Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
ore 9:30 — 18 settembre 2019
Durata: 3 ore

Attenzione: Riconsegnerete DUE fogli (protocollo bianco, a 4 facciate), scriverete chiaramente cognome e nome, data e NUMERO (1 e 2) ben in vista, su ciascuno. Non riconsegnate questo foglio nè brutte copie. Potrete uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

1.1 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \left(\cos^2 x - \frac{3}{2}\right)\cos x.$$

(i) Si traccino il grafico dell'energia potenziale e il ritratto in fase per il sistema dinamico associato. A motivo della periodicità dell'energia potenziale, si utilizzi la regione per x compresa tra 0 e 2π.
(ii) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico discutendone la stabilità.
(iii) Si determini l'insieme di valori dell'energia totale del sistema per cui si hanno traiettorie periodiche non degeneri.
(iv) Si scriva, senza svolgere l'integrale definito ma specificando i valori di tutti i parametri, la formula del periodo di una delle orbite di energia totale pari a zero. Nella scelta degli estremi di integrazione si tenga presente la periodicità dell'energia potenziale.

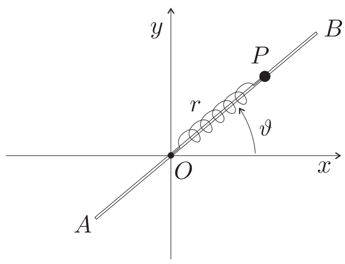
1.2 Scrivere le definizioni di equilibrio stabile e di equilibrio asintoticamente stabile. Enunciare il primo metodo di Lyapunov, o metodo spettrale, per la stabilità degli equilibri di $\dot{x} = X(x)$.

1.3 Derivare le formule di Galileo e di Coriolis che mettono in relazione, rispettivamente, la velocità e l'accelerazione viste in un sistema di riferimento $T^a = (O^*, e_i^*)$ solidale con uno spazio inerziale con quelle viste in un sistema di riferimento $T^r = (O, e_i)$ in moto relativo rispetto al primo con velocità angolare di trascinamento ω^τ.

2 **2.1**

Un'asta rigida AB di massa m e lunghezza $3l$ è libera di ruotare in un piano verticale xy, con asse y verticale ascendente, attorno a un asse fisso passante per il punto O a distanza l da un suo estremo. Un punto materiale P di ugual massa m, libero di scorrere sulla retta dell'asta, è legato a O da una forza elastica di costante elastica k. Facendo riferimento alle coordinate lagrangiane $r =$ ascissa di P su AB e $\vartheta =$ angolo tra l'asse x e AB,

1. si determinino le configurazioni di equilibrio e la relativa stabilità;
2. per $k = mg/l$ si calcolino le pulsazioni dei modi normali di oscillazione attorno alle configurazioni di equilibrio stabile.



2.2

Enunciare e descrivere in dettaglio i moti alla Poinsot del corpo rigido libero e scarico.

Soluzione all'esercizio 1

1.1 L'energia potenziale $V(x)$ è periodica di periodo 2π. Calcolando la forza

$$f(x) = -\frac{dV}{dx} = 3\big(\cos^2 x - 1/2\big)\sin x$$

e risolvendo $f(x) = 0$ si identificano, nell'intervallo semiaperto $]0, 2\pi]$, i punti di equilibrio $x_1 = \frac{1}{4}\pi$, $x_2 = \frac{3}{4}\pi$, $x_3 = \pi$, $x_4 = \frac{5}{4}\pi$, $x_5 = \frac{7}{4}\pi$ e $x_6 = 2\pi$.

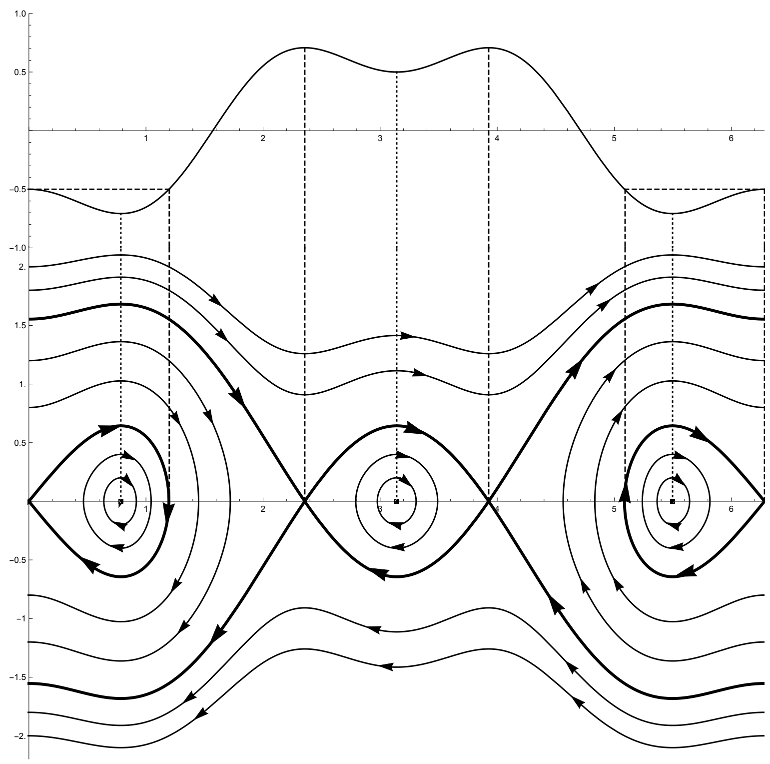
Valutando il segno di $V''(x)$ nei punti di equilibrio, i punti x_1, x_3 e x_5 risultano essere minimi locali per $V(x)$, quindi equilibri stabili, mentre x_2, x_4 e x_6 sono massimi locali e quindi punti di equilibrio instabili.

I valori dell'energia totale E associati ad orbite periodiche non degeneri sono dati da

$$E \in]-1/\sqrt{2}, -1/2[\cup]-1/2, 1/\sqrt{2}[.$$

Si noti che, per $E = 1/2$ si ha un'orbita non degenere per $-\frac{3}{4}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$, mentre un punto stazionario per $x = \pi$.

Il periodo dell'orbita di energia totale pari a zero è dato da $T = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{-2V(x)}}$.



2.1

Per determinare le configurazioni di equilibrio è sufficiente scrivere l'energia potenziale, che comprende due termini gravitazionali (per l'asta e per P) e un termine elastico. Si trova subito, ricordando che il baricentro dell'asta si trova a distanza $\frac{1}{2}l$ da O,

$$V(r,\vartheta) = mg(\tfrac{1}{2}l + r)\sin\vartheta + \tfrac{1}{2}kr^2 \ .$$

Le configurazioni di equilibrio si trovano imponendo $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$ e $\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0$, ovvero

$$mg\sin\vartheta + kr = 0 \ , \qquad mg(\tfrac{l}{2} + r)\cos\vartheta = 0 \ .$$

La seconda equazione è risolta da

$$\cos\vartheta = 0 \ , \qquad \vartheta = \pm\frac{\pi}{2} \ ,$$

oppure da

$$r = -\frac{l}{2} \ .$$

Nel primo caso, sostituendo ϑ nella prima equazione, si trova subito r, e si hanno le due soluzioni

$$(r,\vartheta) \ = \ \Big(-\frac{mg}{k}, \frac{\pi}{2}\Big) \, , \ \Big(\frac{mg}{k}, -\frac{\pi}{2}\Big) \ .$$

Nel secondo caso, sostituendo r nella prima equazione, si trova

$$\sin\vartheta = \frac{kl}{2mg} \ ,$$

e purché sia soddisfatta la condizione di esistenza $\frac{kl}{2mg} \le 1$ si trovano le altre due soluzioni

$$(r,\vartheta) \ = \ (-\tfrac{1}{2}l, \vartheta^*) \, , \ (-\tfrac{1}{2}l, \pi - \vartheta^*) \, , \qquad \vartheta^* = \arcsin\frac{kl}{2mg} \ .$$

Per l'analisi della stabilità si calcola innanzitutto la matrice hessiana V'' di V, che risulta essere

$$V''(r,\vartheta) = \begin{pmatrix} k & mg\cos\vartheta \\ mg\cos\vartheta & -mg(\frac{l}{2}+r)\sin\vartheta \end{pmatrix} \ .$$

Segue allora:

$$V''(\frac{mg}{k},-\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mg(\frac{l}{2}+\frac{mg}{k}) \end{pmatrix} \ ;$$

la matrice è chiaramente definita positiva, dunque V in questo punto ha un minimo, e l'equilibrio è stabile, per ogni valore dei parametri. Si ha poi

$$V''(-\frac{mg}{k},\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -mg(\frac{l}{2}-\frac{mg}{k}) \end{pmatrix} \ ,$$

da cui si vede che V in questo punto ha un minimo per $\frac{kl}{2mg} < 1$ mentre ha una sella (la matrice è indefinita) per $\frac{kl}{2mg} > 1$; nel primo caso l'equilibrio è stabile, nel secondo è instabile. Vale la pena di osservare che nel primo caso il baricentro di tutto il sistema sta sotto il punto di sospensione O, nel secondo sta sopra.

Infine si ha

$$V''(-\frac{l}{2},\vartheta^*) = \begin{pmatrix} k & mg\cos\vartheta^* \\ mg\cos\vartheta^* & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

dunque V in questo punto ha una sella e l'equilibrio è instabile. Lo stesso risultato vale evidentemente per $(-\frac{l}{2},\pi-\vartheta^*)$.

Per calcolare la pulsazione delle piccole oscillazioni occorre la matrice cinetica. Si trova subito

$$K = \frac{1}{2}(m\dot{r}^2 + (I+mr^2)\dot{\vartheta}^2) \ , \qquad a = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I+mr^2 \end{pmatrix} \ ,$$

avendo denotato con I il momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse di rotazione; per il teorema di Steiner si ha

$$I = \frac{1}{12}m(3l)^2 + m\Big(\frac{l}{2}\Big)^2 = ml^2 \ .$$

Poiché sia a che V'' nelle configurazioni di equilibrio interessanti sono diagonali, il calcolo delle pulsazioni è banale, e i due modi normali consistono in oscillazioni della sola r o della sola ϑ attorno al valore di equilibrio. Le pulsazioni, per $k = mg/l$, si trovano essere

$$\begin{aligned} \omega_r^2 &= \frac{k}{m} \ , \quad \omega_\vartheta^2 = \frac{3g}{4l} \qquad \text{nel punto} \qquad (\frac{mg}{k},-\frac{\pi}{2}) \\ \omega_r^2 &= \frac{k}{m} \ , \quad \omega_\vartheta^2 = \frac{g}{2l} \qquad \text{nel punto} \qquad (-\frac{mg}{k},\frac{\pi}{2}) \ . \end{aligned}$$