Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
Primo compitino 28 aprile 2016

Attenzione: Siete invitati a consegnare DUE soli fogli (protocollo bianchi, a 4 facciate), su entrambi scrivete chiaramente cognome e nome. Sul primo –che numerate con 1– risolvete *i problemi* **e rispondete ai** *quesiti teorici* **relativi a 1, sul secondo –numerato con 2– risolvete** *i problemi* **e rispondete ai** *quesiti teorici* **relativi a 2. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.**

1

1.1. Si consideri l'equazione differenziale $\ddot{x} = -V_k'(x)$ con

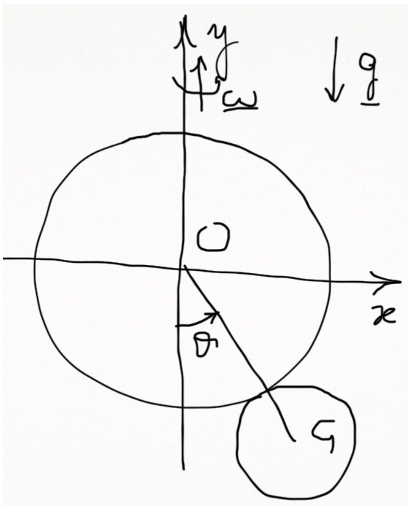
$$V_k(x) = \frac{k}{3}x^3 - x$$

dove k è una costante reale.
(i) Sia $k = 1$. Linearizzare il sistema attorno a $(\pm 1, 0)$. Stabilire che tipo di equilibri sono $(\pm 1, 0)$ per il sistema linearizzato (centro, fuoco, sella...).
(ii) Tracciare il ritratto in fase del sistema (non linearizzato) per $k = -1, 0, 1$.
(iii) Sia $k = 1$. Stabilire per quali valori di $v \in \mathbb{R}$ la soluzione con dato iniziale $(1, v)$ è periodica.

1.2. Si consideri l'equazione differenziale $\dot{z} = X(z)$ con $z \in \mathbb{R}^n$. Enunciare e dimostrare la stima sulla separazione al più esponenziale delle soluzioni. Cosa si intende per "dipendenza sensibile" dai dati iniziali?

2

2.1. Si consideri il sistema di riferimento $Oxyz$ associato ad uno spazio non inerziale uniformemente rotante rispetto agli spazi inerziali con velocità angolare di trascinamento $\underline{\omega} = \omega\hat{y}$, ω : costante. Nel piano Oxy, y verticale ascendente $\underline{g} = -g\hat{y}$, $g > 0$, un disco omogeneo $\mathcal{D}$ di raggio r e massa m è vincolato su di esso senza attrito, è inoltre vincolato a rotolare senza strisciare esternamente alla guida di equazione $x^2 + y^2 = R^2$, $R > r$. Quale parametro Lagrangiano si consideri l'angolo ϑ, orientato positivamente anti-orario nel semi-spazio $z > 0$, dal semi-asse negativo delle y alla semiretta per OG.
(i) Al variare di ω^2 nei reali positivi, determinare equilibri e discuterne la stabiltà. Abbozzare il diagramma di biforcazione.
(ii) Dato un moto $t \mapsto \vartheta(t)$, costruire la funzione vettoriale velocità angolare $t \mapsto \underline{\Omega}(t)$ del disco $\mathcal{D}$.



2.2. (i) Scrivere l'enunciato del teorema della funzione di Lyapunov per la stabilità semplice di un equilibrio x^* di un sistema dinamico astratto $\dot{x} = X(x)$ e dimostrarlo in dettaglio.
(ii) Spiegare come si utilizza questo teorema nel caso meccanico a vincoli olonomi, fissi, lisci e con opportune (quali?) Componenti Lagrangiane di Sollecitazione.

ESERCIZIO 1.1. Soluzione

(i) Per $K=1$, l'eq. diff. diventa $\ddot{x} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} - x\right) = -\left(x^2-1\right) =$

$= -x^2+1$. Al primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x^2+1 \end{cases} \Rightarrow J(x,v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x & 0 \end{pmatrix}$$

Conseguentemente, $J(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $J(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Il sistema linearizzato attorno a $(1,0)$ è

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -2(x-1) = -2x+2 \end{cases}$$

Il sistema linearizzato attorno a $(-1,0)$ è

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = 2(x+1) = 2x+2 \end{cases}$$

$$\det\left[J(1,0) - \lambda \mathbb{1}\right] = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2+2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i\sqrt{2}$$

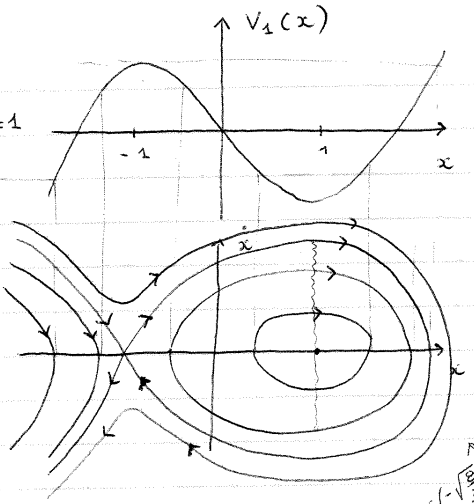
$\Rightarrow (1,0)$ è un centro.

$$\det\left[J(-1,0) - \lambda \mathbb{1}\right] = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$$

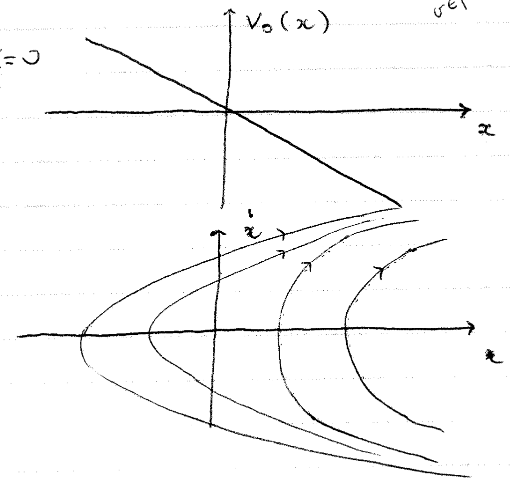
$\Rightarrow (-1,0)$ è una sella.

(ii) I ritratti in fase sono i seguenti:

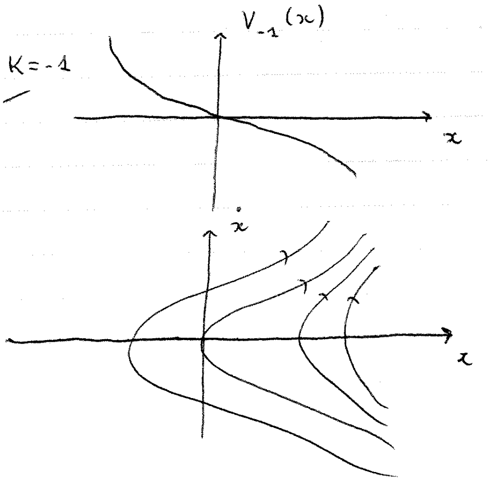
Per $K=1$



Per $K=0$



Per $K=-1$



(iii) Affinché la soluzione con dato iniziale sia periodica, deve essere

$E(1,v) < V_1(-1)$ ovvero $(m=1)$

$$\frac{1}{2}v^2 + V_1(1) < V_1(-1)$$

Inseriamo l'espressione per V_1:

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3} - 1 < -\frac{1}{3} + 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}v^2 < 2 - \frac{2}{3} = \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3}$$

$\Leftrightarrow$

$$v^2 < \frac{8}{3} \Leftrightarrow v \in \left(-\sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}}\right)$$

$v \in \left(-\sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}}\right)$

Agiscono la forza peso, la centrifuga e Coriolis. Il lavoro della F. di Coriolis sul disco è sempre nullo, si tratta di scrivere il contributo del lavoro, particella per particella del disco, e questo è un integrale di elementi dati da prodotto misto di vettori sempre tra loro complanari: velocità angolare ω, la velocità del particolare p.to materiale, il generico spostamento ammissibile per quel p.to materiale del disco. Per tale sistema 1-DIM la Componente Lagrangiana di Sollecitazione di Coriolis è identicamente nulla.

Gravità:

$$\mathcal{U}^g(\vartheta) = -m\underline{g} \cdot \breve{OG}(\vartheta) = mg\breve{y}_G(\vartheta) = -mg(R+r)\cos\vartheta$$

Centrifuga:

$$\mathcal{U}^c(\vartheta) = -\frac{\omega^2}{2}\int_{Y\in\mathcal{D}} \mu(Y)|P\breve{}P(\theta)|^2 dY =$$

$$= -\frac{\omega^2}{2}\mathcal{I}_y^{\mathcal{D}}(\vartheta) = -\frac{\omega^2}{2}\left(m(R+r)^2\sin^2\vartheta + \mathcal{I}_G^{\mathcal{D}}\right) = -\frac{\omega^2}{2}\left(m(R+r)^2\sin^2\vartheta + \frac{mr^2}{4}\right)$$

$$\textit{Equilibri}: \qquad 0 = \frac{d\mathcal{U}^{g+c}}{d\vartheta}(\vartheta) = m(R+r)\sin\vartheta\left[g - \omega^2(R+r)\cos\vartheta\right]$$

esistono, per ogni scelta di ω^2, $\sin\vartheta = 0$:

$$\vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_2 = \pi$$

se ω^2 soddisfa :

$$g - \omega^2(R+r) < 0 \qquad (*)$$

esistono due ulteriori equilibri: $\vartheta_3 = \arccos\dfrac{g}{\omega^2(R+r)}, \quad \vartheta_4 = -\vartheta_3$

Stabilità:

$$\frac{d^2\mathcal{U}^{g+c}}{d\vartheta^2}(\vartheta) = m(R+r)\{\cos\vartheta\left[g - \omega^2(R+r)\cos\vartheta\right] + \omega^2(R+r)\sin^2\vartheta\}$$

$$\frac{d^2\mathcal{U}^{g+c}}{d\vartheta^2}(\vartheta) = m(R+r)\{g\cos\vartheta + \omega^2(R+r)(1-2\cos^2\vartheta)\}$$

i) se ω^2 è 'piccolo', cioè $g - \omega^2(R+r) > 0$, esistono come detto, solo $\vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_2 = \pi$,

$$\frac{d^2\mathcal{U}^{g+c}}{d\vartheta^2}(0) = m(R+r)\{g - \omega^2(R+r)\} > 0, \ \textit{stabile, per } L-D, \textit{ oppure per } THND$$

$$\frac{d^2\mathcal{U}^{g+c}}{d\vartheta^2}(\pi) = m(R+r)\{-g - \omega^2(R+r)\} < 0, \ \textit{instabile, per } THND$$

ii) se ω^2 è 'grande', cioè $g - \omega^2(R+r) < 0$, esistono $\vartheta_3 = \arccos\frac{g}{\omega^2(R+r)}, \quad \vartheta_4 = -\vartheta_3$,

$$\frac{d^2\mathcal{U}^{g+c}}{d\vartheta^2}(\vartheta_3) = m(R+r)\Big\{\frac{g^2}{\omega^2(R+r)} + \omega^2(R+r)(1 - 2\frac{g^2}{\omega^4(R+r)^2})\Big\} =$$

$$= m\Big\{\frac{g^2}{\omega^2} + \omega^2(R+r)^2 - 2\frac{g^2}{\omega^2}\Big\} = m\Big\{\omega^2(R+r)^2 - \frac{g^2}{\omega^2}\Big\} = \frac{m}{\omega^2}\Big\{\big(\omega^2(R+r)\big)^2 - g^2\Big\} >^{(*)} 0$$

stabile, conto analogo per ϑ_4, anch'esso (ovviamente) stabile.

iii) caso critico: $g = \omega^2(R+r)$: $\vartheta_1 = \vartheta_3 = \vartheta_4 = 0$, $\frac{d^2\mathcal{U}^{g+c}}{d\vartheta^2}(0) = 0$,

$$\frac{d^3\mathcal{U}^{g+c}}{d\vartheta^3}(0) = m(R+r)\{-g\sin\vartheta + 4\omega^2(R+r)\sin\vartheta\cos\vartheta\}|_{\vartheta=0} = 0$$

$$\frac{d^4\mathcal{U}^{g+c}}{d\vartheta^4}(0) = m(R+r)\{-g\cos\vartheta + 4\omega^2(R+r)(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\}|_{\vartheta=0} =$$

$$= m(R+r)\{-g + 4\omega^2(R+r)\} = m(R+r)\{3g\} > 0, \ \textit{stabile, per } L-D.$$

Determiniamo la velocità angolare, dato un moto $t \mapsto \vartheta(t)$. Si introduce un angolo da una direzione invariante rispetto al sistema $Oxyz$ ad una invariante rispetto a $\mathcal{D}$, p.e., l'angolo φ in figura. Si noti che l'orientazione di φ è concorde con quella di ϑ. Il puro rotolamento impone un'uguaglianza tra le lunghezze di due archi: $R\vartheta = (\varphi - \vartheta)r$. Pertanto

$$\underline{\Omega}(t) = \dot{\varphi}(t)\hat{z} = \frac{R+r}{r}\dot{\vartheta}(t)\hat{z}$$