Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
ore 10:00 — 25 Settembre 2017
Durata: 3 ore

Esercizio 1. Una particella di massa $m = 2$ è soggetta alla forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = x^2(1-x)(3-x)$$

(*a*) Tracciare il ritratto in fase per $\ddot{x} = -V'(x)$.
Suggerimento: Risulta $V(\frac{3+\sqrt{3}}{2}) < 0$, $V(\frac{3-\sqrt{3}}{2}) > 0$, $V''(\frac{3+\sqrt{3}}{2}) > 0$ *e* $V''(\frac{3-\sqrt{3}}{2}) < 0$.

(*b*) Scrivere la formula per il periodo del moto di condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$.

(*c*) Stimare inferiormente e superiormente il periodo del moto del punto precedente.
Suggerimento: Si ricordi che $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{-(a-x)(b-x)}} = \pi$.

Esercizio 2. In un sistema di riferimento Oxy con y verticale ascendente, si consideri un anello privo di massa e di raggio unitario, centrato in O e libero di ruotare attorno all'origine del sistema di riferimento. Un pendolo di massa m e lunghezza unitaria è sospeso a un punto A dell'anello. Un punto materiale di massa $M > m$ è invece fissato al punto B dell'anello diametralmente opposto ad A.
Si considerino come coordinate Lagrangiane: l'angolo θ tra il semiasse negativo delle y e il segmento OA, orientato in senso antiorario, e l'angolo ϕ tra l'asse verticale passante per A ed il pendolo, orientato in senso antiorario.

(*a*) Determinare le configurazioni di equilibrio ed individuare –motivando adeguatamente la risposta– la posizione di equilibrio stabile.
Suggerimento: Si ricordi che $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$.

(*b*) Assumendo $M = 4m$, calcolare le frequenze di piccola oscillazione attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

Esercizio 3. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + g(x_2) \end{cases}$$

dove $g \in C^0(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$.

(*a*) Stabilire un'ipotesi sulla funzione g affichè l'origine sia un equilibrio stabile.

(*b*) Stabilire un'ipotesi sulla funzione g affichè l'origine sia un equilibrio asintoticamente stabile.

Domanda 1. Enunciato e dimostrazione del Teorema di Lagrange-Dirichlet.

Domanda 2. Data una varietà vincolare S, definire la trasformazione di Legendre tra TS e T^*S. Cosa vuol dire che essa "coniuga" le equazioni di Lagrange con quelle di Hamilton? Dimostrare che nel caso Lagrangiano meccanico, $L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$, l'Hamiltoniana corrispondente è l'energia totale.

Esercizio 1

$m = 2$

$V(x) = x^2(1-x)(3-x)$

(a) Studiamo innanzitutto il grafico di $V(x)$

$\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = +\infty$

$$\begin{aligned} V'(x) &= 2x(1-x)(3-x) - x^2(3-x) - x^2(1-x) \\ &= 2x(1-x)(3-x) - x^2(3-x+1-x) \\ &= 2x(1-x)(3-x) - x^2(-2x+4) \\ &= 2x(3 - x - 3x + \underbrace{x^2 + x^2} - 2x) \\ &= 2x(2x^2 - 6x + 3) \end{aligned}$$

$\Rightarrow V'(x) = 0 \iff x_0 = 0$ e $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

Inoltre

$V''(x) = 2(2x^2 - 6x + 3) + 2x(4x - 6) = 6(2x^2 - 4x + 1)$

E quindi

$V''(x_0) = V''(0) = 6 \Rightarrow$ Minimo

$V''(x_1) = V''\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right) \simeq 16.39 > 0 \Rightarrow$ Minimo

$V''(x_2) = V''\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right) \simeq -4.39 < 0 \Rightarrow$ Massimo

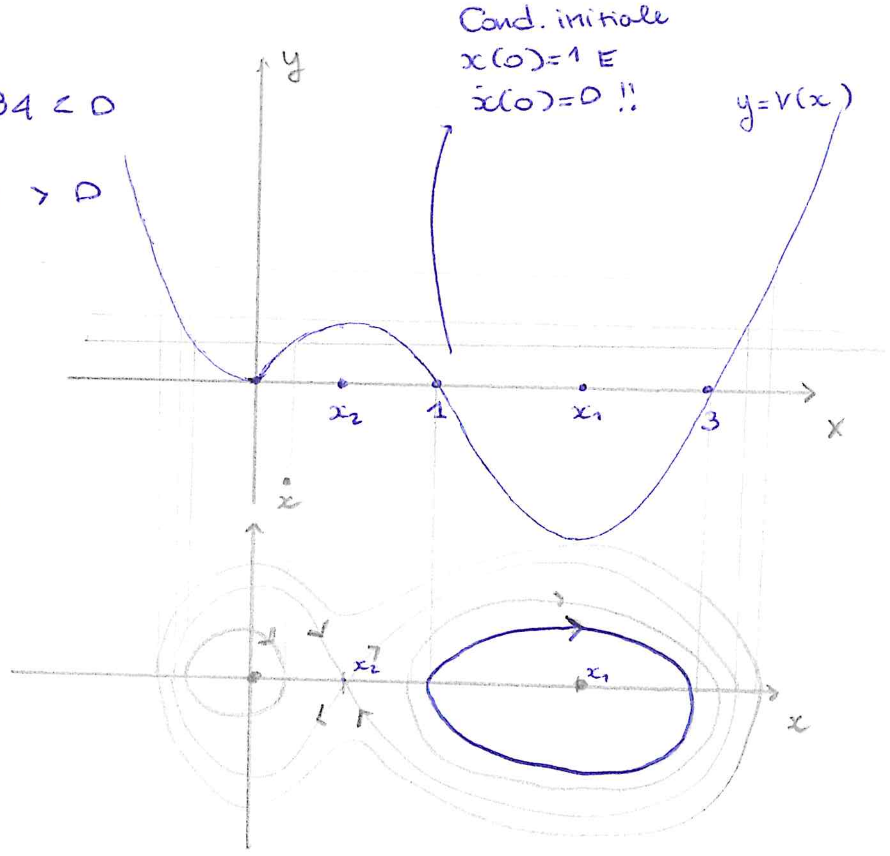
Inoltre

$V(x_0) = V(0) = 0$

$V(x_1) = V\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right) \simeq -4,84 < 0$

$V(x_2) = V\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right) \simeq 0,34 > 0$

il ritratto in fase per $\ddot{x} = -V'(x)$ ha un andamento come quello in figura



(b) I punti 1 e 3 rappresentano le intersezioni dell'energia potenziale con il livello $E = 0$. Pertanto

$$T = 2\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{\underset{\substack{\| \\ 2}}{\frac{2}{m}}\Big[\underset{\substack{\| \\ 0}}{E} - V(x)\Big]}} = 2\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{-x^2(1-x)(3-x)}}$$

(c) Per ottenere una stima del periodo, si possono sostituire al posto di x^2 i valori usati agli estremi di integrazione:

$$\frac{2}{3}\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{-(1-x)(3-x)}} \leq T \leq 2\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{-(1-x)(3-x)}}$$

Ricordiamo ora che

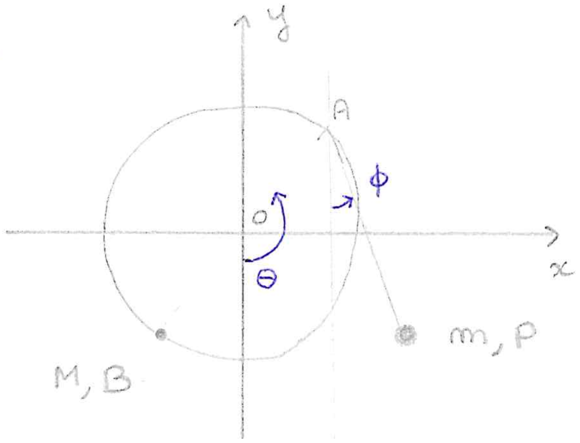
$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{-(a-x)(b-x)}} = \pi \quad , \text{ per cui:}$$

$$\frac{2}{3}\pi \leq T \leq 2\pi .$$

———x———

Esercizio 2

$M > m$



(a) $A = (\sin\theta, -\cos\theta) \Rightarrow B = (-\sin\theta, \cos\theta)$

$P = (\sin\theta + \sin\phi, -\cos\phi - \cos\theta)$

attentione di segni !

Conseguentemente

$\vec{v}_B = \dot\theta(-\cos\theta, -\sin\theta) = -\dot\theta(\cos\theta, \sin\theta)$

$\vec{v}_P = (\dot\theta\cos\theta + \dot\phi\cos\phi, \dot\phi\sin\phi + \dot\theta\sin\theta)$

E quindi

$|\vec{v}_B|^2 = \dot\theta^2$, $|\vec{v}_P|^2 = \dot\theta^2\cos^2\theta + \dot\phi^2\cos^2\phi + 2\dot\theta\dot\phi\cos\theta\cos\phi +$
$+ \dot\phi^2\sin^2\phi + \dot\theta^2\sin^2\theta + 2\dot\phi\dot\theta\sin\phi\sin\theta = \dot\theta^2 + \dot\phi^2 + 2\dot\theta\dot\phi[\cos\theta\cos\phi +$
$+ \sin\theta\sin\phi] = \dot\theta^2 + \dot\phi^2 + 2\dot\theta\dot\phi\cos(\phi - \theta)$

Scriviamo così l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{1}{2}M\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m[\dot\theta^2 + \dot\phi^2 + 2\dot\theta\dot\phi\cos(\phi-\theta)]$$

Mentre l'energia potentiale vale

$$V = mg(-\cos\phi - \cos\theta) + Mg(\cos\theta) = (M-m)g\cos\theta - mg\cos\phi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_\theta = (m-M)g\,\mathrm{sen}\,\theta \\ V_\phi = mg\sin\phi \end{cases} \Rightarrow H_V = \begin{pmatrix} (m-M)g\cos\theta & 0 \\ 0 & mg\cos\phi \end{pmatrix}$$

Gli equilibri sono: $(0,0), (0,\pi), (\pi,0)$ e (π,π).
Tra queste configurationi, se si considera con attentione il disegno, quella che risulta essere stabile è $(\theta^*, \phi^*) = (\pi, 0)$. Ovvero la configuratione in cui la massa M è in basso. Lo verifichiamo:

$$H_V(\pi, 0) = \begin{pmatrix} (M-m)g & 0 \\ 0 & mg \end{pmatrix}$$

In effetti $(M - m > 0!)$ tale matrice è diagonale con termini positivi.

(b) in (θ^*, ϕ^*) la matrice dell'energia cinetica è $\begin{pmatrix} M+m & -m \\ -m & m \end{pmatrix}$

che, nel caso in cui $M = 4m$, diventa $A = \begin{pmatrix} 5m & -m \\ -m & m \end{pmatrix}$

Le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile $(\theta^*, \varphi^*) = (\pi, 0)$ sono le soluzioni di $\det[H_V(\pi, 0) - \omega^2 A] = 0$. Ovvero

$$\det \begin{pmatrix} 3mg - \omega^2 5m & \omega^2 m \\ \omega^2 m & mg - \omega^2 m \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff (3mg - \omega^2 5m)(mg - \omega^2 m) - \omega^4 m^2 = 0$$

$$\iff 3m^2 g^2 - 3m^2 g\omega^2 - 5m^2 g\omega^2 + 5m^2\omega^4 - m^2\omega^4 = 0$$

$$\iff 4m^2\omega^4 - 8m^2 g\omega^2 + 3m^2 g^2 = 0$$

$$\iff 4\omega^4 - 8g\omega^2 + 3g^2 = 0$$

$$\iff \omega^2_{1,2} = \frac{8g \pm g\sqrt{64 - 48}}{8} = \frac{(8 \pm 4)}{8} g = \begin{cases} \nearrow\ 12/8\, g = 3/2\, g \\ \searrow\ 4/8\, g = 1/2\, g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{3}{2} g \quad e \quad \omega_2^2 = \frac{1}{2} g$$

———x———

Esercizio 3

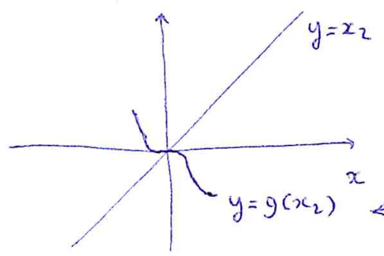
Useremo la funzione di Lyapunov candidata $\frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 = E(x_1, x_2)$

Denoto con X il campo vettoriale in questione.

(a) $L_X E(x_1, x_2) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = -x_1^2 + \cancel{x_1 x_2} - \cancel{x_1 x_2} - x_2^2 + x_2 g(x_2) \leq 0$

SE esiste un intorno U di ~~x_0~~ 0 in cui $\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sgn} x_2 = -\operatorname{sgn} g(x_2). \\ \forall x_2 \in U \text{ t.c. } g(x_2) \neq 0 \end{array}}$

Ad esempio:



MA g può essere anche nulla!

(b) Ragionando nello stesso modo, ma per l'asintotica stabilità, la condizione che si trova è:

Esiste un intorno U di 0 in cui $\boxed{\begin{cases} g(x_2) \neq 0 & \forall x_2 \in U \setminus \{0\} \\ \operatorname{sgn} x_2 = -\operatorname{sgn} g(x_2) & \forall x_2 \in U \setminus \{0\} \end{cases}}$