Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
ore 9:30 — 8 luglio 2015
Durata: 3 ore

Attenzione: Riconsegnerete DUE fogli (protocollo bianco, a 4 facciate), scriverete chiaramente cognome e nome, data e NUMERO (1 e 2) ben in vista, su ciascuno. Non riconsegnate questo foglio nè brutte copie. Potrete uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

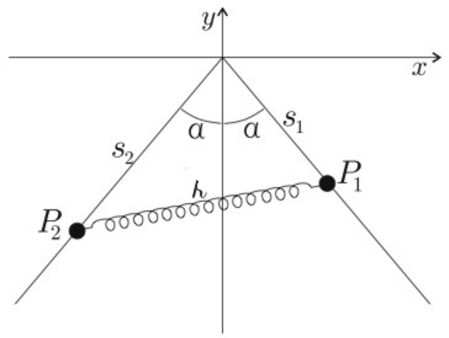
1.1 Un punto materiale di massa 1 si muove nella retta $\mathbb{R}^+$ dei reali positivi ed è soggetto al campo di forze di energia potenziale $V = -1/x - 4x + x^3$.

1. Si scrivano le equazioni di Newton (del secondo ordine) per questo sistema, e l'associato campo vettoriale X;
2. si determinino gli equilibri di X e se ne discuta la stabilità con il metodo spettrale;
3. si scriva un integrale del moto del sistema e lo si usi per disegnarne il ritratto in fase.

1.2 Si scelga un opportuno cambiamento di coordinate ed un opportuno riscalamento temporale per mostrare che il sistema logistico con due parametri $\dot{x} = hx(k-x)$ ha soluzioni sempre qualitativamente uguali a quelle del sistema logistico privo di parametri $\dot{y} = y(1-y)$. Che cosa significa questo fatto in termini di diagramma di biforcazione? Cambierebbe qualcosa se alla prima equazione si aggiungesse un termine di prelievo che ci porti a considerare quindi l'equazione $\dot{x} = hx(k-x) - p$?

2

2.1 Due punti materiale P_1 e P_2 di uguale massa m sono vincolati a scorrere senza attrito rispettivamente su due semirette aventi origine in O, che è l'origine del sistema di riferimento $Oxyz$, con y verticale ascendente. Le due semirette, con ascisse orientate s_1 e s_2, formano rispettivamente un angolo α e $-\alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$, con il semi-asse negativo delle y. Sul sistema agiscono la forza di gravità e una mutua interazione elastica data da una molla tesa tra P_1 e P_2 di costante elastica $h > 0$. Usando le coordinate Lagrangiane s_1 e s_2, determinare equilibri, studiarne la stabilità e calcolare le pulsazioni di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile.



2.2 Teorema di Noether: enunciato e dimostrazione.

2.3 Che relazione intercorre tra le parentesi di Lie di campi vettoriali Hamiltoniani, $[X_H, X_K]$, e le parentesi di Poisson tra funzioni Hamiltoniane $\{H, K\}$? (sugg.: si chiede solo una formula ed un commento algebrico, la cui dimostrazione è facoltativa; ricordare che $X_H = \mathbb{E}\nabla H$)

Soluzioni

1.1 1. Le equazioni di Newton sono $\ddot{x} = -V'(x) = -1/x^2 + 4 - 3x^2$. Il campo vettoriale associato a queste equazioni è

$$X(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ -1/x^2 + 4 - 3x^2 \end{pmatrix}$$

2. Le configurazioni di equilibrio sono tutte e sole le soluzioni di $-1/x^2 + 4 - 3x^2 = 0$, ovvero le soluzioni di $1 - 4x^2 + 3x^4 = 0$, ovvero

$$x = \pm\sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6}} = \pm\sqrt{\frac{4 \pm 2}{6}}.$$

Visto che le configurazioni sono limitate ai reali positivi allora le configurazioni di equilibrio sono $1/\sqrt{3}, 1$. Gli equilibri sono i punti del piano x, v di coordinate $(1/\sqrt{3}, 0)$ e $(1, 0)$. La Jacobiana di X è

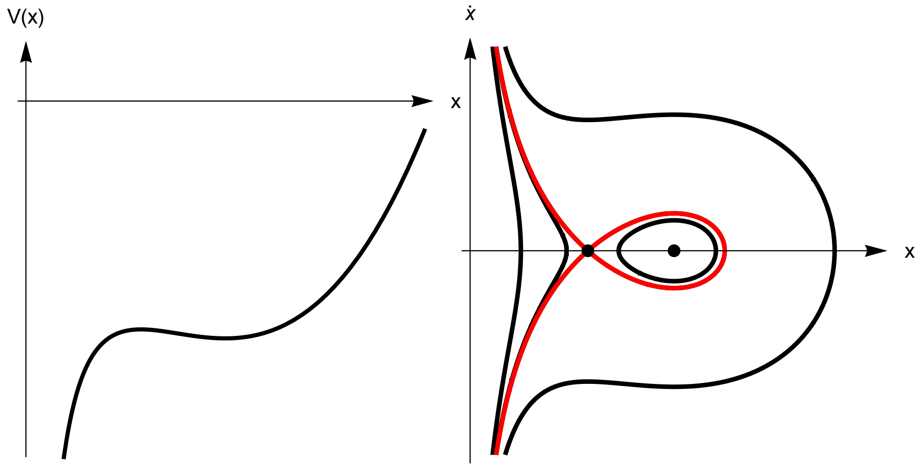
$$JX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/x^3 - 6x & 0 \end{pmatrix}$$

che nei due punti di equilibrio diventa rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Queste sono matrici di autovalori rispettivamente reali di segno opposto la prima e puramente immaginari e coniugati la seconda. La prima matrice porge quindi la instabilità dell'equilibrio (esiste un autovalore reale positivo) la seconda matrice non permette di concludere nulla sul secondo equilibrio (gli autovalori hanno tutti parte reale nulla).

3. L'energia $E = \frac{1}{2}v^2 + \left(-\frac{1}{x} - 4x + x^3\right)$ è un integrale del moto per il sistema. Per via della conservazione dell'energia si può usare la ben nota tecnica per tracciare il ritratto in fase



1.2 Ponendo $x = ky$, si ha $\dot{y} = \dot{x}/k = hy(k - ky) = hky(1 - y)$. Riscalando il tempo $s = hkt$ e denotando con un apice la derivazione rispetto ad s si ha $y' = \dot{y}(\partial t/\partial s) = hky(1 - y)/(hk) = y(1 - y)$. In alternativa si può osservare che, chiamando $X(x) = (hx(k - x))$ ed $Y(y) = (y(1 - y))$ si ha che il cambiamento di coordinate coniuga X con un multiplo (costante) di Y, e quindi manda le orbite di X in quelle di Y. Questo significa che nessuna biforcazione può avvenire al variare dei parametri.

Aggiungendo invece il termine di prelievo si ha che il campo vettoriale X si coniuga con un multiplo del campo vettoriale $Y = y(1 - y) - \alpha$ con $\alpha = \frac{p}{hk^2}$. Questo causa una biforcazione quando $\alpha = 1/4$ nella quale un equilibrio repulsivo ed uno attrattivo collidono e scompaiono (vedere note).

1.1 L'energia potenziale è

$$\mathcal{U}(s_1, s_2) = -mg\cos\alpha\,(s_1 + s_2) + \frac{1}{2}h(s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2\cos 2\alpha)$$

$\Big[$ Si usa un argomento geometrico elementare (detto a volte T. di Carnot): dato un qualunque triangolo di lati (e lunghezze) a, b, c, detto θ l'angolo tra a e b, la lunghezza c è dedotta pensando alle relazioni elementari nei triangoli rettangoli e al teorema di Pitagora: $c^2 = (a - b\cos\theta)^2 + (b\sin\theta)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$. $\Big]$

Equilibri:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\mathcal{U}}{\partial s_1} &= -mg\cos\alpha + h(s_1 - s_2\cos 2\alpha) = 0 \\ \tfrac{\partial\mathcal{U}}{\partial s_2} &= -mg\cos\alpha + h(s_2 - s_1\cos 2\alpha) = 0 \end{aligned}$$

E' un sistema lineare, e ammette l'unica soluzione:

$$s_1^* = s_2^* = \frac{mg\cos\alpha}{h(1-\cos 2\alpha)}$$

Hessiana:

$$\nabla^2\mathcal{U}(s_1, s_2) = \begin{pmatrix} h & -h\cos 2\alpha \\ -h\cos 2\alpha & h \end{pmatrix}$$

è costante, indipendente da s_1, s_2, inoltre è definita positiva:

$$h > 0, \quad \det\nabla^2\mathcal{U} = h^2 - h^2\cos^2 2\alpha > 0$$

Pertanto l'equilibrio è stabile (per TLD, oppure THND).
Energia cinetica:

$$T(s_1, s_2, \dot{s}_1, \dot{s}_2) = \frac{1}{2}m(\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2), \qquad \text{matrice cinetica: } a(s_1, s_2) = m\mathbb{I}$$

A questo punto è chiaro che il sistema di Lagrange è lineare. Le pulsazioni di piccola oscillazione sono in effetti le pulsazioni del sistema originale di Lagrange.

$$0 = \det\left(\nabla^2\mathcal{U} - \omega^2 m\mathbb{I}\right) = \det\begin{pmatrix} h - m\omega^2 & -h\cos 2\alpha \\ -h\cos 2\alpha & h - m\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$0 = h^2 + m^2\omega^4 - 2hm\omega^2 - h^2\cos^2 2\alpha = m^2\omega^4 - 2hm\omega^2 + (1 - \cos^2 2\alpha)h^2$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{hm \pm \sqrt{h^2m^2 - m^2(1-\cos^2 2\alpha)h^2}}{m^2}$$

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{h(1 \pm |\cos 2\alpha|)}{m}}$$