UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
ORE 9:30 — 24 SETTEMBRE 2015
DURATA: 3 ORE

Attenzione: Riconsegnare DUE fogli (protocollo bianco, a 4 facciate ciascuno) uno per parte di compito, scrivere chiaramente COGNOME e Nome, data, NUMERO (1 e 2) bene in vista su ciascun foglio. Non riconsegnare questo foglio nè brutte copie. Potrete uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

1.1 Una particella di massa m vincolata alla retta $\mathbb{R}_x$ è soggetta al campo di forze posizionale $F(x) = 2x - 4x^3$.
(a) Si scrivano le equazioni del moto ed un integrale del moto.
(b) Si calcolino le configurazioni di equilibrio e si discuta la loro stabilità usando il metodo spettrale.
(c) Si disegni il ritratto in fase. Questo ritratto aggiunge qualcosa alla discussione sulla stabilità?
(d) Si linearizzi alla configurazione di equilibrio $x = 0$ e si scriva la soluzione generale del sistema linearizzato.

1.2 Dare la definizione di equilibrio iperbolico e di varietà stabile ed instabile per un equilibrio iperbolico $\bar{x}$ di un campo vettoriale X. Dire che relazione intercorre tra queste varietà e gli autospazi della linearizzazione di X all'equilibrio $\bar{x}$.

2

2.1 Nel piano verticale Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse y diretto verso l'alto si consideri il sistema soggetto a gravità costituito da una lamina quadrata omogenea di lato $2l$ e massa m avente *solo un vertice* A vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse x. Tra il vertice A e l'origine O è tesa una molla di costante elastica $h > 0$. Si riferisca il sistema alla coordinata θ, angolo tra il segmento AG e la direzione negativa dell'asse y, valutato positivamente in senso antiorario e alla coordinata $x = x_A$
(a) Scrivere l'energia potenziale delle forze agenti nel riferimento $Oxyz$ e determinare gli equilibri del sistema.
(b) Scrivere l'energia cinetica ed ottenere la frequenza delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.
(c) Si supponga che ora il sistema $Oxyz$ ruoti con velocità angolare costante attorno all'asse verticale y. Scrivere, senza risolverle, ma in dettaglio, le equazioni per il calcolo degli equilibri e la loro stabilità.
(d) Si supponga infine che sul sistema, nelle condizioni del punto (a), non agisca più la molla. Scrivere l'Hamiltoniana del sistema a meno del calcolo di inversa di matrice e determinare gli integrali primi di quest'ultimo sistema.
(e) Sempre per il sistema di cui al punto (d), studiare con il metodo di Hamilton-Jacobi il moto del sistema linearizzato attorno all'equilibrio stabile.

2.2 Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange-Dirichlet.

Soluzioni

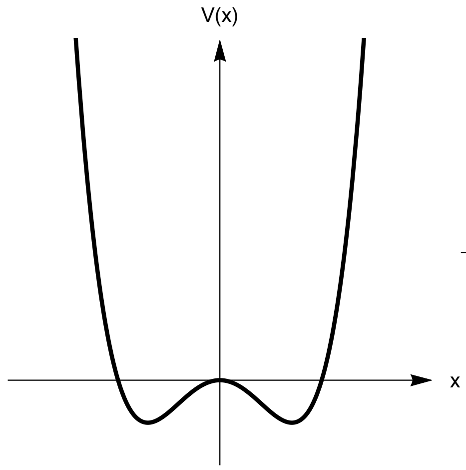
1.1 a. L'equazione del moto è $m\ddot{x} = 2x - 4x^3$, l'integrale del moto è $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + x^4 - x^2$.

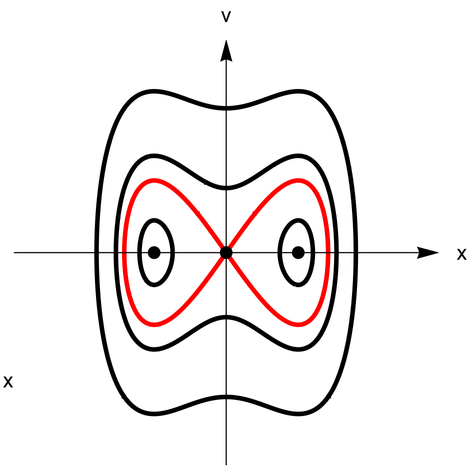
b. Le configurazioni di equilibrio sono le soluzioni a $-2x + 4x^3 = 0$, e quindi $x = 0, \pm\sqrt{2}/2$. Per studiare la stabilità con il metodo spettrale si deve osservare che l'equazione del II ordine appena scritta corrisponde la sistema del I ordine $\dot{x} = v$, $\dot{v} = (2x - 4x^3)/m$. La linearizzazione di tale campo sistema agli equilibri $(0, 0)$ e $(\pm\sqrt{2}/2, 0)$ porge le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2-12x^2}{m} & 0 \end{pmatrix}\Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{m} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2-12x^2}{m} & 0 \end{pmatrix}\Big|_{(\pm\sqrt{2}/2,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{4}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

Tali matrici hanno rispettivamente autovalori reali di segno opposto, da cui segue l'instabilità dell'equilibrio $(0, 0)$ ed hanno due autovalori puramente immaginari negli altri due equilibri, la cui stabilità risulta quindi indecidibile.

c.





Il ritratto in fase permette di dimostrare la stabilità semplice degli equilibri $(\pm\sqrt{2}/2, 0)$.

d. Il sistema lineare all'equilibrio $(0, 0)$ è quello di equazioni $\dot{\xi} = \eta$, $\dot{\eta} = \frac{2}{m}\xi$ (abbiamo chiamato ξ, η le perturbazioni dall'equilibrio $(0, 0)$), ovvero $\ddot{\xi} = \frac{2}{m}\xi$. Le soluzioni sono quindi

$$\xi(t) = \frac{\omega\xi_0 + \eta_0}{2\omega}e^{\omega t} + \frac{\omega\xi_0 - \eta_0}{2\omega}e^{-\omega t}.$$

2.1 Le forze conservative agenti nel sistema inerziale sono la forza elastica e gravitazionale. Si ha

$$U(x, \theta) = U^{el}(x) + U^g(\theta) = \frac{h}{2}x^2 - mgl\sqrt{2}\cos\theta.$$

Gli equilibri sono le soluzioni di $\nabla U = 0$ ovvero

$$U_x = hx = 0, \qquad U_\theta = mgl\sqrt{2}\sin\theta = 0$$

e quindi $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (0, \pi)$. La matrice Hessiana è diagonale

$$H_U(x, \theta) = Diag[h, mgl\sqrt{2}\cos\theta]$$

applicando THND si deduce subito che P_1 è stabile e P_2 è instabile.

Per calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni abbiamo bisogno dell'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}I_G^z\dot{\theta}^2$$

La velocità del baricentro si trova derivando e quadrando le componenti

$$x_G = x + l\sqrt{2}\sin\theta, \qquad y_G = -l\sqrt{2}\cos\theta,$$

da cui $v_G^2 = \dot{x}^2 + 2l^2\dot{\theta}^2 + 2l\sqrt{2}\cos\theta\dot{x}\dot{\theta}$ mentre

$$I_G^z = \frac{m}{12}[(2l)^2 + (2l)^2] = \frac{2m}{3}l^2.$$

La matrice dell'energia cinetica è

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} m & ml\sqrt{2}\cos\theta \\ ml\sqrt{2}\cos\theta & \frac{8}{3}ml^2 \end{pmatrix}$$

e le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni di $\det(H_U(P_1) - \omega^2 A(P_1)) = 0$.

Se ora il sistema ruota attorno all'asse verticale, bisogna aggiungere il contributo delle forze apparenti. Sappiamo che le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono nulle, mentre la forza centrifuga ammette potenziale

$$U^{cf}(x,\theta) = -\frac{\omega^2}{2}I_O^y$$

ove

$$I_O^y = mx_G^2 + I_G^y = m(x + l\sqrt{2}\sin\theta)^2 + \frac{1}{3}ml^2$$

poichè

$$I_G^y = I_G^1\sin\theta^2 + I_G^2\cos\theta^2 = \frac{m}{12}(2l)^2.$$

Gli equilibri si trovano come prima annullando il gradiente dell'energia potenziale totale.

Se ora supponiamo il sistema non rotante e privo della molla, l'energia potenziale è $U = U^g(\theta)$. Posto $q = (x,\theta)$ la lagrangiana si scrive

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}\cdot A(\theta)\dot{q} - U(\theta) = L(\theta, \dot{x}, \dot{\theta})$$

L'hamiltoniana ha la forma $H = T + U = \frac{1}{2}p\cdot A(\theta)^{-1}p + U(\theta)$ e quindi, oltre all'integrale dell'energia, abbiamo la conservazione di H_x. Il lagrangiano del sistema linearizzato attorno a P_1 si scrive

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}\cdot A(P_1)\dot{q} - \frac{1}{2}q\cdot H_U(P_1)q$$

e quindi

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}2l\sqrt{2}\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}\frac{8}{3}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgl\sqrt{2}\theta^2$$