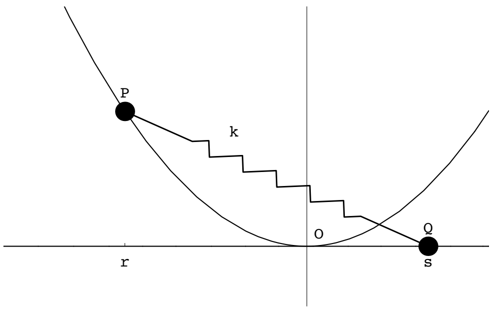
Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
ore 10:00 — 20 Agosto 2018
Durata: 2:30 ore

Attenzione: Scriverete chiaramente su tutti i fogli che riconsegnerete cognome e nome e data. Non riconsegnate questo foglio nè brutte copie. Potrete uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

Esercizio 1. nel piano cartesiano Oxy con asse y verticale ascendente, un punto materiale P di massa m è vincolato alla curva di equazione $y = \frac{x^2}{a}$. Un altro punto materiale Q di massa m è vincolato all'asse delle x. I due punti sono collegati da una molla di costante elastica k. Sul sistema agisce la forza peso.

Scegliendo come coordinate Lagrangiane r ed s, le ascisse dei punti P e Q rispettivamente (vedi figura)



(a) Determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
(b) Assumendo che $k = \frac{mg}{a}$, determinare frequenze e modi normali delle piccole oscillazioni attorno all'unico equilibrio stabile.

Esercizio 2. Sia data l'equazione differenziale

$$\dot{x} = x^3(x-1)(x+3).$$

(a) Trovare gli equilibri.
(b) Linearizzare nell' equilibrio di coordinata positiva e discuterne la stabilità.
(c) Si può usare la funzione x^2 come funzione di Lyapunov per dimostrare la stabilità dell'origine?

Quesito teorico 1. Cosa significa che le equazioni di Lagrange sono invarianti in forma per cambi di coordinate Lagrangiane? Rispondere in dettaglio.

Quesito teorico 2. Mostrare che le rotazioni uniformi del corpo rigido attorno all'asse principale d'inerzia mediano, soggetto alla sola forza di gravità, sono instabili nello spazio delle velocità angolari.

Esercizio 1

(a) Per determinare le configurazioni di equilibrio, dobbiamo calcolare il potenziale del sistema. Le coordinate dei punti rilevanti sono:

$$OP = (r, \frac{r^2}{a}) \qquad OQ = (s, 0)$$

Il potenziale è la funzione $V(r,s) = V_{g_P} + V_{g_Q} + V_{k_{PQ}}$, con

$$V_{g_P} = mgy_P = \frac{mg}{a} r^2$$

$$V_{g_Q} = mgy_Q = 0$$

$$V_{k_{PQ}} = \frac{k}{2}|PQ|^2 = \frac{k}{2}((r-s)^2 + (\frac{r^2}{a} - 0)^2) = \frac{k}{2}(r^2 + s^2 - 2rs + \frac{r^4}{a^2})$$

Ne segue che

$$\boxed{V = \tfrac{mg}{a} r^2 + \tfrac{k}{2}(r^2 + s^2 - 2rs + \tfrac{r^4}{a^2}) = (\tfrac{mg}{a} + \tfrac{k}{2})r^2 - krs + \tfrac{k}{2}s^2 + \tfrac{k}{2a^2} r^4}$$

Dal momento che la Lagrangiana è indipendente dal tempo, determinare gli equilibri è equivalente a determinare i punti stazionari del potenziale. Il gradiente di V è

$$\nabla V(r,s) = \begin{pmatrix} (2\frac{mg}{a}+k)r - ks + 2\frac{k}{a^2} r^3 \\ -kr + ks \end{pmatrix}$$

Uguagliando a zero il secondo termine si ha che, nell'equilibrio, $r = s$. Sostituendo nel primo termine ed uguagliando a zero si ha che $0 = 2\frac{mg}{a} r + 2\frac{k}{a^2} r^3 = 2r(\frac{mg}{a} + \frac{k}{a^2} r^2)$. Che porge come unica soluzione $r = 0$. Abbiamo quindi un unico equilibrio $\boxed{r = 0, \quad s = 0}$.

Calcoliamo la matrice Hessiana del potenziale

$$\mathrm{Hess}V(r,s) = \begin{pmatrix} 2\frac{mg}{a}+k+6\frac{k}{a^2}r^2 & -k \\ -k & +k \end{pmatrix}$$

Calcolata in $(0,0)$ si ha la matrice $\begin{pmatrix} 2\frac{mg}{a}+k & -k \\ -k & +k \end{pmatrix}$, che ha autovalori $(k + \frac{gm}{a}) \pm \sqrt{k^2 + \frac{g^2m^2}{a^2}}$. Entrambe gli autovalori sono positivi, quindi $\boxed{\text{l'equilibrio è stabile}}$.

(b) L'energia cinetica del sistema è $T(r,s,\dot r,\dot s) = \frac{1}{2}m(1+4\frac{r^2}{a^2})\dot r^2 + \frac{1}{2}m\dot s^2$. La matrice cinetica associata è $A(r,s) = \begin{pmatrix} (1+4\frac{r^2}{a^2})m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$. Nell'equilibrio la matrice cinetica è $A(0,0) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$.

Per determinare frequenze e modi normali di piccole oscillazioni si deve ricorrere all'equazione secolare

$$0 = \det(\mathrm{Hess}V(0,0) - \omega^2 A(0,0)) = \det\left(\begin{pmatrix} 2\frac{mg}{a}+k & -k \\ -k & +k \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right)$$

Sostituendo k ad mg/a, l'equazione secolare diventa

$$0 = \det\left(\begin{pmatrix} 3k & -k \\ -k & +k \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right) = m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 2k^2$$

che porge le soluzioni

$$\omega_1 = \sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{k}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{k}{m}}$$

Esercizio 2

(a) Il sistema è 1-dimensionale. Lo spazio delle fasi è la retta reale $\mathbb{R}$ e gli equilibri sono tutti e soli gli zeri del polinomio. Quindi sono $x = 0, 1, -3$.

(b) L'equilibrio di coordinata positiva è $x = 1$. Consideriamo la Jacobiana all'equilibrio. La matrice è uni-dimensionale e vale (4). L'equazione linearizzata è quindi $\dot\xi = 4\xi$. L'equilibrio è instabile.

(c) Certo. La funzione ha minimo stretto nell'origine e la sua derivata di Lie è $2x^4(x-1)(x+3)$, che è strettamente negativa in un intorno bucato di $x = 0$.