v(x'_0) \geq a$. Supponiamo quindi che $n < a$ e che la tesi sia vera per gli indici minori di n. E quindi, ricordando la somma che determina y'_n, si può scrivere

$$y'_n = \sum_{j=0}^{n} x'_j z'_{n-j} + (\text{termini di valore } \geq a - n + 1),$$

ed essendo $v(x'_j z'_{n-j}) \geq v(x'_j) \geq a - j \geq a - n$ per $j \leq n$, si ha la conclusione.

Dobbiamo verificare l'inclusione $W_a W_b \subseteq W_{a+b}$. Manteniamo quindi le notazioni fissate sopra e supponiamo che $\zeta \in W_b$. Ragionando come sopra, osserviamo che è sufficiente verificare che, per $h < a + b$ e $j = 0, \dots, h$ si ha $v(x'_j z'_{h-j}) \geq a + b - h$; infatti, se questa disuguaglianza è vera, la componente di posto 0 del vettore $\eta_h = \sum_{j=0}^{h} \{x'_j z'_{h-j}\}$ ha il valore atteso ed inoltre, siccome l'i-esima componente di η_h è somma di monomi di grado p^i negli argomenti $x'_j z'_{h-j}$, se ne deduce che $p^h \eta_h \in W_{a+b}$ e quindi che $\xi\eta \in W_{a+b}$.

Siano quindi $h < a + b$ e $j = 0, \dots, h$ e verifichiamo che si ha $v(x'_j z'_{h-j}) \geq a + b - h$. Supponiamo, per comodità $a \leq b$ e distinguiamo tre casi.

(i) Sia $h < a$ e dunque si ha $j < a$ ed $h - j < a \leq b$ e quindi $v(x'_j z'_{h-j}) \geq a - j + b - h + j = a + b - h$.

(ii) Sia $a \leq h < b$ e dunque si ha $h - j < b$ e così, se $j < a$ si ricade nel caso precedente, oppure, se $j \geq a$, si ha $v(x'_j z'_{h-j}) \geq v(z'_{h-j}) \geq b - h + j \geq a + b - h$.

(iii) Sia $b \leq h < a + b$, allora o $0 \leq j \leq h - b < a$ e perciò $v(x'_j z'_{h-j}) \geq a - j \geq a + b - h$, oppure $h - b \leq j < a$, e quindi $i - a < h - j < b$. Infine, se $a \leq j \leq h$, allora $b > h - j$ e si ha $v(x'_j z'_{h-j}) \geq b - h + j \geq a + b - h$.

Ciò conclude la dimostrazione. **CVD** ∎

Vogliamo mostrare che la topologia di $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ è indotta da una valutazione su tale anello.

3.8 Definizione. Sia $w: \mathbf{W}(\mathcal{R}) \to \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ l'applicazione così definita

$$w(\xi) = \begin{cases} \min\{\, p^{-i} v(x_i) + i \,|\, i \geq 0 \,\} & \text{se } 0 \neq \xi = (x_0, x_1, \dots) \\ \infty & \text{se } \xi = 0 \end{cases}$$

Osserviamo subito che il minimo che compare nella definizione precedente esiste perchè si ha $i \leq p^{-i} v(x_i) + i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Andiamo a mostrare la seguente

3.9 Proposizione. *Notazioni come sopra.*
(a) L'applicazione w definita sopra è una valutazione in $\mathbf{W}(\mathcal{R})$.
(b) La topologia di $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ è indotta dalla valutazione w ovvero, per ogni reale positivo a, si ha

$$W_a = \{\, \xi \in \mathbf{W}(\mathcal{R}) \,|\, w(\xi) \geq a \,\}.$$

dim. Osserviamo subito che (b) è vera. Infatti, $\xi = (x_0, x_1, \dots) \in W_a$ se, e solo se, $i < a \Rightarrow p^{-i}v(x_i) \geq a - i$ e quindi se, e solo se, $a \leq w(\xi)$. Per quanto riguarda (a), è chiaro dalla *Definizione 3.8* che per $\xi \neq 0$ su ha $w(\xi) \neq \infty$. Siano quindi $\xi = (x_0, x_1, \dots)$ ed $\eta = (y_0, y_1, \dots)$ tali che $w(\xi) = r$ e $w(\eta) = s$ e supponiamo, per fissare le idee, $r \leq s$. Allora, in base a (b) si ha che ξ ed η appartengono entrambi all'ideale W_r e quindi $\xi + \eta \in W_r$ per cui $w(\xi + \eta) \geq r = \min\{w(\xi), w(\eta)\}$. Supponiamo ora $r < s$ e calcoliamo $w(\xi + \eta)$. Sia i_0 il minimo indice per cui si abbia $r = w(\xi) = p^{-i_0}v(x_{i_0}) + i_0$, e consideriamo la componente z_{i_0} di posto i_0 della somma $\xi + \eta$. Dalla definizione dei polinomi di Witt si ha che

$$z_{i_0} = x_{i_0} + y_{i_0} + \begin{pmatrix} \text{monomi di peso } p^{i_0} \\ \text{in } x_i \text{ ed } y_j \\ \text{con } i \text{ e } j \text{ minori di } i_0 \end{pmatrix}.$$

Poichè $i_0 \leq r < s$, si ha $v(y_{i_0}) \geq p^{i_0}(s - i_0) > p^{i_0}(r - i_0) = v(x_{i_0})$; ed inoltre, per i e j minori di i_0 si ha $v(x_i) \geq p^i(r - i)$ e $v(y_j) \geq p^j(s - j)$. Le due disuguaglianze e la condizione di isobaricità implicano che ogni monomio nella somma tra parentesi ha valore strettamente più grande di $p^{i_0}(r - i_0)$. Ne consegue che $v(z_{i_0}) = v(x_{i_0}) = p^{i_0}(r - i_0)$; quindi $w(\xi + \eta) = r$.

Resta quindi da verificare che $w(\xi\eta) = r + s$. In base a (b) ed alla *Proposizione 3.7*, si ha che $\xi\eta \in W_{r+s}$ e quindi $w(\xi\eta) \geq r + s$. Siano quindi i_0 e j_0 gli indici per cui si abbia $r = w(\xi) = p^{-i_0}v(x_{i_0}) + i_0$ ed $s = w(\eta) = p^{-j_0}v(y_{j_0}) + j_0$, e si considerino le decomposizioni $\xi = \xi^{(<i_0)} + \xi^{(\geq i_0)}$ ed $\eta = \eta^{(<j_0)} + \eta^{(\geq j_0)}$ (cf. (2.12)). Allora il prodotto $\xi\eta$ si decompone in

$$\xi\eta = \xi^{(<i_0)}\eta^{(<j_0)} + \xi^{(<i_0)}\eta^{(\geq j_0)} + \xi^{(\geq i_0)}\eta^{(<j_0)} + \xi^{(\geq i_0)}\eta^{(\geq j_0)},$$

ed osservando che $w(\xi^{(<i_0)}) > r = w(\xi^{(\geq i_0)})$ e $w(\eta^{(<j_0)}) > s = w(\eta^{(\geq j_0)})$, e se ne conclude che i primi tre addendi della somma precedente hanno valore strettamente più grande di $r+s$, mentre $w(\xi^{(\geq i_0)}\eta^{(\geq j_0)}) = r+s$, perchè la prima componente non nulla del prodotto $\xi^{(\geq i_0)}\eta^{(\geq j_0)}$ ha indice $i_0 + j_0$ ed è uguale ad $x_{i_0}^{p^{j_0}} y_{j_0}^{p^{i_0}}$. Le osservazioni precedenti sul w-valore di una somma permettono di concludere che $w(\xi\eta) = r + s$. **CVD** ■

A questo punto saremmo pronti ad introdurre l'anello di bivettori annunciato all'inizio di questa sezione, ma vogliamo far precedere la definizione da una proposizione che illustra le importanti relazioni esistenti tra gli anelli $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ ed A_C e dà ulteriori informazioni sulla topologia del primo.

3.10 Proposizione (Fontaine, cf. [FO2]). *Indichiamo con* $\Theta_0 \colon \mathbf{W}(\mathcal{R}) \to A_C$ *l'applicazione definita ponendo*

$$\Theta_0(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \hat{x}_{n,n},$$

ove $\xi = (x_0, x_1, \dots) \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ *e le sue componenti sono* $x_n = (\hat{x}_{n,j})_{j \in \mathbb{Z}}$ *(cf. (3.2)). Allora*
(a) Θ_0 *è un omomorfismo di anelli continuo e suriettivo, che commuta con l'azione di* $\mathcal{G}$*.*
(b) $\ker \Theta_0$ *è un ideale principale di* $\mathbf{W}(\mathcal{R})$*.*
(c) Gli ideali W_n *si decompongono nel modo seguente*

$$W_n = (\ker \Theta_0)^n + p(\ker \Theta_0)^{n-1} + \cdots + p^n \mathbf{W}(\mathcal{R}).$$

dim. (a). Che Θ_0 sia un omomorfismo discende dalla definizione stessa dei vettori di Witt (cf. *Teorema 1.19* e la sua dimostrazione). La continuità si verifica osservando che, per ogni numero reale positivo a, la condizione $\xi \in W_a$ implica $v_C(\Theta_0(\xi)) > a$. Dato poi $a' \in A_C$, poichè C è algebricamente chiuso, esiste un elemento $a \in \mathcal{R}$ per cui $\hat{a}_0 = a'$ (cf. (3.2)). Allora $\Theta_0(\{a\}) = \hat{a}_0 = a'$ e quindi Θ_0 è suriettivo. L'affermazione sull'azione del gruppo di Galois $\mathcal{G}$ è di verifica immediata a partire dalle definizioni (cf. *Proposizione 3.5*).
(b). Sia π un elemento di $\mathcal{R}$ tale che $\hat{\pi}_0 = -p$. Dalla definizione stessa di Θ_0 discende che $\alpha = \{\pi\} + p$ appartiene a $\ker\Theta_0$. Vogliamo mostrare che

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \{y_n\} \in \ker \Theta_0 \text{ è un generatore dell'ideale se, e solo se, } v(y_1) = 0.$$

Infatti, se $\eta \in \ker \Theta_0$ e $v(y_1) > 0$, dato un qualsiasi vettore $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \{x_n\} \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$, l'elemento z_1 nel prodotto $\xi\eta = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \{z_n\}$ è uguale a $z_1 = x_1 y_0 + x_0 y_1$. Poichè $\eta \in \ker \Theta_0$ la condizione $v(y_1) > 0$ implica $v(y_0) > 0$; quindi, necessariamente $v(z_1) > 0$. Se ne deduce che il vettore $\alpha \in \ker \Theta_0$ descritto sopra non appartiene all'ideale generato da η e quindi η non può generare $\ker \Theta_0$.

Sia ora $\eta \in \ker \Theta_0$ con $v(y_1) = 0$ ed osserviamo che ciò implica $v(y_0) = 1$. Sia ora $\beta = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \{b_n\} \in \ker \Theta_0$ e mostriamo che, fissato comunque un intero $m \geq 0$, esistono $x_0, \dots, x_{m-1}$ in $\mathcal{R}$, e $\gamma_m \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$, per cui si abbia

$$\beta = \eta \left(\sum_{j=0}^{m-1} p^j \{x_j\} \right) + p^m \gamma_m. \tag*{$(3.11)_m$}$$

Osserviamo che $(3.11)_1$ discende dal fatto che $\beta \in \ker \Theta_0$ implica $v(b_0) \geq 1$ e quindi esiste un elemento $x_0 \in \mathcal{R}$ tale che $b_0 = y_0 x_0$ e quindi $\beta = \eta\{x_0\} + p\gamma_1$ per un opportuno

$\gamma_1 \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$. Facendo induzione su m, supponiamo che sia vera $(3.11)_{m-1}$. Ciò implica, in particolare che $\gamma_{m-1} \in \ker \Theta_0$ e quindi che la componente zerea di questo vettore ha valore ≥ 1; ne consegue che esiste un elemento $x_{m-1} \in \mathcal{R}$ tale che la componente zerea di γ_{m-1} sia uguale a $y_0 x_{m-1}$. Da ciò si ottiene:

$$\beta - \eta\left(\sum_{j=0}^{m-1} p^j \{x_j\}\right) = p^{m-1}(\gamma_{m-1} - \eta\{x_{m-1}\}) \in p^m \mathbf{W}(\mathcal{R}),$$

che è quanto volevamo dimostrare. In particolare, osserviamo che l'elemento $\alpha = \{\pi\} + p$ è un generatore di $\ker \Theta_0$.
(c). Si verifica facilmente che $\ker \Theta_0 + p\mathbf{W}(\mathcal{R}) \subseteq W_1$. Inoltre, se $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \{x_n\} \in W_1$, allora $v(x_0) \geq 1$; perciò esiste un elemento $y \in \mathcal{R}$ per cui $x_0 = y\pi$ e quindi $\xi - \{y\}\alpha \in p\mathbf{W}(\mathcal{R})$, che dimostra la tesi per $n = 1$. In base alla *Proposizione 3.7*, si ottiene

$$(\ker \Theta_0)^n + p(\ker \Theta_0)^{n-1} + \cdots + p^n \mathbf{W}(\mathcal{R}) \subseteq \underbrace{W_1 \cdots W_1}_{n \text{ volte}} \subseteq W_n.$$

D'altro canto, se $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \{x_n\} \in W_n$ allora $v(x_0) \geq n$ e quindi $x_0 = \pi^n y$ per un opportuno $y \in \mathcal{R}$. Ne consegue che $\xi - \alpha^n\{y\} \in p\mathbf{W}(\mathcal{R}) \cap W_n$ e, poichè $p\mathbf{W}(\mathcal{R}) \cap W_n \subseteq pW_{n-1}$, si conclude che la tesi è vera per induzione. **CVD** ■

Siamo quindi in grado di dare la definizione promessa.

3.12 Definizione. Sia $\mathcal{K}$ il completamento del campo $Fr(\mathbf{W}(\mathcal{R}))$, rispetto alla topologia indotta dalla valutazione che si ottiene estendendo l'applicazione w definita in (3.8). L'anello dei *Bivettori di Witt*, $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$, è il sottoanello di $\mathcal{K}$ che si ottiene completando $\mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}]$ rispetto alla topologia indotta.

Osserviamo come prima cosa che il simbolo $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$, usato nella definizione precedente, è diverso da quello usato per l'anello dei Bivettori di Barsotti (cf. *Proposizione 2.17*) in quanto i due anelli, in generale, non coincidono. Il seguito di questo numero sarà dedicato infatti a chiarire i rapporti tra questi due anelli e tra $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$ ed il modulo $biv(\mathcal{R})$. Vedremo nel seguito che gli elementi di $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$ sono dei Bivettori nel senso di Barsotti, ovvero appartengono anche al completamento di $biv(\mathcal{R})$ rispetto alla topologia canonica, e quindi ha senso parlare di $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$ come di un anello di Bivettori. Mostreremo però che si tratta di un sottoanello proprio dell'anello dei Bivettori di Barsotti (cf. *Osservazione 3.17.(c)*).

Iniziamo osservando che l'anello $\mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}]$ è canonicamente identificabile con l'anello $biv^s(\mathcal{R})$ dei bivettori speciali a componenti in $\mathcal{R}$ (cf. §.2), utilizzando la decomposizione

$p = FV$ ed il fatto che F e V sono biiezioni in $biv^s(\mathcal{R})$. Inoltre, ricordando che $w(p) = 1$, si ha che, per un bivettore speciale $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = p^{-k}\zeta$, con $\zeta \in \mathbf{W}(\mathcal{R}) \subset biv^s(\mathcal{R})$, si ha

$$w(\xi) := w(\zeta) - k = \min\{\, p^{-n}v(x_n) + n \mid n \in \mathbb{Z}\,\}. \tag{3.13}$$

Infatti, se $\zeta = (\dots, 0, z_0, z_1, \dots) = F^kV^k(\xi)$, allora $x_n = z_{n+k}^{p^{-k}}$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e quindi $p^{-n}v(x_n)+n = p^{-n-k}v(z_{n+k})+(n+k)-k$, da cui si deduce l'uguaglianza (3.13). Dunque la topologia indotta dalla valutazione w su $\mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}]$, identificato con $biv^s(\mathcal{R})$, ha come sistema fondamentale di intorni dello zero i sotto-$\mathbf{W}(\mathcal{R})$-moduli

$$\begin{aligned} W_c &= \{\, \xi \in biv^s(\mathcal{R}) \mid w(\xi) \geq c\,\} = \\ &= \{\, (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in biv^s(\mathcal{R}) \mid n < c \Rightarrow v(x_n^{p^{-n}}) \geq c - n\,\}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

al variare di c tra i numeri reali. Inoltre osserviamo che F, V e le loro inverse inducono delle applicazioni *continue*, in quanto si ha

$$FW_c \subseteq W_c, \quad VW_{p(c-1)} \subseteq W_c, \quad F^{-1}W_{pc} \subseteq W_c, \quad V^{-1}W_{c+1} \subseteq W_c.$$

3.15 Osservazione. La topologia indotta su $biv^s(\mathcal{R})$ dalla valutazione w è *più fine* della topologia canonica di Barsotti (cf. *Definizione 2.14*), per la quale un sistema fondamentale di intorni di zero è dato dai sottomoduli

$$U(a,k) = \{\, (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in biv^s(\mathcal{R}) \mid n < k \Rightarrow v(x_n^{p^{-n}}) \geq a\,\},$$

al variare di $k \in \mathbb{N}$ e di $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Precisamente si ha $W_{m+b} \subseteq U(b,m)$, qualunque siano $m \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{R}_{>0}$.

Possiamo qundi enunciare la seguente

3.16 Proposizione. *L'inclusione di $biv^s(\mathcal{R}) = \mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}]$ in $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$ si estende ad un omomorfismo iniettivo di $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-moduli, $i\colon biv(\mathcal{R}) \to \mathbf{Biv}\mathcal{R}$, definito ponendo $i(\xi) = \lim_{r\to\infty} \xi^{(>-r)}$ per ogni $\xi \in biv(\mathcal{R})$. Inoltre, se $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in biv(\mathcal{R})$, si ha*

$$w(\xi) := \lim_{r\to\infty} w(\xi^{(>-r)}) = \min\{\, p^{-n}v(x_n) + n \mid n \in \mathbb{Z}\,\}.$$

dim. Ricordiamo che una successione $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ad elementi in $\mathcal{R}$ è un bivettore se, e solo se, $\liminf_{n\to\infty} v(x_{-n}) = b > 0$ (cf. *Esempio 2.11.(b)*). Da ciò discende che la successione $(\xi^{(>-r)})_{r\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy rispetto alla topologia indotta da w. Infatti, la condizione sul limite inferiore significa l'esistenza di un intero n_0 tale che, per $n \geq n_0$, si abbia

$v(x_{-n}) \geq b/2 > 0$, e quindi $p^n v(x_{-n}) \geq p^n b/2$. Dunque, fissato comunque un numero reale positivo c, esiste un intero $r_0 \geq n_0$ tale che per $r > r_0$ si abbia $p^r b/2 \geq c + r$, e quindi

$$w(\xi^{(>-r-1)} - \xi^{(>-r)}) = w(V^{-r}\{x_{-r}\}) = p^r v(x_{-r}) - r \geq c,$$

cioè $\xi^{(>-r-1)} - \xi^{(>-r)} \in W_c$ e questa è la condizione richiesta.

In base alla definizione di somma di bivettori (cf. *Teorema 2.6*), si ha l'uguaglianza

$$\lim_{r\to\infty} (\xi + \eta)^{(>-r)} = \lim_{r\to\infty} (\xi^{(>-r)} + \eta^{(>-r)}),$$

e quindi i è un omomorfismo di gruppi. In modo analogo si osserva che i è un omomorfismo di $\mathbf{W}(\mathcal{R})$-moduli. Questo omomorfismo è iniettivo perchè la topologia indotta dalla valutazione è più fine della topologia canonica e quest'ultima separa i bivettori. Infine, l'affermazione sul valore $w(\xi)$ discende da (3.3). **CVD** ■

3.17 Osservazioni. (a). Anche per la topologia indotta dalla valutazione w, la rappresentazione di Teichmüller $\sum_{n\in\mathbb{Z}} p^n\{x_n^{p^{-n}}\}$ di un bivettore $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ è una serie convergente a ξ in $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$. Infatti, fissato un numero reale positivo c, esistono due interi positivi r ed s tali che, per $n < -r$ oppure per $n > s$, si abbia $w(p^n\{x_n^{p^{-n}}\}) = n + p^{-n}v(x_n) \geq c$; nel primo caso perchè ξ è un bivettore, nel secondo perchè $v(x_n) \geq 0$ per tutti i valori di n. Ciò significa che per $r' > r$ ed $s' > s$, si ha $\xi - \sum_{-r'\leq n\leq s'} p^n\{x_n^{p^{-n}}\} \in W_c$ e quindi, per l'arbitrarietà di c, che la successione delle somme finite converge a ξ.

(b). Mettiamo in evidenza il fatto che, $biv(\mathcal{R})$ *non è completo per la topologia indotta dalla valutazione*, come si può dedurre dal seguente esempio. Sia $y \in \mathcal{R}$ un elemento di valore positivo; allora la successione $(p^{-n}\{y^{n^2}\})_{n\in\mathbb{N}}$ tende a zero in $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$. Ne consegue che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} p^{-n}\{y^{n^2}\}$ converge in $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$, ma la successione di bivettori speciali determinata dalle somme finite dei termini della serie non può convergere ad un elemento che soddisfi alla condizione di essere un bivettore.

(c). Modificando l'esempio precedente, siamo in grado di dare l'esempio di un bivettore di Barsotti che *non* è in $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$. Sia $y \in \mathcal{R}$ con $0 < v(y) \leq 1$ e si consideri la successione $(p^{-n}\{y^n\})_{n\in\mathbb{N}}$. Questa successione tende a zero per la topologia canonica, perchè $v(y^n)$ diverge con n, e quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} p^{-n}\{y^n\}$ converge rispetto a tale topologia e definisce quindi un Bivettore nel senso di Barsotti. D'altra parte, affinchè la successione data converga a zero per la topologia della valutazione, dovrebbe darsi che, fissato un numero reale positivo a, si abbia, per $n >> 0$, $v(y^n) \geq a + n$, ovvero $n(v(y) - 1) \geq a$. Ciò non è possibile perchè i termini a sinistra dell'ultima disuguaglianza sono tutti negativi o nulli, mentre a è positivo. Dunque la serie $\sum_{n=0}^{\infty} p^{-n}\{y^n\}$ non può convergere in $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$.

Il Teorema che segue dà una condizione sufficiente affinchè una successione (di Cauchy) di bivettori converga ad un elemento di $biv(\mathcal{R})$. Una condizione analoga, valida per la topologia canonica, fu dimostrata da Barsotti (cf. il Teorema 2.1 di [MA] o il Lemma 4.2.4 di [WR]) e la condizione seguente è un adattamento del criterio di Barsotti alla topologia indotta dalla valutazione w.

3.18 Teorema. (criterio di convergenza uniforme) *Una successione di Cauchy di bivettori* $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge in*

$biv(\mathcal{R})$ se esiste un numero reale positivo b tale che

$$\lim_{k\to\infty} \inf\{\, v(x_{n,-j}) \,|\, j > k, n \in \mathbb{N} \,\} > b,$$

ove $\xi_n = (x_{n,j})_{j\in\mathbb{Z}}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

dim. Cominciamo osservando che, fissato comunque un intero j, la successione delle componenti di posto j, $(x_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$, soddisfa alla condizione di Cauchy e quindi converge in $\mathcal{R}$. Dobbiamo quindi mostrare che, fissato comunque un numero reale positivo c, esiste un intero n_0 tale che, per $n, m \geq n_0$, si abbia $v(x_{n,j} - x_{m,j}) > c$.

Per ipotesi, fissato comunque un numero reale positivo a, esiste un intero n_0 tale che, per $n \geq n_0$, si abbia $\xi_n - \xi_{n_0} = \psi_{n,n_0} \in W_a$. Supponiamo di aver fissato n ed n_0 e sia $\psi_{n,n_0} = (u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$. Dalla relazione $\xi_n = \xi_{n_0} + \psi_{n,n_0}$, discende (cf. *Teorema 2.6*)

$$x_{n,j} = \lim_{h\to\infty} S_h(x_{n_0,j-h}, \ldots, x_{n_0,j}; u_{j-h}, \ldots, u_j).$$

La condizione dell'enunciato limita uniformemente i valori delle componenti delle "code" dei bivettori ξ_n e quindi, utilizzando le congruenze del *Lemma 2.1*, si ricava che esiste un intero positivo h per cui

$$x_{n,j} \equiv S_h(x_{n_0,j-h}, \ldots, x_{n_0,j}; u_{j-h}, \ldots, u_j) \bmod I_c,$$

ove $I_c = \{\, x \in \mathcal{R} \,|\, v(x) > c \,\}$; ed osserviamo che l'intero h non dipende da n o n_0, ma solo da j, perchè la condizione dell'enunciato è uniforme su tutte le componenti delle code dei bivettori ξ_n.

In base alla definizione dei polinomi di Witt, si ha

$$S_h(x_{n_0,j-h}, \ldots, x_{n_0,j}; u_{j-h}, \ldots, u_j) = x_{n_0,j} + \begin{pmatrix} \text{monomi divisibili per} \\ \text{qualcuno degli } u_i \end{pmatrix}.$$

Dunque, se si sceglie $a > p^{h-j}c + j$ e $j - h \leq i \leq j$, allora $v(u_i) > p^i(a - i) > c$ e perciò $x_{n,j} \equiv x_{n_0,j} \bmod I_c$, che è quanto volevamo. Sia quindi $z_j = \lim_n x_{n,j}$, al variare di j in $\mathbb{Z}$. La condizione dell'enunciato implica $\lim_{k\to\infty} \inf\{\, v(z_{-j}) \,|\, j > k \,\} > b$ e quindi la successione $\zeta = (z_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ è un bivettore (cf. *Esempio 2.11.(b)*). Resta quindi da verificare che la successione di partenza converge a ζ nella topologia indotta dalla valutazione su

$biv(\mathcal{R})$. Sia quindi fissato un numero reale positivo a, allora in base alle ipotesi esiste un intero $r < 0$ tale che tutte le r-code $\xi_n^{(<r)}$ e $\zeta^{(<r)}$ siano in W_a (per tutti gli n). Allora utilizzando la decomposizione

$$\zeta - \xi_n = (\zeta^{(<r)} - \xi_n^{(<r)}) + (\zeta^{(\geq r)} - \xi_n^{(\geq r)}),$$

è sufficiente mostrare che i bivettori speciali $\zeta^{(\geq r)} - \xi_n^{(\geq r)}$ sono in W_a per $n >> 0$; e questa è una conseguenza della convergenza componente per componente. **CVD** ∎

Concludiamo questo numero osservando che, utilizzando il teorema precedente, si può ottenere un'altra dimostrazione del fatto che il gruppo additivo $biv(\mathcal{R}) \subset \mathbf{Biv}\mathcal{R}$ è anche un modulo sull'anello dei bivettori speciali, ovvero che $biv(\mathcal{R})$ è chiuso rispetto alla moltiplicazione per bivettori speciali. Infatti, se $\beta = (\dots, 0, b_0, b_1, \dots) \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ e $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in biv(\mathcal{R})$, allora la successione delle teste $(\xi^{(\geq -r)})_{r\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy e quindi lo stesso vale per la successione $(\beta\xi^{(\geq -r)})_{r\in\mathbb{N}}$, in quanto la topologia è indotta da una valutazione, e questa successione converge a $\beta\xi$. Dunque, per provare che $\beta\xi$ è in $biv(\mathcal{R})$ è sufficiente verificare che vale la condizione del *Teorema 3.18*. Da un calcolo diretto si ottiene

$$\beta\xi^{(\geq -r)} = \sum_{h=-r}^{\infty} p^h \sum_{j=0}^{h+r} \{ b_j^{p^{-j}} x_{h-j}^{p^{j-h}} \} = \sum_{h=-r}^{\infty} V^h \sum_{j=0}^{h+r} \{ b_j^{p^{h-j}} x_{h-j}^{p^j} \},$$

ed è quindi chiaro che, essendo ξ un bivettore ed avendosi perciò $\lim_{k\to\infty} \inf\{\, v(x_{-n}) \,|\, n > k \,\} > 0$, vale la condizione del *Teorema 3.18* per la successione $(\beta\xi^{(\geq -r)})_{r\in\mathbb{N}}$.

4. Bivettori e logaritmo

In questa sezione ci occuperemo di approfondire la conoscenza dell'anello $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$. Cominciamo definendo un'estensione $\Theta\colon \mathbf{Biv}\mathcal{R} \to C$ dell'omomorfismo Θ_0, della *Proposizione 3.10*. Se $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ è un bivettore speciale, si pone

$$\Theta(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p^n \hat{x}_{n,n}. \tag{4.1}$$

Si verifica facilmente che *l'applicazione* $\xi \mapsto \Theta(\xi)$ *è un omomorfismo continuo e suriettivo dall'anello* $\mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}]$ *su* C, utilizzando le analoghe proprietà dell'omomorfismo Θ_0; in particolare, la continuità di Θ discende dall'osservazione che $v_C(\Theta(\xi)) \geq w(\xi)$, qualunque sia il bivettore speciale ξ.

Osserviamo che la mappa $\xi \mapsto \Theta(\xi)$ *non è continua per la topologia canonica di* $biv^s(\mathcal{R}) = \mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}]$ ed è questa la principale ragione per cui si è presa una topologia diversa dalla topologia canonica per costruire il completamento $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$.

Enunciamo quindi le proprietà rilevanti dell'omomorfismo Θ testè definito.

4.2 Teorema. *Sia* $\Theta\colon \mathbf{Biv}\mathcal{R} \to C$ *l'estensione per continuità dell'applicazione definita in* (4.1). *Allora:*

(a) La mappa Θ *è un omomorfismo di anelli continuo e suriettivo, equivariante rispetto all'azione del gruppo di Galois* $\mathcal{G}$. *Inoltre, se* $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in biv(\mathcal{R})$ *e* $\sigma \in \mathcal{G}$, *allora* $\Theta(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p^n \hat{x}_{n,n}$ *e* $\sigma(\xi) = (\sigma(x_n))_{n\in\mathbb{Z}}$.

(b) Se indichiamo con $\alpha = \{\pi\} + p \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ *il vettore definito nella dimostrazione della Proposizione 3.10, si ha che* α *è un generatore dell'ideale* $\ker\Theta \subset \mathbf{Biv}\mathcal{R}$.

(c) $\displaystyle\bigcap_{n\geq 1} (\ker\Theta)^n = \{0\}$.

dim. (*a*) Le affermazioni discendono tutte da quanto dimostrato nella *Proposizione 3.10* per l'omomorfismo Θ_0. Restano da verificare l'equivarianza di Θ rispetto all'azione di $\mathcal{G}$ e le proprietà della restrizione di Θ a $biv(\mathcal{R})$. Osserviamo che $\mathcal{G}$ agisce sulle componenti dei bivettori speciali e tale azione su $biv^s(\mathcal{R})$ è continua ed equivariante. Inoltre, se $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in biv(\mathcal{R})$ e $\sigma \in \mathcal{G}$, la successione $(\sigma(\xi^{(\geq r)}))_{r\in\mathbb{N}}$ soddisfa alla condizione del *Teorema 3.18*, per cui si ha

$$\sigma(\xi) = \lim_{r\to\infty} \sigma(\xi^{(\geq r)}) = (\sigma(x_n))_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Sia $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in biv(\mathcal{R})$ e mostriamo che la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} p^n \hat{x}_{n,n}$ converge in C. Fissiamo un numero reale positivo a ed osserviamo che, se $n > a$, allora $v_C(p^n \hat{x}_{n,n}) > a$. D'altra parte, poichè esiste un numero reale positivo b tale che $\lim_n \inf\{\, v(x_{-k}) \,|\, k > n \,\} > b$ e quindi esiste un numero intero positivo n_0 tale che $p^n b - n > a$ e $v(x_{-n}) > b$ per $n > n_0$. Come conseguenza, per $n > n_0$, si ha $v_C(p^{-n}\hat{x}_{-n,-n}) = p^n v(x_{-n}) - n > a$. Poichè C è completo per la topologia della valutazione v_C, si conclude che la serie converge.

(b). Sia $\alpha = \{\pi\} + p \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ il generatore di $\ker\Theta_0$, definito nella dimostrazione della *Proposizione 3.10*, ed osserviamo che, si ha $\mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}] \cap \ker\Theta = \alpha\mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}]$. Il risultato generale, discende dal seguente

Claim. *Dato un Bivettore $\eta \in \ker\Theta$, esiste una successione di bivettori speciali $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\zeta_n \in \ker\Theta$ per ogni n e $\lim_{n\to\infty} \zeta_n = \eta$.*

Osserviamo che, dal *Claim* e dall'osservazione che lo precede, discende che, per ogni intero positivo n, $\zeta_n = \alpha\xi_n$ ove la successione $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così determinata è una successione di Cauchy di bivettori speciali; dunque esiste il suo limite $\xi \in \mathbf{Biv}\mathcal{R}$ e dalla continuità del prodotto si deduce che $\eta = \alpha\xi$.

dim. del Claim. Dato un bivettore $\eta \in \ker\Theta$, e fissato comunque un intero positivo r, esiste un bivettore speciale η_r tale che $\eta - \eta_r \in W_r$. Ciò implica che $v_C(\Theta(\eta - \eta_r)) \geq r$ e quindi, per la suriettività del morfismo Θ_0, esiste un vettore $\gamma_r \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ tale che $w(\gamma_r) \geq r$ e $\Theta(\eta - \eta_r) = \Theta(\gamma_r)$. Poichè la successione $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a zero in $\mathbf{W}(\mathcal{R})$, se ne deduce che la successione $(\eta_n + \gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad η. Da ultimo osserviamo che

$$\Theta(\eta_r + \gamma_r) = \Theta(\eta_r) + \Theta(\gamma_r) = \Theta(\eta_r) + \Theta(\eta - \eta_r) = \Theta(\eta) = 0,$$

e quindi la successione $(\eta_n + \gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa alle richieste dell'enunciato. Ciò conclude la dimostrazione del Claim. **CVD** ■

Riprendiamo la dimostrazione del *Teorema 4.2*.

(c). Mostriamo che, se un Bivettore ξ appartiene a $\bigcap_{n\geq 1}(\ker\Theta)^n$, allora $\xi \in W_c$ per qualunque $c > 0$ e quindi, necessariamente, $\xi = 0$. Supponiamo quindi che $\xi \in (\ker\Theta)^n$ per ogni intero positivo n e supponiamo che esista un numero reale c per cui $\xi \notin W_c$. Sia $\zeta = (z_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ un bivettore speciale tale che $\xi - \zeta \in W_c$ e sia r un intero tale che

$$\zeta^{(<r)} \in W_c \qquad \text{e} \qquad v(z_r^{p^{-r}}) < c - r. \tag{4.3}$$

Supponiamo quindi che sia $\zeta = \zeta^{(\geq r)}$ e $v(z_r^{p^{-r}}) < c - r$. Ora osserviamo che, poichè $\xi \in (\ker\Theta)^n$, esiste un bivettore speciale $\xi_n = (x_{n,j})_{j\in\mathbb{Z}}$ tale che $\xi \equiv \alpha^n\xi_n \bmod W_c$ e quindi, per transitività, si ha $\zeta \equiv \alpha^n\xi_n \bmod W_c$. Mostriamo che quest'ultima congruenza porta ad una contraddizione con l'ipotesi fatta sul valore di z_r in (4.3). Precisamente, vogliamo mostrare che, per ogni intero positivo n, si ha la seguente catena di implicazioni:

$$\zeta \equiv \alpha^n\xi_n \bmod W_c \overset{(i)}{\Longrightarrow} (\alpha^n\xi_n^{(<r-n)})^{(<r-n)} \in W_c \overset{(ii)}{\Longrightarrow} \alpha^n\xi_n^{(<r-n)} \in W_c \overset{(iii)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(iii)}{\Longrightarrow} \zeta \equiv \alpha^n\xi_n^{(\geq r-n)} \bmod W_c \overset{(iv)}{\Longrightarrow} v(x_{n,r-j}) \geq p^{r-j}(c - r - n + j), \quad \text{per } j = 1, \dots, n \overset{(v)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(v)}{\Longrightarrow} z_r = x_{n,r}\pi^{np^r} + \begin{pmatrix} \text{addendi di valore} \\ > p^r(c-r) \end{pmatrix} \overset{(vi)}{\Longrightarrow} v(z_r^{p^{-r}}) > c - r.$$

Dimostriamo quindi le varie implicazioni.

(i) Per le ipotesi fatte, si ha $\alpha^n\xi_n - \zeta \in W_c$ e quindi $(\alpha^n\xi_n - \zeta)^{(<r-n)} \in W_c$. Osservando poi che $\zeta = \zeta^{(\geq r)}$, si deduce che $(\alpha^n\xi_n^{(<r-n)})^{(<r-n)} = (\alpha^n\xi_n^{(<r-n)} - \zeta)^{(<r-n)}$ e ciò permette di concludere.

(ii) Cominciamo osservando che $\xi_n^{(<r-n)}$ è un bivettore speciale e quindi che, dopo la moltiplicazione per un'opportuna potenza di p, diviene un vettore di lunghezza finita. L'implicazione in questione è una conseguenza del *Lemma 4.5* che dimostreremo più avanti; passiamo quindi alle successive implicazioni.

(iii) Discende dall'osservazione $\zeta - \alpha^n\xi_n^{(\geq r-n)} = (\zeta - \alpha^n\xi_n) + \alpha^n\xi_n^{(<r-n)} \in W_c$.

(iv) Sia ora $\alpha^n\xi_n^{(\geq r-n)} = (\dots, 0, y_{r-n}, \dots, y_{r-1}, \dots)$. Poichè $\zeta = \zeta^{(\geq r)}$, si ha $\alpha^n\xi_n^{(\geq r-n)} - \zeta)^{(<r)} = (\dots, 0, y_{r-n}, \dots, y_{r-1}, 0, \dots)$ e quindi, per le ipotesi fatte, $v(y_s) \geq p^s(c-s)$ per ogni $s < r$. Vogliamo dimostrare che, per le componenti del bivettore speciale ξ_n, ciò implica la condizione

$$v(x_{n,r-j}) \geq p^{r-j}(c-r-n+j) \qquad \text{per } j = 1, \dots, n. \tag{4.4}$$

La condizione in esame vale certamente per $j = n$; infatti, $y_{r-n} = x_{n,r-n}\pi^{np^{r-n}}$, e quindi da $v(\pi) = 1$ si deduce $np^{r-n} + v(x_{n,r-n}) = v(y_{r-n}) \geq p^{r-n}(c-r+n)$, da cui si ottiene (4.4) per $j = n$. Possiamo quindi utilizzare un argomento di induzione discendente e supporre che $1 \leq j < n$ e che la (4.4) sia vera per tutti gli indici maggiori di j. Dalla definizione di prodotto tra bivettori speciali (cf. *Proposizione 2.16*) discende

$$y_{r-j} = x_{n,r-j}\pi^{np^{r-j}} + \binom{\text{addendi di valore}}{\geq p^{r-j}(c-r+j)};$$

dall'ipotesi $v(y_{r-j}) \geq p^{r-j}(c-r+j)$, si deduce in modo analogo al caso precedente la validità della condizione (4.4). Ciò conclude la verifica.

(v) Dalla relazione (4.4) e dalla congruenza $\zeta \equiv \alpha^n\xi_n^{(\geq r-n)} \bmod W_c$, discende la relazione

$$z_r = x_{n,r}\pi^{np^r} + (\text{addendi di valore } > p^r(c-r))$$

che si deduce tenendo conto delle usuali considerazioni sull'isobaricità dei polinomi di Witt che definiscono la somma.

(vi) Dall'ultima relazione si ottiene $v(z_r) \geq np^r + v(x_{n,r})$, per ogni intero positivo n, da cui si deduce $v(z_r) > p^r(c-r)$.

Dunque, la dimostrazione del *Teorema 4.2* è definitivamente conclusa se siamo in grado di provare il seguente

4.5 Lemma. *Se $\eta \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ è un vettore di lunghezza k ed M è un numero reale, allora*

$$\alpha^n \eta \in W_M \Leftrightarrow (\alpha^n \eta)^{(<k)} \in W_M.$$

dim. L'affermazione è ovviamente vera se $M \leq k$. Supponiamo quindi che sia $k < M$ e proviamo che $(\alpha^n \eta)^{(<k)} \in W_M$. Dopo di che, (3.14) e l'osservazione che $w(\alpha) = 1$ permettono di concludere. Siano quindi

$$\eta = \sum_{j=0}^{k-1} p^j \{y'_j\} \qquad \text{ed} \qquad \alpha^n = (\{\pi\} + p)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i \{\pi^{n-i}\}.$$

Si ha

$$\alpha^n \eta = \sum_{h=0}^{n+k-1} p^h \zeta_h \qquad \text{ove} \qquad \zeta_h = \sum_{i+j=h} \binom{n}{i} \{y'_j \pi^{n-i}\}.$$

Osserviamo che, essendo $\zeta_0 = \{y'_0 \pi^n\}$, se ne deduce che $v(y'_0) + n \geq M$ e quindi otteniamo la stima desiderata per la componente di posto zero del vettore η. Utilizziamo ora un argomento induttivo: siano quindi $\alpha^n \eta = (g_0, g_1, \dots)$ e $\zeta_h = (z_{h,0}, z_{h,1}, \dots)$ e supponiamo che si abbia $v(y'_r) + n \geq M - r$, per $r < h < k$. Dalle usuali osservazioni sui polinomi isobarici che definiscono la somma tra vettori di Witt (cf. *Proposizione 1.4*), si deduce che

$$g_h = z_{h,0} + (\text{addendi di valore } \geq M - h),$$

ed essendo $v(g_h) \geq M - h$, si ottiene $v(z_{h,0}) \geq M - h$. Infine, osservando che la somma che definisce il vettore ζ_h e la sua componente zerea $z_{h,0}$, se ne deduce $M - h \leq v(y'_h) + n$, che è quanto volevamo. **CVD** ■

Lasciamo al lettore, quale esercizio, il compito di dimostrare che, quando $\eta \in \ker \Theta \cap biv(\mathcal{R})$, esiste una successione di bivettori speciali $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ove $\zeta_n \in \ker \Theta$ come nel *Claim* contenuto nella dimostrazione del Teorema precedente e con la proprietà aggiuntiva che le componenti $z_{n,j}$ di indice $-n \leq j \leq -1$ di ζ_n coincidono con le componenti di η aventi gli stessi indici. Poichè $\zeta_n = \alpha \xi_n$ per opportuni bivettori speciali ξ_n, si può verificare che la successione $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soddisfa alla condizione di convergenza uniforme (cf. *Teorema 3.18*) e quindi converge ad un bivettore $\xi \in biv(\mathcal{R})$ per cui si ha $\eta = \alpha \xi$ in $biv(\mathcal{R})$.

Passiamo ora a dimostrare qualche facile proprietà del modulo $biv(\mathcal{R})$.

4.6 Proposizione. *Notazioni come sopra. Allora*

(a) $(biv(\mathcal{R}))^{\mathcal{G}} = biv(k) = K$.

(b) $\{\, \xi \in biv(\mathcal{R}) \mid F\xi = \xi \,\} = biv(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Q}_p$.

(c) $biv(\bar{k}) \subset biv(\mathcal{R})$.

dim. (a). Poichè il gruppo $\mathcal{G}$ agisce sulle componenti degli elementi di $biv(\mathcal{R})$, se $\xi = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ è invariante rispetto all'azione di $\mathcal{G}$, allora tutte le sue componenti $x_j \in \mathcal{R}$ sono invarianti rispetto all'azione di tale gruppo. Ciò significa che tale x_j è rappresentato come in (3.2) da una successione di elementi di A_C invarianti rispetto all'azione di $\mathcal{G}$, ovvero da una successione di elementi di A. Dunque x_j appartiene alla copia di k contenuta in $\mathcal{R}$.

(b). Un bivettore $\xi = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ soddisfa alla condizione $F\xi = \xi$ se, e solo se, ogni componente x_j soddisfa all'equazione $x_j^p - x_j = 0$ in $\mathcal{R}$. Poichè $\mathcal{R}$ è un anello integro di caratteristica p, gli unici elementi che soddisfano a questa equazione appartengono alla copia di $\mathbb{F}_p$ contenuta in $\mathcal{R}$.

(c). Poichè $\bar{k}$ è il corpo residuo della valutazione equicaratteristica v di $\mathcal{R}$ (cf. *Proposizione 3.5*), allora vi è una copia di $\bar{k}$ contenuta in $\mathcal{R}$, da cui si ottiene l'inclusione che appare nell'enunciato. **CVD** ■

Introduciamo ora il logaritmo delle unità di $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ e studiamo le sue relazioni con il logaritmo del campo C tramite l'omomorfismo Θ del *Teorema 4.2*. Come prima applicazione, vedremo come, tramite tale logaritmo, si determini un elemento τ dell'ideale $\ker\Theta \subset \mathbf{Biv}\mathcal{R}$ che permetterà di descrivere alcuni aspetti notevoli della struttura dell'anello $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$.

4.7 Teorema. *Sia $U_{\mathbf{W}(\mathcal{R})}$ il sottogruppo del gruppo moltiplicativo di $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ i cui elementi sono i vettori $\xi = (x_0, x_1, \dots)$ tali che $w(\xi - 1) > 0$. L'applicazione logaritmo $\log\colon U_{\mathbf{W}(\mathcal{R})} \to \mathbf{Biv}\mathcal{R}$, definita come di consueto ponendo*

$$\log(\xi) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(\xi - 1)^n}{n},$$

è un omomorfismo di gruppi continuo ed iniettivo, a valori nel sottogruppo additivo $biv(\mathcal{R})$.

Questo omomorfismo commuta con le azioni del gruppo di Galois $\mathcal{G} = Gal(\bar{K}, K)$ su $U_{\mathbf{W}(\mathcal{R})}$ e $biv(\mathcal{R})$ ed inoltre commuta con l'applicazione logaritmo di C; ovvero, vi è un diagramma commutativo di omomorfismi $\mathcal{G}$-equivarianti:

$$\begin{array}{ccc} U_{\mathbf{W}(\mathcal{R})} & \xrightarrow{\log} & biv(\mathcal{R}) \\ \downarrow{\scriptstyle \Theta_0} & & \downarrow{\scriptstyle \Theta} \\ U_{A_C} & \xrightarrow{\log} & C \end{array}$$

ove $U_{A_C} = \{ x \in A_C \mid v(x-1) > 0 \}$.

dim. Osserviamo che, per un vettore $\xi = (x_0, x_1, \dots) \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$, la condizione $w(\xi - 1) > 0$ è equivalente alla condizione $v(x_0 - 1) > 0$. Se $\xi \in U_{\mathbf{W}(\mathcal{R})}$ allora $\xi - 1 \in W_a$ per un opportuno numero reale positivo a, e quindi si ha

$$w\left(\tfrac{(\xi-1)^n}{n}\right) = nw(\xi - 1) - v_p(n) \geq na - v_p(n);$$

poichè $\lim_{n\to\infty} na - v_p(n) = \infty$, la serie $\log(\xi)$ soddisfa alla condizione di Cauchy e quindi converge in $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$. Osserviamo poi che, per ogni vettore di Witt $\eta = (y_0, y_1, \dots)$ si ha $\eta^{p^n} \equiv \{y_0^{p^n}\} \bmod p^{n+1}\mathbf{W}(\mathcal{R})$; quindi le componenti di indice negativo di ogni somma finita di termini della serie $\log(\xi)$ sono polinomi senza termine noto nella variabile $x_0 - 1$, ed avendosi $v(x_0 - 1) \geq a$, se ne deduce che ognuna delle componenti dette ha valore $\geq a$. Dunque, per il criterio di convergenza uniforme (cf. *Teorema 3.18*), si ha che $\log(\xi) \in biv(\mathcal{R})$.

Mostriamo ora che la mappa $\xi \mapsto \log(\xi)$ è continua. A tale scopo è sufficiente osservare che, se $w(1-\xi) > \frac{1}{p-1}$, allora $w((1-\xi)^n/n) > w(1-\xi)$, per ogni intero $n > 1$, e perciò $w(\log(\xi)) = w(1-\xi)$.

Se $\log(\xi) = 0$, allora $\log(\xi^{p^n}) = p^n \log(\xi) = 0$ per ogni intero $n \geq 1$, e quindi, a meno di sostituire ξ con qualche sua potenza, non è restrittivo supporre che si abbia $w(\xi - 1) > \frac{1}{p-1}$. Dunque, se $\xi - 1 \neq 0$, si ha necessariamente, $na - v_p(n) > a$ per ogni intero $n \geq 2$, e quindi $w(\log(\xi)) = a$ che contraddice l'ipotesi $\log(\xi) = 0$. Ciò mostra che l'applicazione log è iniettiva. Le affermazioni successive discendono facilmente dalla continuità dell'applicazione Θ e dalla sua $\mathcal{G}$-equivarianza. **CVD** ■

Passiamo ora ad occuparci del logaritmo di alcuni particolari vettori e cominciamo con un Osservazione.

4.8 Lemma. *Sia* $1 \neq a \in U_{\mathcal{R}} = \{ a \in \mathcal{R} \mid v(a-1) > 0 \}$. *Allora esiste un indice* $i \geq 0$ *tale che* $0 < v_C(\hat{a}_i - 1) \leq 1$ *e si ha* $v_{\mathcal{R}}(a-1) = p^i v_C(\hat{a}_i - 1)$.

dim. Sia $\hat{a}_j = 1 + b_j$. Dunque, $v_C(b_j) > 0$ e, in base a (3.2) e (3.4), si ha

$$v_{\mathcal{R}}(a-1) = \lim_{j\to\infty} v_C((\hat{a}_j - 1)^{p^j}).$$

Dalla relazione $\hat{a}_{j+1}^p = \hat{a}_j$, si ricava

$$b_j = (1 + b_{j+1})^p - 1 = \sum_{h=1}^{p} \binom{p}{h} b_{j+1}^h,$$

ove tutti gli addendi, ad eccezione al più di b_{j+1}^p, hanno un valore strettamente più grande di 1 a causa della presenza del coefficiente binomiale. Dunque, se supponiamo $v_C(b_i) \leq 1$ per qualche indice $i \geq 0$, allora deve essere $v_C(b_i) = v_C(b_{i+1}^p) = pv_C(b_{i+1})$, da cui si deduce $v_C(b_{i+r}) = p^{-r}v_C(b_i)$ per $r \geq 0$. Si conclude che

$$v_{\mathcal{R}}(a-1) = \lim_{j\to\infty} v_C((\hat{a}_j - 1)^{p^j}) = \lim_{j\to\infty} p^j v_C(b_j) = p^i v_C(b_i).$$

D'altro canto, se fosse $v_C(b_i) > 1$ per ogni indice $i \geq 0$, allora, dalla relazione $\hat{a}_{i+1}^p = \hat{a}_i$, si otterrebbe $v_C(b_i) = v_C(b_{i+1}) + 1$ per ogni i e ciò è impossibile se $a \neq 1$. **CVD** ■

4.9 Osservazioni. (a) Consideriamo il vettore $\{\epsilon\}$, ove $\epsilon \in \mathcal{R}$ soddisfa alle condizioni $\hat{\epsilon}_1 \neq 1 = \hat{\epsilon}_0$, ovvero $\hat{\epsilon}_1$ è una radice p-esima primitiva dell'unità in A_C (cf. (3.2) per le notazioni). In base al *Teorema 4.7*, $\tau = \log\{\epsilon\}$ esiste in $biv(\mathcal{R})$. Inoltre, utilizzando il poligono di Newton del polinomio irriducibile $\frac{(X+1)^p-1}{X}$, è facile verificare che il valore in A_C di $\hat{\epsilon}_1 - 1$, che di tale polinomio è radice, è uguale ad $\frac{1}{p-1}$. Il Lemma precedente permette di concludere che $v(\epsilon - 1) = \frac{p}{p-1}$.

Vogliamo mostrare che $w(\{\epsilon\} - 1) = \frac{p}{p-1}$ *e che* $\{\epsilon\} - 1 \in \ker\Theta_0 \setminus (\ker\Theta_0)^2$. In particolare, da ciò discende che $w(\tau) = w(\{\epsilon\} - 1) = \frac{p}{p-1}$ (cf. la dimostrazione del *Teorema 4.7*).

Si consideri il vettore $\{\epsilon\} - 1 = (c_0, c_1, \dots)$; per mostrare che $w(\{\epsilon\} - 1) = \frac{p}{p-1}$, è sufficiente provare che $p^{-1}v(c_1) + 1 \geq \frac{p}{p-1}$.

Supponiamo $p \neq 2$; il caso $p = 2$ sarà trattato separatamente. Da un calcolo diretto sui vettori di Witt, si ottiene

$$c_1 = -\sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{j}(-1)^{p-j}\epsilon^j = -\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{p}\binom{p}{j}(-1)^{p-j}\epsilon^j(1-\epsilon^{p-2j})$$

e dalla considerazione che $1-\epsilon$ divide tutti i termini del tipo $(1-\epsilon^{p-2j})$ nella somma si ottiene che il valore di c_1 è maggiore o uguale di $v(\epsilon - 1) = \frac{p}{p-1}$.

L'ideale $\ker\Theta_0 \subset \mathbf{W}(\mathcal{R})$ è generato dal vettore $\alpha = \{\pi\} + p$ (cf. *Proposizione 3.10*); quindi $\{\epsilon\} - 1$, che appartiene all'ideale $\ker\Theta_0$, si decompone nel prodotto $\alpha\zeta$, con $\zeta \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ e $w(\zeta) = \frac{1}{p-1} < 1$. Si conclude che $\zeta \notin \ker\Theta_0$, perchè $\ker\Theta_0 \subset W_1$, e quindi $\{\epsilon\} - 1 \notin (\ker\Theta_0)^2$.

Supponiamo $p = 2$. Con un calcolo diretto sui polinomi di Witt, si ottiene che la componente c_1 di $\{\epsilon\} - 1 = \{\epsilon\} + (1, 1, \dots)$, è uguale a $c_1 = 1 - \epsilon$. Dunque, anche in questo caso si ha $w(\{\epsilon\} - 1) = \frac{p}{p-1} = 2$.

Sia ora $\{\epsilon\} - 1 = \alpha\zeta$ ove $\zeta = (z_0, z_1, \dots)$ con $z_0 = \frac{\epsilon-1}{\pi}$ e $z_1 = \frac{\epsilon-1-z_0^2}{\pi^2}$. È quindi sufficiente osservare che $\Theta_0(\zeta) \equiv \hat{z}_{0,0} + 2\hat{z}_{1,1} \bmod 4A_C$ e che $v_C(\hat{z}_{0,0}) = 1$ e $v_C(\hat{z}_{1,1}) > 0^{(\dagger)}$, per concludere che $v_C(\Theta_0(\zeta)) = 1$ e quindi $\Theta_0(\zeta) \neq 0$.

(*b*) L'elemento $\epsilon \in \mathcal{R}$ è una base del modulo di Tate del gruppo moltiplicativo, ovvero dello $\mathbb{Z}_p$-modulo $\epsilon^{\mathbb{Z}_p} \cong T\mathbb{G}_m = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m(A_C))^{(*)}$, contenuto nel gruppo moltiplicativo dell'anello $\mathcal{R}$. L'azione del gruppo di Galois $\mathcal{G}$ sull'elemento $\{\epsilon\}$ è determinata da un carattere $\chi: \mathcal{G} \to \mathbb{Z}_p^\times$, ovvero, per ogni elemento $\sigma \in \mathcal{G}$, si ha $\sigma\{\epsilon\} = \{\epsilon\}^{\chi(\sigma)}$.

Tramite il logaritmo definito nel *Teorema 4.7*, gli elementi del tipo $\{\epsilon^r\}$, con $r \in \mathbb{Z}_p$ vengono mandati nel sotto-$\mathbb{Z}_p$-modulo di $biv(\mathcal{R})$ generato da $\tau = \log\{\epsilon\}$. Inoltre, poichè $biv(\mathcal{R})$ è un $\mathbb{Q}_p$-modulo, si ottiene in tal modo un'immersione dello spazio di Tate $V\mathbb{G}_m = T\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{Q}_p \cong \mathbb{Q}_p\tau$ nel gruppo additivo di $biv(\mathcal{R})$, compatibile con l'azione del gruppo di Galois; ovvero, si ha

$$\sigma(\tau) = \log(\{\epsilon\}^{\chi(\sigma)}) = \chi(\sigma)\tau \quad \text{per ogni } \sigma \in \mathcal{G}.$$

Ciò significa che il sotto-$\mathbb{Q}_p$-modulo di $biv(\mathcal{R})$ generato da τ è isomorfo al modulo di Galois $\mathbb{Q}_p(1)$ (Twist di Tate del campo dei numeri p-adici).

Dalla continuità del Frobenius in $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$, si deduce la relazione

$$F\tau = \log(F\{\epsilon\}) = \log\{\epsilon^p\} = p\log\{\epsilon\} = p\tau; \tag{4.10}$$

$^{(\dagger)}$ Per verificare questa affermazione, si osservi che, dal calcolo delle componenti del vettore ζ, si ha $v_C(\hat{z}_{1,1}) > 0$ se, e solo se, $v_{\mathcal{R}}(\pi^2 - (\epsilon - 1)) > 2$. Bisogna quindi mostrare che, per n elevato, si ha $v_C\left((\hat{u}_{n-1} - (\hat{\epsilon}_n - 1))^{2^n}\right) > 2$, ove $\pi = (u_0, u_1, \dots) \in \mathcal{R}$ ed $\hat{u}_0 = -2$. Poichè

$$v_C\left((\hat{u}_{n-1} - (\hat{\epsilon}_n - 1))^{2^n}\right) > 2 \quad \Longleftrightarrow \quad v_C\left(\hat{u}_{n-1}^{2^n} + (\hat{\epsilon}_n - 1)^{2^n}\right) > 2$$

ed $\hat{u}_{n-1}^{2^n} = 4$; la tesi è vera se, e solo se, $(\hat{\epsilon}_n - 1))^{2^n} = \pm 4 + t$ con $v_C(t) > 2$. Dalla formula del binomio e dalla definizione di ϵ, si ricava che

$$(\hat{\epsilon}_n - 1))^{2^n} = 2 - \binom{2^n}{2^{n-1}} + \left[\binom{2^n}{2^{n-2}} - \binom{2^n}{3\,2^{n-2}}\right]\hat{\epsilon}_2 + t \quad \text{con } v_C(t) > 2$$

e basta ricordare che, per $n \geq 2$, si ha $\binom{2^n}{2^{n-1}} \equiv -2 \bmod 8$ per concludere.

$^{(*)}$ Se $r \in \mathbb{Z}_p = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, sia $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $r_n \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Sia $k \geq 0$, allora, per ogni $\hat{\epsilon}_k$, radice p^k-esima di 1, si ha $\epsilon_k^r := \lim_{n\to\infty} \hat{\epsilon}_k^{r_n} = \hat{\epsilon}_k^{r_k}$; e quindi è ben definito il valore $\epsilon^r \in \mathcal{R}$.

da cui discende $V\tau = \tau$. Si conclude che il $\mathbf{W}(k)$-modulo $\mathbf{W}(k)\tau \subset biv(\mathcal{R})$ è dotato degli endomorfismi (semilineari) F e V, soddisfacenti alle condizioni $FV = VF = p$ ed è quindi un Modulo di Dieudonné (il modulo di Dieudonné del gruppo moltiplicativo su k).

Apriamo una parentesi per descrivere in modo preciso i bivettori del tipo $\log\{a\}$ al variare di a in $U_{\mathcal{R}}$. Cominciamo ricordando l'usuale condizione di convergenza di una serie di tipo esponenziale.

4.11 Lemma. *Sia $\eta = (y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ un bivettore e sia $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di vettori. Se $w(\eta) = a > \frac{1}{p-1}$, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{\eta^n}{n!}$ converge in $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$.*

dim. Poichè $w(\beta_n \frac{\eta^n}{n!}) \geq na - v_p(n!) \geq na - \frac{n-1}{p-1}$, ed inoltre, se $a > \frac{1}{p-1}$, si ha $\lim\limits_{n\to\infty} [na - \frac{n-1}{p-1}] = \infty$; allora la serie nell'enunciato soddisfa alla condizione di Cauchy e perciò converge. **CVD** ■

Sia $\mathcal{E}$ il sotto-$\mathbf{W}(\mathcal{R})$-modulo di $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$ così definito

$$\mathcal{E} = \{\, \eta \mid w(\eta) > \tfrac{1}{p-1} \,\}$$

e definiamo l'applicazione continua $\exp\colon \mathcal{E} \to \mathbf{Biv}\mathcal{R}$ ponendo $\exp(\eta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!}$ per ogni $\eta \in \mathcal{E}$. Osserviamo che la continuità discende facilmente dall'osservazione che $w(\eta) = b > \frac{1}{p-1}$ implica che $w(\exp(\eta) - 1) = b$. Dunque è immediato osservare che la serie esponenziale e la serie di $\log(1-x)$ definiscono un isomorfismo tra il sottogruppo additivo $\mathcal{E}$ di $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$ ed il sottogruppo moltiplicativo $U' = \{\, \eta \in \mathbf{Biv}\mathcal{R} \mid w(1-\eta) > \frac{1}{p-1} \,\}$.

Siamo quindi in grado di caratterizzare i bivettori del tipo $\log\{\epsilon\}$ in un modo analogo a quanto dimostrato da Barsotti per quanto concerne la sua topologia (cf. Teorema 2.9 di [MA]).

4.12 Teorema. *Sia $\mathcal{L} = \{\eta \in \mathcal{E} \cap biv(\mathcal{R}) \mid V\eta = \eta\}$. Se $\eta \in \mathcal{L}$ allora $\eta = \log\{x\}$ per qualche $x \in \mathcal{R}$. Più precisamente se indichiamo con y una componente di η, allora $x = E(y)$ ove $E(t) = \exp\big(\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} p^{-j} t^{p^j}\big) \in \mathbb{Z}_p[\![t]\!]$ è la funzione di Artin-Hasse.*

dim. Se $\eta \in \mathcal{L}$, allora $\eta = \lim\limits_{n\to\infty} V^n(\eta^{(\leq 0)})$. Dalla continuità dell'esponenziale, si ottiene

$$\exp(\eta) = \lim_{n\to\infty} \exp(V^n(\eta^{(\leq 0)})),$$

e dalla continuità del Frobenius e del suo inverso, si ottiene

$$\exp(V^n(\eta^{(\leq 0)})) = F^{-n}\exp(p^n(\eta^{(\leq 0)})) = F^{-n}[\exp(\eta^{(\leq 0)})]^{p^n}.$$

Se indichiamo con y una componente di η (sono tutte uguali tra loro), possiamo scrivere la rappresentazione di Teichmüller di $\eta^{(\leq 0)} = \sum_{j=0}^{\infty} p^{-j}\{y^{p^j}\}$. Osserviamo ora che il vettore $\{y\}$ ha w-valore positivo, essendo η un bivettore, e quindi, poichè la serie $E(t) \in \mathbb{Z}_p[\![t]\!]$, se ne deduce che $\exp(\eta^{(\leq 0)}) = E(\{y\}) \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$. Come conseguenza, si ha

$$\exp(\eta) = \lim_{n\to\infty} \exp(V^n(\eta^{(\leq 0)})) = \lim_{n\to\infty} F^{-n}E(\{y\})^{p^n} = \{E(y)\},$$

perchè per qualsiasi vettore di Witt $\xi = (x_0, x_1, \dots)$ e per qualsiasi intero non-negativo n, si ha $\xi^{p^n} \equiv F^n\{x_0\} \bmod p^{n+1}\mathbf{W}(\mathcal{R})$. **CVD** ■

Siamo quindi in grado di illustrare grazie al bivettore $\tau = \log\{\epsilon\}$ alcune delle proprietà dell'anello $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$ e della mappa Θ del *Teorema 4.2*.

4.13 Proposizione. *Sia* $\tau = \log\{\epsilon\}$. *Allora* τ *appartiene a* $\ker\Theta$ *e la sua immagine genera il* C*-spazio vettoriale* $\dfrac{\ker\Theta}{(\ker\Theta)^2}$.

dim. Per prima cosa osserviamo che $\Theta(\tau) = \Theta(\log\{\epsilon\}) = \log(\Theta_0(\{\epsilon\})) = \log(1) = 0$. Dunque $\tau \in \ker\Theta$. Posto $\gamma = 1 - \{\epsilon\} \in \ker\Theta_0 \setminus (\ker\Theta_0)^2$ (cf. *Osservazione 4.9.(a)*) si ha

$$\tau = \gamma + \sum_{n\geq 2}(-1)^{n+1}\frac{\gamma^n}{n};$$

e quindi $\tau \equiv \gamma \bmod (\ker\Theta)^2$, da cui si deduce la tesi. **CVD** ■

Una conseguenza del risultato precedente è il seguente:

4.14 Corollario. *Per ogni intero* $n \geq 0$ *vi è un omomorfismo* $\phi_n\colon (\ker\Theta)^n \to C$, *che induce un isomorfismo di moduli di Galois*

$$\phi_n\colon \frac{(\ker\Theta)^n}{(\ker\Theta)^{n+1}} \to C(n)$$

ove $C(n) = C \otimes \mathbb{Z}_p(n)$ *è il twist di Tate di* C *tramite il carattere ciclotomico.*

dim. L'omomorfismo ϕ_0 è la mappa Θ del *Teorema 4.2*, che commuta con le azioni del gruppo di Galois $\mathcal{G}$ su $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$ e C. Sia $\alpha = \{\pi\} + p$ il generatore di $\ker\Theta$ ed osserviamo che, in base alla *Proposizione 4.12*, si ha $\tau = \alpha\beta$ con $\Theta(\beta) \neq 0$ e quindi è ben definita l'applicazione $\phi_n: (\ker\Theta)^n \to C$ che manda l'elemento $\xi = \alpha^n\mu \in (\ker\Theta)^n$ sull'elemento $\Theta(\mu)\Theta(\beta)^{-n} \in C$. È facile verificare che tale applicazione è $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$-lineare, suriettiva e che il suo nucleo è esattamente $(\ker\Theta)^{n+1}$; dunque, ϕ_n determina un isomorfismo C-lineare tra il quoziente $\frac{(\ker\Theta)^n}{(\ker\Theta)^{n+1}}$ e C. Rimane quindi da verificare l'asserzione sull'azione del gruppo $\mathcal{G}$. Per ogni $s \in \mathcal{G}$, si ha $s(\alpha) \in \ker\Theta$ e $w(\alpha) = w(s(\alpha))$, cosicchè $s(\alpha) = \alpha\lambda_s$ per un qualche vettore λ_s, con $w(\lambda_s) = 0$. Inoltre, $\chi(s)\alpha\beta = \chi(s)\tau = s(\tau) = s(\alpha)s(\beta) = \lambda_s\alpha s(\beta)$, che implica $\chi(s)\beta = \lambda_s s(\beta)$, perchè $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$ è un dominio di integrità. Applicando Θ si ottiene $\chi(s)\Theta(\beta) = \Theta(\lambda_s)\Theta(s(\beta))$ e quindi $\Theta(\lambda_s)^n\Theta(\beta)^{-n} = \chi(s)^n s(\Theta(\beta))^{-n}$ per ogni $n \geq 1$. Allora, per $\xi = \alpha^n\mu \in (\ker\Theta)^n$ si ottiene

$$\begin{aligned}\phi_n(s(\xi)) = \phi_n(s(\alpha^n)s(\mu)) = \phi_n(\alpha^n\lambda_s^n s(\mu)) = \Theta(\lambda_s)^n\Theta(s(\mu))\Theta(\beta)^{-n} = \\ = \Theta(s(\mu))\chi(s)^n s(\Theta(\beta))^{-n} = \chi(s)^n s[\Theta(\mu)\Theta(\beta)^{-n}] = \chi(s)^n s[\phi_n(\xi)];\end{aligned}$$

e ciò è quanto volevamo. **CVD** ■

Siamo quindi in grado di dimostrare un altro risultato che descrive l'azione del gruppo $\mathcal{G}$ sull'anello $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$.

4.15 Proposizione. *Notazioni come sopra. Allora* $(\mathbf{Biv}\mathcal{R})^{\mathcal{G}} = biv(k) = K$. *Più in generale, per ogni* $i \geq 0$, *si ha*

$$B(i) = \{\, \xi \in \mathbf{Biv}\mathcal{R} \mid s(\xi) = \chi(s)^i\xi \ \forall s \in \mathcal{G} \,\} = \tau^i K.$$

dim. Cominciamo con la determinazione di $B(0) = (\mathbf{Biv}\mathcal{R})^{\mathcal{G}}$. Se $s(\xi) = \xi$ per ogni $s \in \mathcal{G}$, allora $\Theta(\xi) \in C^{\mathcal{G}} = K$ e perciò esiste un elemento $\xi' \in biv(k) = K$ tale che $\xi - \xi' = \eta \in \ker\Theta$. Essendo differenza di due elementi $\mathcal{G}$-invarianti, anche η è in $B(0)$ e ciò implica $\phi_1(\eta) = \phi_1(s(\eta)) = \chi(s)s(\phi_1(\eta))$, e quindi $\phi_1(\eta) = 0$(*) e perciò $\eta \in (\ker\Theta)^2$. Ragionando in modo analogo si ottiene $\eta \in (\ker\Theta)^n$ per ogni n e quindi, in base al *Teorema 4.2*, se ne deduce che $\eta = 0$ e quindi $B(0) = biv(k) = K$.

Supponiamo ora $n \geq 1$ e sia $\xi \in B(n)$. Utilizzando gli argomenti precedenti, si ottiene $\phi_j(\xi) = 0$ per $j < n$ e $\xi \equiv \tau^n\xi' \bmod (\ker\Theta)^n$, per un opportuno $\xi' \in K$. Se ne deduce che $\xi - \tau^n\xi' = \eta_n \in (\ker\Theta)^{n+1} \cap B(n)$ e quindi η_n soddisfa alla condizione $\chi(s)^n\phi_{n+1}(\eta_n) = \phi_{n+1}(s(\eta_n)) = \chi(s)^{n+1}s(\phi_{n+1}(\eta_n))$, per ogni $s \in \mathcal{G}$, e ciò implica $\phi_{n+1}(\eta_n) = 0$ e perciò $\eta_n \in (\ker\Theta)^{n+2}$. Applicando gli argomenti precedenti, se ne deduce che $\eta_n \in (\ker\Theta)^k$ per ogni k e perciò $\eta_n = 0$ da cui si conclude che $B(n) = \tau^n K$.
CVD ■

(*) Ricordiamo che, per $i > 0$, si ha $C(i)^{\mathcal{G}} = (0)$ (cf. Theorem 2 di J. T. Tate *p–divisible groups* Proc. Conf. on Local Fields, Driebergen 1967, pp. 158–183).

Torniamo a discutere del logaritmo e dell'estensione dell'applicazione definita nel *Teorema 4.7* a tutti i vettori del tipo $\{x\}$, al variare di x in $\mathcal{R}\setminus 0$. Per chiarire le relazioni tra una tale estensione ed il logaritmo p–adico del campo C, abbiamo bisogno di alcune definizioni.

4.16 Definizione. Ricordiamo che, se Γ è un gruppo commutativo, si definiscono

$$\begin{array}{rl} \text{il } \textit{Modulo di Tate} \text{ di } \Gamma & T_p(\Gamma) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[\tfrac{1}{p}]/\mathbb{Z}, \Gamma), \\ \text{lo } \textit{Spazio di Tate} \text{ di } \Gamma & V_{(p)}(\Gamma) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[\tfrac{1}{p}], \Gamma). \end{array}$$

Qualunque sia Γ si ha la sequenza esatta

$$0 \to T_p(\Gamma) \longrightarrow V_{(p)}(\Gamma) \xrightarrow{\pi} \Gamma\,.$$

In particolare, se Γ è un gruppo p–divisibile, l'omomorfismo π è suriettivo, ed è un isomorfismo se, inoltre, Γ è privo di p–torsione.

Consideriamo ora i gruppi moltiplicativi $A_C^\times = \mathbb{G}_m(A_C)$ e $C^\times = \mathbb{G}_m(C)$. Per tali gruppi si ha

$$V_{(p)}(A_C^\times) = \mathcal{R}^\times, \qquad V_{(p)}(C^\times) = (Fr\mathcal{R})^\times, \qquad T_p(A_C^\times) = T_p(C^\times) \cong \epsilon^{\mathbb{Z}_p} = \mathbb{Z}_p(1);$$

ove $\epsilon \in \mathcal{R}$ ed $\hat{\epsilon}_1 \neq 1 = \hat{\epsilon}_0$ (cf. *Osservazione 4.9.(b)*). In particolare, poichè sia $A_C^\times$ che $C^\times$ sono gruppi divisibili, si ha il seguente diagramma commutativo, a righe e colonne esatte (tratto da [FO3])

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p(1) & \longrightarrow & \mathcal{R}^\times & \longrightarrow & A_C^\times & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p(1) & \longrightarrow & (Fr\mathcal{R})^\times & \longrightarrow & C^\times & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle v_{\mathcal{R}}} & & \downarrow{\scriptstyle v_C} & & \\ & & & & \mathbb{Q} & = & \mathbb{Q} & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \end{array} \quad . \tag{4.17}$$

Prima di discutere dell'estensione del logaritmo di vettori di Witt, ricordiamo la definizione del logaritmo p–adico del corpo C. Possiamo dividere la costruzione in due passi:

(i) dato un elemento $x \in A_C^\times$, si consideri la sua immagine $x_0 \in \bar{k} = A_C/m$ ed il suo rappresentante moltiplicativo $\{x_0\}$ in A_C (cf. *Lemma 1.17*). Allora $u = x\{x_0^{-1}\}$ appartiene ad U_{A_C} e si pone

$$\log x := \log u = -\sum_{n \geq 1} \frac{(1-u)^n}{n} \in C.$$

Si definisce in tal modo un'applicazione continua $\log : A_C^\times \to C$, che commuta con l'azione del gruppo di Galois.

(ii) Supponiamo che, come di consueto, la valutazione di C sia normalizzata ponendo $v(p) = 1$. Allora, dato un elemento $x \in C^\times$, esistono e sono univocamente determinati, due interi r ed s ed un elemento $y \in A_C^\times$, tali che $s > 0$, $(r, s) = 1$ e $p^r y = x^s$ (in particolare $v_C(x) = \frac{r}{s}$). Dunque, per qualsiasi applicazione logaritmo che estenda l'omomorfismo descritto in (i), deve aversi

$$\log x = \frac{r}{s} \log p + \frac{1}{s} \log y,$$

ove $\log y$ è stato definito in (i) ed il valore di $\log p$ può essere assegnato ad arbitrio. Dunque, per ogni scelta di $\log p$ in $K = biv(k)$ si ottiene nel modo descritto un omomorfismo continuo $\log : C^\times \to C$, che commuta con l'azione del gruppo di Galois. La scelta usuale è quella di porre $\log p = 0$.

4.18 Definizione. Poniamoci ora in $V_{(p)}(C^\times) = (Fr\mathcal{R})^\times$ e discutiamo in dettaglio la definizione del logaritmo.

(i) Se $x \in \mathcal{R}^\times = V_{(p)}(A_C^\times)$, possiamo decomporre x nel prodotto $x = x_0 u$, ove $x_0 \in \bar{k} \subset \mathcal{R}$ ed $u \in U_{\mathcal{R}}$ (cf. *Proposizione 3.5*). Si pone

$$\log\{x\} := \log\{u\} = -\sum_{n \geq 1} \frac{(1-\{u\})^n}{n} \in \mathbf{Biv}\mathcal{R}. \tag{4.19}$$

Come già osservato nel *Teorema 4.7*, questa definizione commuta con l'azione del gruppo di Galois ed ha i suoi valori in $biv(\mathcal{R})$.

(ii) Sia ora $x \in (Fr\mathcal{R})^\times$ e si consideri un elemento $\sigma \in \mathcal{R}$, tale che $\hat{\sigma}_0 = p$ (cf. (3.2)). Allora esistono e sono univocamente determinati, due interi r ed s ed un elemento $y \in \mathcal{R}^\times$, tali che $s > 0$, $(r, s) = 1$ e $\sigma^r y = x^s$ (in particolare $v_{\mathcal{R}}(x) = \frac{r}{s}$). Perciò, se

esiste una applicazione "logaritmo" che estenda l'omomorfismo definito in (i), deve aversi
$$\log\{x\} = \frac{r}{s}\log\{\sigma\} + \frac{1}{s}\log\{y\}.$$
Si tratta quindi di dare un valore a $\log\{\sigma\}$, ma, a differenza del logaritmo p–adico, non sono possibili scelte arbitrarie se si vuole che il logaritmo commuti con l'azione del gruppo di Galois.
Osserviamo inoltre che, se si vuole che questo logaritmo sia in relazione con il logaritmo p–adico di C, si deve porre $\log\{\sigma\} = \log\frac{\{\sigma\}}{p} + \log p$, ove l'ultimo addendo è il valore del logaritmo p–adico $\log p \in biv(k) \subset \mathbf{Biv}\mathcal{R}$. D'altro canto, la serie $\sum_{n\geq 1}\frac{(1-\{\sigma\}/p)^n}{n}$, non converge in $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$, perchè $w(1-\{\sigma\}/p) = 0$, ma si ha $1-\frac{\{\sigma\}}{p} \in \ker\Theta$ e quindi tale serie converge nel completamento di $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$ relativamente all'ideale $\ker\Theta$. Indicato (provvisoriamente) con il simbolo $\mathbb{B}$ tale anello(*), ovvero

$$\mathbb{B} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{Biv}\mathcal{R}/(\ker\Theta)^n, \tag{4.20}$$

osserviamo che $\mathbb{B}$ è dotato di una naturale azione di Galois (per estensione dell'azione continua su $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$) e di un omomorfismo suriettivo $\Theta : \mathbb{B} \to C$ che commuta con l'azione del gruppo di Galois (estensione dell'omonimo omomorfismo definito su $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$). In particolare, si può dar valori in tale anello ad un omomorfismo $\log : V_{(p)}(C^\times) \to \mathbb{B}$, che commuta con le azioni del gruppo di Galois, definito dalla posizione
$$\log\{x\} := \frac{r}{s}\log\frac{\{\sigma\}}{p} + \frac{r}{s}\log p + \frac{1}{s}\log\{y\},$$
ove $x^s = \sigma^r y$ è la decomposizione descritta sopra, $\log\{y\} \in \mathbf{Biv}\mathcal{R}$ è il logaritmo definito in (i) e $\log p \in biv(k)$ è il valore del logaritmo p–adico. Il logaritmo così definito è collegato col logaritmo p–adico di $C^\times$ dalla relazione $\Theta(\log\{x\}) = \log(\pi x)$, ove $\pi : V_{(p)}(C^\times) \to C$ è la proiezione canonica (cf. *Definizione 4.16* e diagramma (4.17)).

Abbiamo già detto dell'azione di Galois su $\mathbb{B} = \varprojlim \mathbf{Biv}\mathcal{R}/(\ker\Theta)^n$ e dell'omomorfismo suriettivo $\Theta : \mathbb{B} \to C$; vogliamo dare qualche ulteriore informazione su questo anello osservando che il contenuto delle *Proposizioni 4.13, 4.14* e *4.15* si trasporta all'anello $\mathbb{B}$ ed agli ideali $(\ker\Theta)^n$ di tale anello. Per distinguerli dagli omonimi ideali dell'anello

(*) Vedremo nella prossima sezione che l'anello $\mathbb{B}$ è isomorfo all'anello B_{dR}^+ di Fontaine.

$\mathbf{Biv}\mathcal{R}$, scriveremo Fil^n per indicare l'ideale $(\ker\Theta)^n$ di $\mathbb{B}$, ma useremo ancora il simbolo ϕ_n per indicare l'omomorfismo $Fil^n \to C$ (cf. *Corollario 4.14*) e l'isomorfismo indotto $Fil^n/Fil^{n+1} \cong C(n)$. In particolare, osserviamo che $\mathbb{B}$ è un anello di valutazione discreta equicaratteristica, con corpo residuo uguale a C ed ideale massimale Fil^1, generato da un qualunque elemento di $Fil^1 \setminus Fil^2$; in particolare, se $\sigma \in \mathcal{R}$ con $\hat{\sigma}_0 = p$, l'ideale Fil^1 è generato dal vettore $\alpha = p - \{\sigma\} \in \ker\Theta_0 \subset \mathbf{W}(\mathcal{R})$.

Vogliamo concludere questa sezione mostrando un'ulteriore proprietà del logaritmo.

4.21 Teorema. *Sia $\sigma \in \mathcal{R}$ con $\hat{\sigma}_0 = p$; allora l'elemento*

$$u = \log\frac{\{\sigma\}}{p} = -\sum_{n\geq 1}\frac{(1-\{\sigma\}/p)^n}{n}$$

di $\mathbb{B}$ (cf. (4.20)) non è algebrico su $Fr(\mathbf{Biv}\mathcal{R})$.

La dimostrazione discenderà da alcuni Lemmi[(*)]. Cominciamo fissando alcune notazioni. Si consideri il vettore $\alpha = p - \{\sigma\}$, generatore dell'ideale $I = \ker\Theta_0$ di $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ (cf. *Proposizione 3.10.(b)* e sua dimostrazione) e sia $\beta = \alpha/p \in \mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}]$. Possiamo quindi enunciare il seguente

4.22 Lemma 1. *Sia β come sopra e si indichi con S il sottoanello di $\mathbb{B}$ formato dagli elementi che si possono scrivere nella forma $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\beta^n$, con $a_n \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ per ogni $n \geq 0$. Allora $\mathbf{Biv}\mathcal{R} \subseteq S[\frac{1}{p}]$.*

dim. Ogni elemento di $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$ si può scrivere nella forma $\sum_{n\geq 0} b_n$, ove b_n appartiene a $\mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}]$ per ogni $n \geq 0$ e la serie converge nella topologia della valutazione w. Sia $I = \ker\Theta_0$ l'ideale di $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ e si ponga $I^0 = \mathbf{W}(\mathcal{R})$. Diamo una descrizione degli intorni dello zero in $\mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}]$ per la topologia della valutazione, tramite le potenze dell'ideale I. In base alla *Proposizione 3.10.(c)*, per ogni intero positivo n, si ha

$$W_n^0 = \{\, x \in \mathbf{W}(\mathcal{R}) \mid w(x) \geq n \,\} = \sum_{j=0}^{n} p^j I^{n-j}\,.$$

Da ciò si deduce

$$W_k = \left\{\, x \in \mathbf{W}(\mathcal{R})[\tfrac{1}{p}] \mid w(x) \geq k \,\right\} = \sum_{j\geq 0} p^{-j} W_{k+j}^0 = \sum_{j\geq -k} p^{-j} I^{k+j}.$$

[(*)] Le dimostrazioni che seguono sviluppano un argomento analogo alla dimostrazione del Teorema 4.2.4 di [FO3].

Poichè la serie $\sum_{n\geq 0} b_n$ converge, fissato comunque un intero positivo k, esiste un indice n_k tale che $b_n \in W_k$ per ogni $n \geq n_k$. Ciò significa che, per $n \geq n_k$, si ha

$$b_n = \sum_{j\geq -k} p^{-j} a_{n,j+k} \alpha^{k+j},$$

con gli $a_{n,j+k}$ in $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ e quasi tutti nulli. Dunque, utilizzando $\beta = \alpha/p$ si può scrivere $b_n = \sum_{h\geq 0} a'_{n,h}\beta^h$, con $a'_{n,h} \in p^k\mathbf{W}(\mathcal{R})$ per ogni $n \geq n_k$. Ciò significa che, per ogni valore di h fissato, la serie $\sum_{n\geq 0} a'_{n,h}$ converge ad un elemento $a_h \in \mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}]$ nella topologia p–adica di tale anello. Si conclude che la serie $\sum_{h\geq 0} a_h\beta^h = \sum_{n\geq 0} b_n$ appartiene ad $S[\frac{1}{p}]$. **CVD** ∎

4.23 Lemma 2. *Sia* $u = \log\frac{\{\sigma\}}{p}$ *in* $\mathbb{B}$*; allora* $u \notin Fr(\mathbf{Biv}\mathcal{R})$.

dim. Siano $\alpha = p - \{\sigma\}$ e $\beta = \alpha/p$; allora $u = -\sum_{n\geq 1}\frac{\beta^n}{n}$. Per mostrare che $u \notin Fr(\mathbf{Biv}\mathcal{R})$, è sufficiente mostrare che $u \notin Fr S$, ove S è il sottoanello di $\mathbb{B}$ definito nel *Lemma 1*. Si considerino quindi gli ideali di S

$$Fil^j S := S \cap Fil^j = \beta^j S \qquad \text{per } j \geq 1;$$

e si denoti con $\phi_j : Fil^j S \to A_C$ l'applicazione che manda $a\beta^j$ in $\Theta(a)$.

Per concludere è sufficiente mostrare che, se $0 \neq a \in S$, allora $au \neq S$; ed essendo $\bigcap_{n\geq 0} p^n S = (0)$, non è restrittivo supporre che $a = p^r x$ con $r \geq 0$ ed $x \in S \setminus pS$.

Osserviamo che, se $b \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ soddisfa alla condizione $\Theta_0(b) \in pA_C$, allora $b \in p\mathbf{W}(\mathcal{R}) + I \subseteq pS$. Quindi, se $x = \sum_{n\geq 0} b_n\beta^n \in S \setminus pS$, esiste un indice $i \geq 0$ tale che

$$\Theta_0(b_h) \in pA_C \text{ per } h < i\ texte \Theta_0(b_i) \notin pA_C.$$

Si fissi quindi un intero j tale che $j > r$ e $p^j > i$.

Se $p^r xu \in S$, otteniamo una contraddizione, infatti, in tal caso si avrebbe

$$-p^{j-1}xu = x\left(\sum_{m\geq 1} p^{j-1}\frac{\beta^m}{m}\right) \in S;$$

da cui si deduce che

$$x\frac{\beta^{p^j}}{p} \in S + Fil^{2p^j}.$$

Dunque, per le ipotesi fatte su i e j, si ha

$$b_i\frac{\beta^{p^j+i}}{p} \in S + Fil^{i+p^j+1};$$

e perciò

$$\phi_{i+p^j}(b_i \frac{\beta^{p^j+i}}{p}) \in \phi_{i+p^j}(Fil^{i+p^j} S) = A_C.$$

D'altra parte, con un calcolo diretto, si ottiene

$$\phi_{i+p^j}(b_i \frac{\beta^{p^j+i}}{p}) = \Theta_0(b_i)/p \notin A_C$$

e questa è la contraddizione cercata. **CVD** ■

Possiamo quindi concludere con

dim. del Teorema (4.21). In base ai Lemmi precedenti è sufficiente mostrare che, se u fosse algebrico su $Fr(\mathbf{Biv}\mathcal{R})$, allora u apparterrebbe a tale corpo. Sia quindi $c_d + c_{d-1}X + \cdots + c_1 X^{d-1} + X^d$ il polinomio minimo di u su $Fr(\mathbf{Biv}\mathcal{R})$.

Si osservi che, dato un elemento $g \in \mathcal{G} = Gal(\bar{K}/K)$, si ha $g(\frac{\{\sigma\}}{p}) = \frac{\{\sigma\}}{p}\{\epsilon\}^{\eta(g)}$, ove $\eta : \mathcal{G} \to \mathbb{Z}_p$ è un'applicazione continua ed $\epsilon \in \mathcal{R}$ è definito nell'*Osservazione 4.9.(a)*. Posto $\tau = \log\{\epsilon\} \in \mathbf{Biv}\mathcal{R}$, si deduce dalla relazione precedente che $g(u) = u + \eta(g)\tau$ in quanto il logaritmo commuta con l'azione di $\mathcal{G}$.

Poichè $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$ ed il suo corpo delle frazioni sono chiusi rispetto all'azione di $\mathcal{G}$, dalla relazione

$$g(c_d) + g(c_{d-1})(u + \eta(g)\tau) + \cdots + g(c_1)(u + \eta(g)\tau)^{d-1} + (u + \eta(g)\tau)^d = 0$$

e dall'unicità del polinomio minimo si deduce che

$$g(c_1) + d\eta(g)\tau = c_1 \qquad \text{per ogni } g \in \mathcal{G}.$$

Dunque, posto $c = c_1 + du$, si ha $g(c) = c$ per ogni $g \in \mathcal{G}$; e quindi $c \in \mathbb{B}^{\mathcal{G}} = K \subset \mathbf{Biv}\mathcal{R}$. Si conclude che $u = \frac{c - c_1}{d} \in Fr(\mathbf{Biv}\mathcal{R})$, che è quanto volevamo. **CVD** ■

5. Confronto con gli anelli di Fontaine

Lo scopo di questa sezione è di mostrare in dettaglio le relazioni esistenti tra l'anello $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$, il modulo $biv(\mathcal{R})$ e gli anelli B^+, B^+_{cris}, B^+_{st}, B^+_{dR} e B^+_{HT}; parte dei quali fu introdotta da Fontaine in [FO2]. Una descrizione dettagliata e aggiornata di tali anelli si può trovare in [FO3], dove, tra l'altro, alcuni di questi anelli vengono caratterizzati come soluzioni di problemi universali.

Parte dei risultati di questa sezione sono contenuti in [PD].

Cominciamo richiamando la nozione di ideale a potenze divise (cf. ad esempio P. Berthelot *Cohomologie Cristalline des Schemas de Caractéristique* $p > 0$, Lecture Notes in Mathematics 407, Springer 1974).

Richiamo. Sia A un anello e J un ideale di A. Si chiama *struttura di ideale a potenze divise* (o PD-struttura) su J, il dato di una famiglia di applicazioni $(\gamma_n : J \to A)_{n\in\mathbb{N}}$, soddisfacenti alle seguenti condizioni

(i) per ogni $x \in J$ si ha $\gamma_0(x) = 1, \quad \gamma_1(x) = x, \quad$ e, per $n \geq 2$, $\gamma_n(x) \in J$;

(ii) per ogni $x, y \in J$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\gamma_n(x+y) = \sum_{i=0}^n \gamma_i(x)\gamma_{n-i}(y)$;

(iii) per ogni $a \in A$, per ogni $x \in J$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\gamma_n(ax) = a^n\gamma_n(x)$;

(iv) per ogni $x \in J$ e per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ si ha $\gamma_m(x)\gamma_n(x) = \binom{n+m}{m}\gamma_{m+n}(x)$;

(v) per ogni $x \in J$ e per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ si ha $\gamma_m(\gamma_n(x)) = C_{m,n}\gamma_{mn}(x)$, ove $C_{m,n} = \frac{(mn)!}{m!\,(n!)^m} = \prod_{j=2}^m \binom{nj-1}{n-1}$.

Diamo ora la definizione degli anelli B^+_{cris} e B^+. Si considerino l'anello $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ ed il suo ideale $I = \ker\Theta_0$ e sia α un generatore di I come in §.3. Indichiamo con A il sottoanello di $\mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}]$ generato su $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ dagli elementi del tipo $\frac{\alpha^n}{n!}$. Vi è un'ovvia estensione su A dell'omomorfismo Θ_0 e, indicato con J il suo nucleo, vi è una naturale struttura di potenze divise sull'ideale J, definita ponendo $\gamma_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ per ogni x in J. Il completamento di A rispetto alla topologia p–adica si indica con il simbolo A_{cris}(*). Si pone infine (cf. [FO3], 2.3)

$$B^+_{cris} := A_{cris}[\tfrac{1}{p}]. \tag{5.1}$$

L'anello B^+_{cris} è dotato di un endomorfismo di Frobenius F, ottenuto estendendo per continuità l'omonimo endomorfismo di $\mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}]$; si osservi infatti che, se $\alpha = \{\pi\} + p$ è il generatore di $\ker\Theta_0$ descritto nella dimostrazione della *Proposizione 3.10*, si ha

(*) In altri termini, l'anello A_{cris} è isomorfo all'inviluppo p–adico a potenze divise della coppia $(\mathbf{W}(\mathcal{R}), I)$.

$F\alpha = \{\pi^p\} + p = \{\pi^{p-1}\}\alpha + p(1 - \{\pi^{p-1}\})$, e quindi

$$F(\frac{\alpha^n}{n!}) = \frac{(F\alpha)^n}{n!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{p^{n-j}}{(n-j)!}\{\pi^{j(p-1)}\}(1 - \{\pi^{p-1}\})^{n-j}\,\frac{\alpha^j}{j!} \ \in A.$$

Passiamo ora a descrivere la costruzione dell'anello B^+ (cf. [FO2] e [FO3], 4.1.4). Per ogni numero razionale $c \geq 1$, si consideri l'ideale (principale) $J_c = \{\, x \in \mathcal{R} \,|\, v(x) \geq c \,\}$. Indicato con y_c un generatore dell'ideale J_c si consideri l'anello $S_{J_c} := \mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{\{y_c\}}{p}] \subseteq \mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}]$ e si indichi con $\hat{S}_{J_c}$ il completamento di tale anello rispetto alla topologia p–adica. Si ponga poi $B^+_{J_c} := \hat{S}_{J_c}[\frac{1}{p}]$. È facile verificare che, se $1 \leq c \leq c'$, allora $B^+_{J_{c'}} \subseteq B^+_{J_c}$. Si pone infine

$$B^+ = \bigcap_{c \geq 1} B^+_{J_c}. \tag{5.2}$$

Vogliamo quindi mostrare i fatti seguenti

5.3 Proposizione. *Notazioni come sopra. Allora*

(a) $B^+_{cris} \subset \mathbf{Biv}\mathcal{R}$.

(b) $B^+ = \bigcap_{n\geq 1} F^n(B^+_{cris})$.

(c) $biv(\mathcal{R}) \subseteq B^+$.

Tutte le inclusioni descritte sopra commutano con il Frobenius e l'azione del gruppo di Galois $\mathcal{G}$.

dim. (a). Poichè l'ideale $I = \ker \Theta_0$ di $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ è principale, generato da un vettore α (cf. *Proposizione 3.10*), tutti gli elementi di A_{cris} possono essere scritti nella forma

$$\sum_{n\geq 0} a_n \frac{\alpha^n}{n!}, \tag{5.4}$$

ove gli elementi $a_n \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ tendono a zero nella topologia p–adica.

La serie (5.4) converge nella topologia di $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$ perchè, per ogni vettore che generi I si ha $w(\alpha) = 1$ e quindi

$$w(a_n \frac{\alpha^n}{n!}) \geq w(a_n) + n - v_p(n!) \geq w(a_n) + n\tfrac{p-2}{p-1};$$

da cui si conclude perchè gli elementi $a_n \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ tendono a zero nella topologia p–adica e quindi anche nella topologia della valutazione w.

(b). Cominciamo mostrando che $\hat{S}_{J_p} \subset A_{cris} \subset \hat{S}_{J_1}$. Infatti, considerato il generatore $\alpha = \{\pi\} + p$ di I, l'elemento $\pi \in \mathcal{R}$ è un generatore dell'ideale J_1 e quindi π^p è un generatore di J_p. Dunque l'anello S_{J_p} è generato su $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ dalle potenze di

$$\frac{\{\pi^p\}}{p} = \frac{(\alpha - p)^p}{p} = \frac{\alpha^p}{p} + p\lambda,$$

ove $\lambda \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$. Per mostrare che $\hat{S}_{J_p} \subset A_{cris}$ è sufficiente verificare che tutte le potenze di $\frac{\{\pi^p\}}{p}$ sono

combinazioni a coefficienti in $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ di potenze divise $\frac{\alpha^j}{j!}$. Infatti, si ha

$$\left(\frac{\alpha^p}{p} + p\lambda\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^{n-2j} \lambda^{n-j} \alpha^{pj} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^{n-2j} (pj)! \lambda^{n-j} \frac{\alpha^{pj}}{(pj)!}.$$

E, per ogni valore di $j = 0, \dots, n$, il coefficiente $\binom{n}{j}(pj)! p^{n-2j} \lambda^{n-j}$ appartiene a $\mathbf{W}(\mathcal{R})$ perchè $n - 2j + v((pj)!) \geq n - j \geq 0$.

Per mostrare che $A_{cris} \subset \hat{S}_{J_1}$, è sufficiente verificare che tutte le potenze divise $\frac{\alpha^n}{n!}$ appartengono a S_{J_1}. Infatti, si ha

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \frac{(\{\pi\} + p)^n}{n!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{p^{n-j}}{(n-j)!} \frac{\{\pi\}^j}{j!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{p^n}{j!\,(n-j)!} \frac{\{\pi\}^j}{p^j}$$

ed il coefficiente $\frac{p^n}{j!(n-j)!} = \frac{p^n}{n!}\binom{n}{j}$ è in $\mathbf{W}(\mathcal{R})$.

Dalle inclusioni $\hat{S}_{J_p} \subset A_{cris} \subset \hat{S}_{J_1}$, si deduce $B^+_{J_p} \subset B^+_{cris} \subset B^+_{J_1}$.

Sia F il Frobenius di $\mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}]$ e si osservi che, per ogni $c \geq 1$, si ha $FS_{J_c} = S_{J_{pc}}$, da cui si deduce $F\hat{S}_{J_c} = \hat{S}_{J_{pc}}$ e $FB^+_{J_c} = B^+_{J_{pc}}$. Mettendo insieme le inclusioni si ottiene la tesi.

(c). Sia fissato $c \geq 1$. Mostreremo che, se $\zeta = (z_j)_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} p^n \{z_n^{p^{-n}}\} \in biv(\mathcal{R})$, allora esiste un intero n_0 tale che $p^{n_0}\zeta$ appartenga ad $\hat{S}_{J_c}$. Poichè $\zeta = a + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\{z_{-n}^{p^n}\}}{p^n}$ con $a = \zeta^{(\geq 0)} \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$, è sufficiente dimostrare la tesi per la somma $\zeta^{(<0)}$. Poichè ζ è un bivettore esiste un numero reale positivo b tale che $v(z_{-m}) \geq b$ per $m \gg 0$ (cf. *Esempio 2.11.(b)*), e quindi esiste un intero n_0 tale che $\frac{\{z_{-n}^{p^n}\}}{p^{n-n_0}} \in S_{J_c}$ per ogni intero positivo n. Inoltre, $v(z_{-n}^{p^n}) - (n - n_0)c \geq p^n b - (n - n_0)c$ diverge con n e quindi, la serie $p^{n_0} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\{z_{-n}^{p^n}\}}{p^n}$ converge per la topologia p–adica di $\hat{S}_{J_c}$. Ciò conclude la dimostrazione dell'inclusione di $biv(\mathcal{R})$ in $B^+_{J_c}$ e, per l'arbitrarietà di c, si ottiene la tesi. **CVD** ■

Ricordiamo inoltre che gli anelli B^+ e B^+_{cris} sono dotati di filtrazioni decrescenti, che possono essere definite nel modo seguente

$$(5.5) \qquad Fil^n B^+ := (\ker\Theta)^n \cap B^+ \qquad \text{e} \qquad Fil^n B^+_{cris} := (\ker\Theta)^n \cap B^+_{cris},$$

ove $n \geq 0$ e $\ker\Theta \subset \mathbf{Biv}\mathcal{R}$. Infine, per concludere questi primi risultati di confronto, ricordiamo la definizione degli anelli B e B_{cris} di Fontaine. Indicato con ϵ l'elemento di $\mathcal{R}$ descritto nell'*Osservazione 4.9.(a)*, ricordiamo che il bivettore $\tau = \log\{\epsilon\}$ appartiene a $biv(\mathcal{R}) \subseteq B^+ \subseteq B^+_{cris}$. Si pone quindi, per definizione

$$B = B^+[\tfrac{1}{\tau}] \qquad \text{e} \qquad B_{cris} = B^+_{cris}[\tfrac{1}{\tau}]. \tag{5.6}$$

Passiamo ora a confrontare l'anello B^+_{dR} con l'anello $\mathbb{B} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{Biv}\mathcal{R}/(\ker\Theta)^n$ introdotto nella §.4. Richiamiamo qui le definizioni degli anelli B^+_{dR} e B^+_{HT} (cf. [FO2], § 2.8 e [FO3], § 1.5). Si pone

$$B^+_{dR} := \varprojlim_{n\geq 1} \frac{\mathbf{W}(\mathcal{R})}{(\ker\Theta_0)^n}\left[\frac{1}{p}\right], \tag{5.7}$$

ove sul limite viene posta la topologia limite proiettivo delle topologie p–adiche sui quozienti (topologia canonica di Fontaine).

L'anello B^+_{dR} è dotato di un omomorfismo suriettivo $\Theta : B^+_{dR} \to C$ che si può ottenere come limite inverso degli omomorfismi (suriettivi) $\frac{\mathbf{W}(\mathcal{R})}{(\ker\Theta_0)^n}[\frac{1}{p}] \to C$ (cf. *Proposizione 3.10*). Inoltre, si definisce una filtrazione decrescente ponendo

$$Fil^n B^+_{dR} := (\ker\Theta)^n \quad \text{per } n \geq 1 \qquad \text{e} \qquad Fil^0 B^+_{dR} := B^+_{dR}; \tag{5.8}$$

e si ha $Fil^n B^+_{dR}/Fil^{n+1} B^+_{dR} \cong C$, per ogni n.

Si definisce quindi l'anello B^+_{HT} come l'anello graduato associato alla filtrazione di B^+_{dR}, ovvero

$$B^+_{HT} = \bigoplus_{n\geq 0} Fil^n B^+_{dR}/Fil^{n+1} B^+_{dR}. \tag{5.9}$$

Ricordiamo infine che gli anelli B_{dR} e B_{HT} sono i corpi delle frazioni di B^+_{dR} e B^+_{HT}, rispettivamente.

Possiamo quindi dimostrare il seguente fatto.

5.10 Proposizione. *Notazioni come sopra.*

(a) *Vi è un isomorfismo bicontinuo tra* $\mathbb{B} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{Biv}\mathcal{R}/(\ker\Theta)^n$ *e* B^+_{dR}.

(b) L'anello graduato associato alla filtrazione

$$\cdots \subseteq (\ker\Theta)^{n+1} \subseteq (\ker\Theta)^n \subseteq \cdots \subseteq \ker\Theta \subseteq \mathbf{Biv}\mathcal{R}$$

è isomorfo all'anello B^+_{HT}.

dim. (a). Dalla definizione data, discende che l'anello B^+_{dR} è il completamento dell'anello $\mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}]$ rispetto al nucleo di Θ ristretta a $\mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}]$. Dunque, vi è un omomorfismo naturale da B^+_{dR} in $\mathbb{B}$, indotto dall'inclusione di $\mathbf{W}(\mathcal{R})[\frac{1}{p}]$ in $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$ e tale omomorfismo è continuo, perchè la topologia p–adica e la topologia determinata dalla valutazione w inducono sui quozienti $\mathbf{W}(\mathcal{R})(\ker\Theta_0)^n$ la stessa topologia. Vogliamo mostrare che si tratta in realtà di un isomorfismo e quindi bicontinuo. È sufficiente mostrare che, fissati comunque un Bivettore $\xi \in \mathbf{Biv}\mathcal{R}$ ed un intero $n \geq 0$, esiste un bivettore speciale ζ tale che $\xi - \zeta \in (\ker\Theta)^n$. Cominciamo osservando che esiste un bivettore speciale η tale che $\xi - \eta \in W_n$ e quindi $v(\Theta(\xi - \eta)) \geq w(\xi - \eta) \geq n$. Di conseguenza, esiste un vettore $\lambda_0 \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ tale che $\Theta(\xi - \eta) = p^n\Theta(\lambda_0) = \Theta(p^n\lambda_0)$. Se ne deduce che $\xi - \eta - p^n\lambda_0 \in \ker\Theta \cap W_n$ ove $\eta + p^n\lambda_0$ è un bivettore speciale. Possiamo quindi scrivere $\xi - \eta - p^n\lambda_0 = \alpha\xi_1$, per qualche $\xi_1 \in W_{n-1}$ e, applicando un'altra volta gli argomenti precedenti, si deduce l'esistenza di un vettore $\lambda_1 \in \mathbf{W}(\mathcal{R})$ tale che $\Theta(\xi_1) = p^{n-1}\Theta(\lambda_1) = \Theta(p^{n-1}\lambda_1)$. Se ne deduce che $\xi - \eta - p^n\lambda_0 - p^{n-1}\alpha\lambda_1 \in (\ker\Theta)^2 \cap W_n$ ove $\eta + p^n\lambda_0 + p^{n-1}\alpha\lambda_1$ è un bivettore speciale. Ripetendo le stesse considerazioni si arriva a concludere che

$$\xi - (\eta + p^n\lambda_0 + p^{n-1}\alpha\lambda_1 + \cdots + \alpha^n\lambda_n) \in (\ker\Theta)^n \cap W_n,$$

ove $\eta + p^n\lambda_0 + p^{n-1}\alpha\lambda_1 + \cdots + \alpha^n\lambda_n$ è un bivettore speciale; e questa è l'approssimazione richiesta del Bivettore ξ.

La dimostrazione di (b) è una facile conseguenza di (a). **CVD** ∎

Dal *Teorema 4.2.(c)* discende che l'omomorfismo naturale $\mathbf{Biv}\mathcal{R} \to \mathbb{B}$ è iniettivo e quindi i due risultati dimostrati in questa sezione si possono riassumere tramite la sequenza di inclusioni

$$biv(\mathcal{R}) \subset B^+ \subset B^+_{cris} \subset \mathbf{Biv}\mathcal{R} \subset \mathbb{B} \cong B^+_{dR}. \tag{5.11}$$

Passiamo ora a scrivere in modo esplicito le relazioni esistenti tra i bivettori e l'anello B^+_{st}, e cominciamo, come al solito, ricordando la definizione dell'anello B^+_{st} quale è data in [FO3].

Nel *Teorema 4.7* è stata introdotta un'applicazione logaritmo, che permette di definire un'omomorfismo $\log : V_{(p)}(A_C^\times) \to biv(\mathcal{R})$ (cf. *Definizione 4.18.(i)*). Componendo con le inclusioni $biv(\mathcal{R}) \subset B^+ \subset B^+_{cris}$, si ottiene un omomorfismo

$$\lambda : V_{(p)}(A_C^\times) \to B^+_{cris}.$$

Si può quindi considerare la categoria delle coppie (S, λ_S), ove S è una B^+_{cris}–algebra e $\lambda_S : V_{(p)}(C^\times) \to S$ è un omomorfismo che estende λ. I morfismi di questa categoria sono omomorfismi di B^+_{cris}–algebre che rispettano una naturale compatibilità. Si definisce quindi B^+_{st} come l'oggetto iniziale di questa categoria.

Come abbiamo osservato nella sezione precedente, il quoziente $V_{(p)}(C^\times)/V_{(p)}(A^\times_C)$ è un $\mathbb{Q}$–spazio vettoriale di dimensione 1 (cf. diagramma (4.17)), ed un omomorfismo $\lambda_S : V_{(p)}(C^\times) \to S$, che estenda $\lambda : V_{(p)}(A^\times_C) \to B^+_{cris}$ è completamente determinato dal valore assunto su un qualsiasi elemento b, che generi il quoziente $V_{(p)}(C^\times)/V_{(p)}(A^\times_C)$ (cf. *Definizione 4.18*). È quindi evidente concludere che la categoria descritta sopra ha un oggetto iniziale e che tale oggetto è isomorfo alla coppia (B^+_{st}, λ'), ove

$$B^+_{st} \cong B^+_{cris}[X], \qquad \text{e} \qquad \lambda'(b) = X, \tag{5.12}$$

ed X è un'indeterminata su B^+_{cris}.

L'algebra B^+_{st} è dotata di una naturale estensione del Frobenius di B^+_{cris} (cf. il paragrafo successivo a (1.1)), definito da $F(X) := pX$. Vi è inoltre una naturale estensione a B^+_{st} dell'azione del gruppo di Galois $\mathcal{G}$ su B^+_{cris}, rispetto a cui la mappa λ' commuta. Infine, vi è una unica derivazione B^+_{cris}–lineare

$$N : B^+_{st} \to B^+_{st}, \text{ con la proprietà } N(\lambda'(b)) = v_{\mathcal{R}}(b) \quad \text{per ogni } b \in V_{(p)}(C^\times). \tag{5.13}$$

La derivazione N è detta *l'operatore di monodromia* associato a $v^{(*)}$. Tale derivazione è legata al Frobenius dalla relazione $NF = pFN$.

Infine, si pone $B_{st} := B_{cris} \otimes_{B^+_{cris}} B^+_{st}$.

Nella sezione 4, abbiamo mostrato che il logaritmo definito nel *Teorema 4.7*, da cui si ottiene l'omomorfismo $\lambda : V_{(p)}(A^\times_C) \to B^+_{cris}$, ammette l'estensione $\log : V_{(p)}(C^\times) \to \mathbb{B}$, ponendo $\log\{\sigma\} = u + \log p$, ove $\sigma \in \mathcal{R}$, $\hat{\sigma}_0 = p$, $u = -\sum_{n\geq 1} \frac{(1-\{\sigma\}/p)^n}{n} \in \mathbb{B}$ e $\log p$ indica il valore del logaritmo p–adico (cf. *Definizione 4.18*).

In particolare, nel *Teorema 4.21* abbiamo mostrato che l'elemento $u \in \mathbb{B}$ non è algebrico su $Fr(\mathbf{Biv}\mathcal{R})$ e quindi possiamo enunciare la seguente

5.14 Proposizione. *Notazioni come sopra. L'immersione di B^+_{cris} in $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$ (cf. Proposizione 5.3.(a)) si estende ad un'immersione di B^+_{st} in $\mathbb{B}$, la cui immagine è contenuta nell'anello di polinomi $\mathbf{Biv}\mathcal{R}[u]$.*

Tale immersione rispetta l'azione del gruppo $\mathcal{G}$ e commuta con i Frobenius. Infine, la derivazione $\mathbf{Biv}\mathcal{R}$–lineare $N : \mathbf{Biv}\mathcal{R}[u] \to \mathbf{Biv}\mathcal{R}[u]$, soddisfacente alla condizione $N(u) = 1$, estende l'operatore di monodromia di B^+_{st}.

Infine, possiamo sintetizzare le relazioni tra il logaritmo di bivettori e l'anello B^+_{st}

(*) La dipendenza da v è determinata dal fatto che, per costruzione, la valutazione su $\mathcal{R}$ dipende dalla normalizzazione operata sulla valutazione di C.

nel seguente diagramma

$$
\begin{tikzcd}
biv(\mathcal{R}) \arrow[r] & B^+_{cris} \arrow[r] & B^+_{st} \arrow[r] & \mathbf{Biv}\mathcal{R}[u] \arrow[r] & B^+_{dR} \\
V_{(p)}(A_C^\times) \arrow[u, "\log"'] \arrow[r, equal] & V_{(p)}(A_C^\times) \arrow[u, "\lambda"'] \arrow[r] & V_{(p)}(C^\times) \arrow[u, "\lambda'"'] \arrow[r, equal] & V_{(p)}(C^\times) \arrow[u, "\log"'] &
\end{tikzcd}
\tag{5.15}
$$

ove le freccie orizzontali sono tutte inclusioni.

Bibliografia.

[MA] I. Barsotti. *Metodi Analitici per Varietà Abeliane in caratteristica positiva. Capitoli 1 e 2.* Ann.SNS Pisa 18 (1964), 1–25

[WR] M. Candilera, V. Cristante. *Witt Realization of p-adic Barsotti–Tate Groups.* Proceedings of Barsotti Memorial Symposium - Academic Press 1994

[PD] M. Candilera, V. Cristante. *Periods and Duality of p-adic Barsotti–Tate Groups* to appear on Ann. SNS Pisa

[BIV] I. Barsotti. *Bivettori.* Symposia Mathematica, 24 (1981), 23–63

[FO1] J-M. Fontaine. *Groupes p-divisibles sur les corps locaux.* Astérisque 47–48 (1977)

[FO2] J-M. Fontaine. *Sur certaines types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate.* Annals of Math. 115 (1982), 529–577

[FO3] J-M. Fontaine. *Le corps de périodes p-adiques. (avec une appendice par P.Colmez)* (Seminario di Bures/Yvette-1988), Astérisque 223 (1994), 59-111.

[W] E. Witt. *Zyklische körper und Algebren der Charakteristic p vom Grad p^n.* J. Reine Ang. Math. Crelle (1936), 126–140

Maurizio Candilera
Dipartimento di Matematica Pura e Applicata
Via Belzoni, 7
35131 Padova - Italy

e-mail: candilera@ pdmat1.math.unipd.it