Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
ore 14:30 — 27 Aprile 2017
Durata: 3 ore

Attenzione: Riconsegnerete DUE fogli (protocollo bianco, a 4 facciate), scriverete chiaramente cognome e nome, data e NUMERO (1 e 2) ben in vista, su ciascuno. Non riconsegnate questo foglio nè brutte copie. Potrete uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

1.1 Si consideri l'equazione differenziale

$$\dot{x} = kxe^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1}$$

dove k è una costante reale.

a) Tracciare il ritratto in fase di (1) al variare di $k \in \mathbb{R}$.

b) Stabilire gli equilibri di (1) e la loro natura al variare di $k \in \mathbb{R}$.

c) Linearizzare il sistema (1) attorno all'origine.

1.2 Si consideri l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -V'(x) \tag{2}$$

dove $V(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

a) Tracciare il ritratto in fase di (2).

b) Stabilire gli equilibri di (2) e la loro natura.

c) Stabilire per quali valori di $v \in \mathbb{R}$ la soluzione con dato iniziale $(-\frac{1}{2}, v)$ è periodica.

d) Utilizzando un'opportuna funzione di Lyapunov, discutere la stabilità dell'equilibrio $(-1, 0)$ se è presente anche la forza d'attrito

$$F_\mu(x, v) = -2\mu(x+1)^2 v$$

con $\mu > 0$.

1.3 Enunciato e dimostrazione del Teorema di Lagrange-Dirichlet.

2

2.1 Nel piano Oxy con y verticale ascendente di un riferimento $Oxyz$ si consideri la guida liscia coincidente con il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Un'asta AP di massa trascurabile e lunghezza l è vincolata a muoversi nel piano Oxy con l'estremo A libero di scorrere sulla guida. Nell'estremo P dell'asta è vincolato un punto materiale P di massa m. Si considerino come coordinate lagrangiane del sistema l'ascissa $x = x_A$ del punto A e l'angolo θ tra la direzione negativa dell'asse delle y e l'asta AP, valutato positivamente in senso antiorario. Infine, il riferimento $Oxyz$ ruoti con velocità angolare ω costante diretta lungo l'asse verticale y rispetto agli spazi inerziali. Si consideri la descrizione del moto del sistema nel riferimento rotante.

a) Si scrivano le componenti lagrangiane delle forze agenti nel riferimento rotante $Oxyz$.

b) Si determinino le configurazioni di equilibrio (relativo) con $x = 0$.

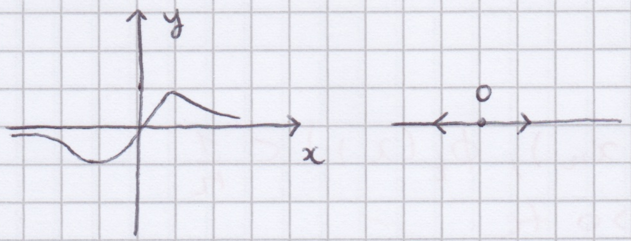
c) Si supponga ora che $f'(0) = 0$ e che $g > \omega^2 l$. Si studi la stabilità delle configurazioni di equilibrio con $x = 0$ sulla base dei teoremi visti nel corso.

d) Come si modifica l'energia potenziale e cinetica del sistema se invece dell'asta AP si considera un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2l$? (È sufficente rispondere sinteticamente ma in modo preciso).

2.2 Enunciato e dimostrazione del Teorema di Poinsot.

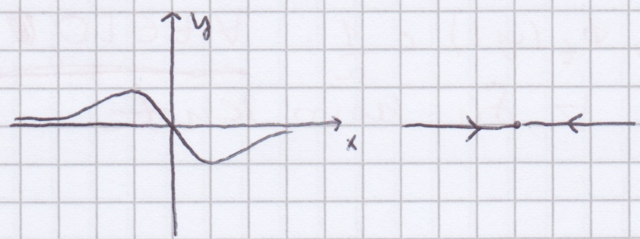
1.1

$K>0$



unico equilibrio è l'origine, repulsivo (instabile)

$K<0$

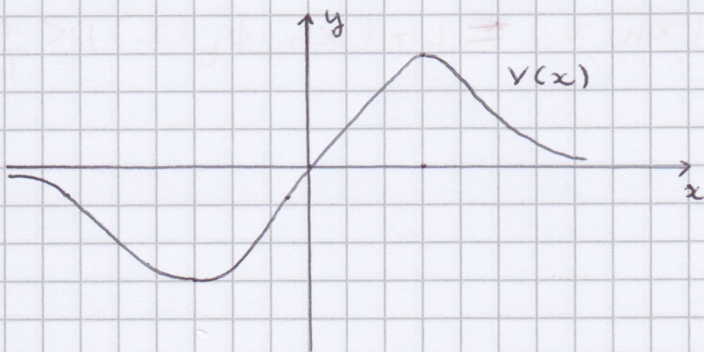


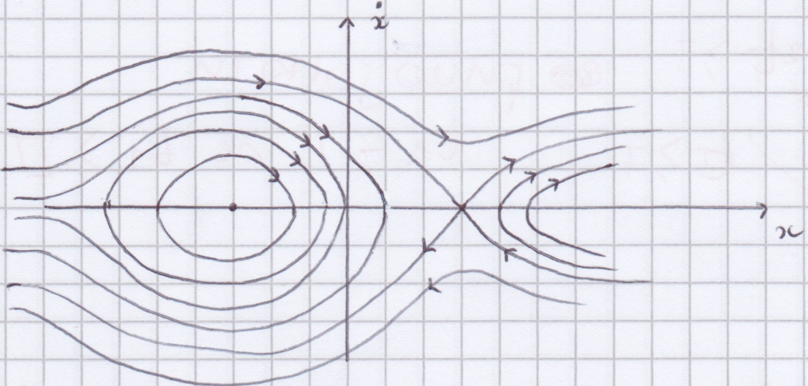
unico equilibrio è l'origine, attrattivo (asintoticamente stabile).

$K=0$ Retta di punti fissi (ogni punto della retta è di equilibrio stabile).

La linearizzazione di $\dot{x} = Kxe^{-x^2/2}$ è $\dot{x} = Kx$.

1.2





Dal diagramma in fase si conclude che $(-1,0)$ è equilibrio stabile, $(1,0)$ è equilibrio instabile.

I valori di $v \in \mathbb{R}$ per i quali la soluzione con dato iniziale $(-1/2, v)$ è periodica si ottengono risolvendo la disequazione

$$\underbrace{\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}}_{=E(-1/2,\,v)} < 0 \iff v^2 < e^{-1/4} \iff -e^{-1/8} < v < e^{-1/8}$$

Nel sistema con la forza d'attrito $F_\mu(x,v) = -2\mu(x+1)^2 v$, si studia la stabilità dell'equilibrio $(-1,0)$ tramite la funzione di Lyapunov "energia"

$W(x,v) = \frac{1}{2}v^2 + V(x) - V(-1)$

Infatti, $W(-1,0)=0$ e W è definita positiva localmente in $(-1,0)$.

E inoltre:

$$L_X W(x,v) = X(x,v)\cdot\nabla W(x,v) = v\,(V'(x)) + (-V'(x) - 2\mu\,(x+1)^2 v)\,v$$

$$= v\,\cancel{V'(x)} - \cancel{V'(x)}\,v - 2\mu\,(x+1)^2 v^2 \leq 0$$

$[\,X(x,v) = (v, -V'(x) + F_\mu(x,v))$ E $\nabla W(x,v) = (V'(x), v)\,]$

Soluzioni

2.1 a) Le forze agenti nel riferimento rotante sono il peso, la forza centrifuga e quella di Coriolis. Quest'ultima ha componenti lagrangiane nulle poichè

$$\delta L^{cor} = -2m\omega \wedge v_P \cdot \delta P \equiv 0$$

dal momento che i tre vettori sono complanari. Le altre sono conservative di energia potenziale

$$U = U^g + U^{cf} = mgy_P - \frac{\omega^2}{2} m x_P^2 = mg(f(x) - l\cos\theta) - \frac{\omega^2}{2} m(x + l\sin\theta)^2.$$

e le componenti sono date dal gradiente di $-U$.

b) le configurazioni di equilibrio annullano il gradiente di U

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x,\theta) = mgf'(x) - m\omega^2(x + l\sin\theta) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta}(x,\theta) = mgl\sin\theta - m\omega^2(x + l\sin\theta) l\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Quelle con $x = 0$ devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x,\theta) = mgf'(0) - m\omega^2 l\sin\theta = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta}(x,\theta) = mgl\sin\theta - m\omega^2 l\sin\theta l\cos\theta = 0 \end{cases}$$

e quindi: se $f'(0) = 0$

$$\sin\theta = 0, \qquad \theta = 0, \pi,$$

se $f'(0) \neq 0$ il sistema ha soluzioni se e solo se

$$f'(0) = \tan\theta \qquad \wedge \qquad \sin\theta = \frac{gf'(0)}{\omega^2 l}$$

c) per la stabilità possiamo usare THND e TLD. Calcoliamo la matrice hessiana in $(0,\theta)$

$$H_U(0,\theta) = \begin{pmatrix} U_{xx} & U_{x\theta} \\ U_{x\theta} & U_{\theta\theta} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} gf"(0) - \omega^2 & -\omega^2 l\cos\theta \\ -\omega^2 l\cos\theta & gl\cos\theta - \omega^2 l^2[2\cos^2\theta - 1] \end{pmatrix}$$

Studio in $(0,0)$. Si vede che in base all'ipotesi $g > \omega^2 l$ si ha $U_{\theta\theta} > 0$. La matrice hessiana è ivi definita positiva (quindi l'equilibrio è stabile) sse

$$\det H_U(0,0) > 0, \quad i.e. \quad f"(0) > \frac{\omega^2}{g - \omega^2 l}.$$

Studio in $(0,\pi)$. Qui $U_{\theta\theta} < 0$. Per avere la matrice hessiana definita positiva dobbiamo supporre $U_{xx} > 0$, ovvero $gf"(0) > \omega^2$. L'equilibrio è stabile sse

$$\det H_U(0,\pi) > 0, \quad i.e. \quad (gf''(0) - \omega^2)(gl + \omega^2 l^2) + \omega^4 l^2 < 0$$

che è incompatibile con la condizione richiesta $gf"(0) > \omega^2$. Quindi l'equilibrio è instabile.

d) Il potenziale centrifugo è dato da $U^{cf} = -\frac{\omega^2}{2} I_y^O$ e l'energia cinetica ha in più il termine $\frac{1}{2}\frac{m(2l)^2}{12}\dot{\theta}^2$.