UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
ORE 9:30 — 19 FEBBRAIO 2016
DURATA: 3 ORE

Attenzione: Riconsegnerete DUE fogli (protocollo bianco, a 4 facciate), scriverete chiaramente cognome e nome, data e NUMERO (1 e 2) ben in vista, su ciascuno. Non riconsegnate questo foglio nè brutte copie. Potrete uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

1.1 Si consideri il sistema differenziale non lineare del *primo ordine*:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + y^3 \\ \dot{y} &= -x^3 - y^3 \end{aligned}$$

Usando una delle seguenti funzioni

$$f(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{4}(x^4+y^4), \quad g(x,y) = \frac{1}{4}(x^4+y^4), \quad h(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2-\dot{y}^2)^2 + \frac{1}{4}(x^4-y^4)^2$$

dimostrare che $(0,0)$ è stabile.

1.2 (i) Enunciare in dettaglio il primo metodo spettrale di Lyapunov per $\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^m$, relativamente ad un equilibrio $x^* : \ X(x^*) = 0$.

(ii) Si consideri l'equazione differenziale non lineare del *secondo ordine*:

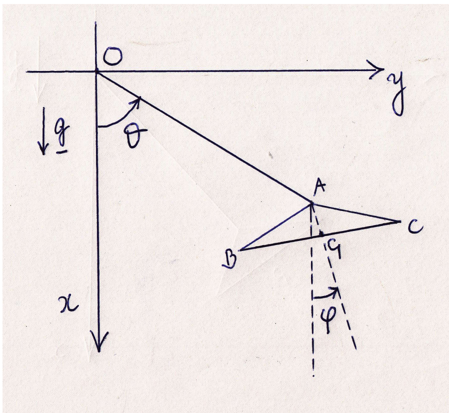
$$\ddot{x} = -\sin x - x^4\dot{x}, \qquad x \in \mathbb{R}^1$$

Discutere la stabilità di $x = 0$, con il *primo* e con il *secondo* metodo di Lyapunov. Per quest'ultimo caso (detto anche metodo della funzione di L.) , osservare che è un pendolo perturbato.

2

2.1 Sia dato il riferimento cartesiano $Oxyz$ associato ad uno spazio inerziale, x verticale discendente: $\underline{g} = g\,\hat{x}, \quad g > 0$.

La sbarretta BC, omogenea di massa m, lunghezza 2ℓ e di baricentro G, è vincolata nel piano Oxy. Il punto A, collegato rigidamente a BC mediante due sbarrette BA e CA di ugual lunghezza b e di massa trascurabile, è l'estremo di un'ulteriore sbarretta OA, $|OA| = a$, anch'essa di massa trascurabile. L'estremo O di OA è vincolato a cerniera nell'origine del sistema cartesiano $Oxyz$, lo stesso vincolo a cerniera sussiste pure in A tra la sbarretta OA e il sistema articolato rigido ABC. Tutti i vincoli sono supposti lisci. Si introducano gli angoli $\theta = (Ox, OA)$, $\varphi = (Ox, AG)$. Ricapitolando: $|OA| = a$, $|AG| = d$, $|AB| = |AC| = b$, $|BC| = 2\ell$.



Nell'ipotesi (risulterà semplificatrice)

$$\ell = a\sqrt{3}, \qquad b = 2a,$$

determinare le pulsazioni di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile.

2.2 Principio variazionale di Hamilton, enunciato e dimostrazione.

Soluzioni

1.1 La sola funzione sensatamente usabile è g, ed è di Lyap. per l'asintotica stabilità:

$$L_X g = \frac{\partial g}{\partial x}(-x^3 + y^3) + \frac{\partial g}{\partial y}(-x^3 - y^3) = -x^6 - y^6$$

1.2 (ii) Con il primo metodo, si trova che la matrice 2×2 del problema linearizzato

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& v \\ \dot{v} &=& -x \end{array}$$

ha autovalori $\lambda_{1,2} = \pm i$: non si può dire nulla.

Pensando al secondo metodo, si prova ad usare la funzione energia totale $W(x,v) = v^2/2 + 1 - \cos x$ della parte conservativa (come è noto, questa funziona per esempio per il pendolo con viscosità: $\ddot{x} = -\sin x - k\dot{x}$):

$$L_X W = \frac{\partial W}{\partial x} v + \frac{\partial W}{\partial v}(-\sin x - x^4 v) = -x^4 v^2 \le 0$$

Benché W sia definita positiva attorno a $(x,v) = (0,0)$, $L_X W$ è solo semi-definita negativa, dunque possiamo solo affermare, con questo metodo, la semplice stabilità.

2.1

$$V = -mgx_G,$$

$$OG: \begin{array}{rcl} x &=& a\cos\theta + d\cos\phi \\ y &=& a\sin\theta + d\sin\phi \end{array}$$

$$v_G: \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& -a\sin\theta\dot{\theta} - d\sin\phi\dot{\phi} \\ \dot{y} &=& a\cos\theta\dot{\theta} + d\cos\phi\dot{\phi} \end{array}$$

$$V(\theta,\phi) = -mg(a\cos\theta + d\cos\phi)$$

$$T = \frac{1}{2}|v_G|^2 + \frac{1}{2}(\frac{m(2\ell)^2}{12})\dot{\phi}^2 = ... = \frac{1}{2}m[a^2\dot{\theta}^2 + 2ad\cos(\theta-\phi)\dot{\theta}\dot{\phi} + (d^2 + \frac{\ell^2}{3})\dot{\phi}^2]$$

$$\begin{array}{rcccl} 0 &=& \frac{\partial V}{\partial \theta} &=& mga\sin\theta \\ 0 &=& \frac{\partial V}{\partial \phi} &=& mgd\sin\phi \end{array}$$

$$\ell = a\sqrt{3}, \qquad b = 2a: \qquad d^2 = b^2 - \ell^2 = 4a^2 - 3a^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad d = a$$

Consideriamo l'equilibrio $(0,0)$,

$$\nabla^2 V(0,0) = \begin{pmatrix} mga & 0 \\ 0 & mga \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ è stabile (THND). T con le semplificazioni $a = d$,

$$T = \frac{1}{2}m[a^2\dot{\theta}^2 + 2a^2\cos(\theta-\phi)\dot{\theta}\dot{\phi} + 2a^2\dot{\phi}^2]$$

$$T^0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} ma^2 & ma^2 \\ ma^2 & 2ma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}, \qquad A := \begin{pmatrix} ma^2 & ma^2 \\ ma^2 & 2ma^2 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det\left(\nabla^2 V(0,0) - \omega^2 A\right)$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{a}\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \qquad \omega_2^2 = \frac{g}{a}\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$