UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
ORE 9:30 — 6 LUGLIO 2017
DURATA: 3 ORE

Attenzione: Riconsegnerete DUE fogli (protocollo bianco, a 4 facciate), scriverete chiaramente cognome e nome, data e NUMERO (1 e 2) ben in vista, su ciascuno. Non riconsegnate questo foglio nè brutte copie. Potrete uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

1.1 Si consideri il sistema differenziale nel piano

$$\dot{x} = f(x, y) = x - 2y + xy, \qquad \dot{y} = g(x, y) = 2x + y - y^2$$

- a) si determinino gli equilibri del sistema, si scriva il sistema linearizzato attorno ad uno di essi, si indaghi la stabilità dell'equilibrio e si tracci il ritratto di fase qualitativo
- b) si dimostri che l'insieme del piano definito da $g(x, y) = 0$ si lascia scrivere localmente come $x = \tilde{g}(y)$ e si consideri l'equazione differenziale
$$\dot{y} = f(\tilde{g}(y), y) + k$$
si tracci il ritratto in fase del sistema differenziale al variare di k nei reali.
- c) si tracci il ritratto in fase del sistema del secondo ordine
$$\ddot{y} = f(\tilde{g}(y), y)$$

1.2 Dare la definizione di stabilità semplice e asintotica per $\dot{x} = X(x)$. Enunciato e dimostrazione del teorema topologico di Lyapunov per la stabilità.

2

2.1 Il sistema meccanico in studio è costituito da un punto P di massa m, vincolato sul piano Oxy orizzontale di un sistema cartesiano $Oxyz$, e da una secondo punto Q di massa M, vincolato a scorrere sull'asse z verticale. Un filo inestensibile, passante per l'origine, lega tra loro i due punti. Sul sistema agisce la gravità: $\mathbf{g} = -g\hat{z}$, $g > 0$. (La costante della lunghezza del filo sarà inessenziale nello svolgimento, se si vuole, la si indichi con ℓ).

a) Usando come coordinate Lagrangiane le coordinate polari r e θ per P, si scrivano la Lagrangiana L e le equazioni del moto.

b) Si riduca il problema a un solo grado di libertà, si scriva la Lagrangiana ridotta $\mathcal{L}$ e l'equazione del moto, per un valore assegnato c dell'integrale primo di ciclicità.

c) Per $c > 0$ fissato, si traccino il grafico del potenziale e il ritratto di fase del sistema ridotto; si verifichi che per ogni valore di energia il raggio r oscilla tra due valori positivi limitati r_1 e r_2.

d) Si determinino i dati iniziali $r_0, \theta_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0$ in corrispondenza ai quali il moto di P è circolare e si calcoli il periodo del moto.

2.2 Un corpo rigido libero, di momenti d'inerzia in un sistema solidale baricentrale principale d'inerzia $I_1 < I_2 < I_3$, sia soggetto alla sola forza di gravità. Dimostrare **analiticamente** che le rotazioni uniformi attorno al secondo asse sono instabili nello spazio $\mathbb{R}^3$ delle velocità angolari $\omega \in \mathbb{R}^3$.

2.3 Principio variazionale di Hamilton: enunciato e dimostrazione.

Soluzione 1.1:

Correzione Appello 6 luglio 17.

Esercizio A.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) = x - 2y + xy \\ \dot{y} = g(x,y) = 2x + y - y^2 \end{cases}$$

Equilibri: $f(x,y) = g(x,y) = 0$. Dalla seconda $x = \frac{1}{2}(y^2 - y)$

Sost. nella prima equazione $y(y^2 - 5) = 0$

$P_1 = (0,0)$ $\quad P_2 = \left(\frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}), \sqrt{5}\right)$ $\quad P_3 = \left(\frac{1}{2}(5 + \sqrt{5}), -\sqrt{5}\right)$

Sistema linearizzato

$$A = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+y & -2+x \\ 2 & 1-2y \end{pmatrix} \qquad A(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

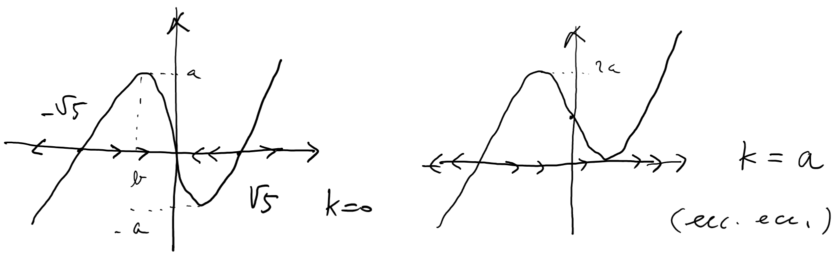
$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (1-\lambda)^2 + 4 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$$

T. Spettrale: P_1 è fuoco instabile

a_2) $\frac{\partial g}{\partial x} = 2 > 0 \Rightarrow$ localmente $g(x,y) = 0$ si scrive come

$x = \tilde{g}(y)$. Allora $\dot{y} = f(\tilde{g}(y), y) = y(y^2 - 5) = y^3 - 5y$

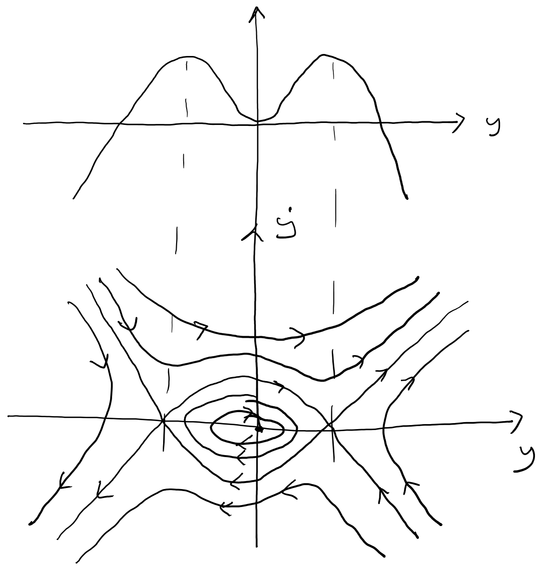
Ritratto in fase di $\dot{y} = \tilde{f}(y) = y^3 - 5y + k$.



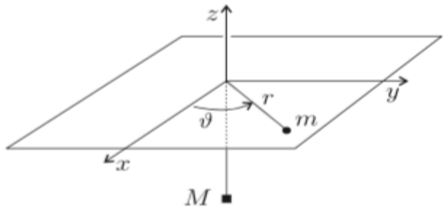
a_3) Ritratto in fase di $\ddot{y} = \tilde{f}(y) = f(\tilde{g}(y), y)$

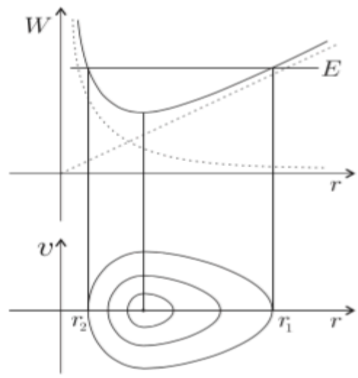
$$\ddot{y} = f(y) = y^3 - 5y = -\frac{dU}{dy}(y)$$

$$U(y) = -\frac{y^4}{4} + \frac{5}{2}y^2 = -\frac{y^2}{4}\left(y^2 - 10\right)$$



Soluzione 2.1:





Soluzione

La coordinata z di M è legata a r dal vincolo

$$z = r + \text{cost} \; , \qquad \dot{z} = \dot{r} \; ;$$

l'energia cinetica del sistema è allora $K = \frac{1}{2}[(M+m)\dot{r}^2 + mr^2\dot{\vartheta}^2]$, e la lagrangiana del sistema (a meno di una costante) è

$$L(r, \vartheta, \dot{r}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}[(M+m)\dot{r}^2 + mr^2\dot{\vartheta}^2] - Mgr \; .$$

Le corrispondenti equazioni di Lagrange sono

$$(M+m)\ddot{r} - mr\dot{\vartheta}^2 + Mg = 0 \; , \qquad mr^2\ddot{\vartheta} + 2mr\dot{r}\dot{\vartheta} = 0 \; .$$

La lagrangiana non contiene la coordinata ϑ, pertanto si conserva il momento coniugato

$$p_\vartheta = mr^2\dot\vartheta$$

(la seconda equazione di Lagrange altro non è che $\dot p_\vartheta = 0$). Per utilizzare p_ϑ al posto di $\dot\vartheta$, così da ridursi a un solo grado di libertà, si effettua innanzitutto l'inversione

$$\dot\vartheta = u(r, p_\vartheta) = \frac{p_\vartheta}{mr^2}$$

(qui u eccezionalmente non dipende da $\dot r$; il motivo è che la matrice cinetica è diagonale, cosicché $p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta}$ non contiene $\dot r$). La lagrangiana ridotta L' si trova poi, secondo la teoria, sostituendo $\dot\vartheta$ in L, e aggiungendo il termine correttivo $-p_\vartheta u$:

$$\begin{aligned} L'(r,\dot r; p_\vartheta) &= L(r, \dot r, u(r, p_\vartheta)) - p_\vartheta u(r, p_\vartheta) \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot r^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{p_\vartheta^2}{(mr^2)^2} - V(r) - \frac{p_\vartheta^2}{mr^2} \\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot r^2 - W(r, p_\vartheta) \end{aligned}$$

ove il "potenziale efficace" W, contenente p_ϑ come parametro costante, è dato da

$$W(r, p_\vartheta) = V(r) + \frac{p_\vartheta^2}{2mr^2} = Mgr + \frac{p_\vartheta^2}{2mr^2} \; .$$

L'equazione di Lagrange corrispondente è

$$(M+m)\ddot r + Mg - \frac{p_\vartheta^2}{mr^3} = 0 \; .$$

Per $p_\vartheta \neq 0$ il "termine centrifugo" $\frac{p_\vartheta^2}{2mr^2}$ in L' diverge per $r \to 0$ e così tiene r fuori dall'origine. In effetti, il grafico del potenziale si vede subito essere quello rappresentato in figura (le linee tratteggiate rappresentano $V(r)$ e il termine centrifugo, che sommati danno W). Il ritratto in fase corrispondente è elementare: c'è un solo punto di equilibrio r^*, corrispondente al minimo di W, e per ogni livello di energia si ha una curva chiusa tra due estremi r_1 e r_2 dipendenti da E (e da p_ϑ).

Il punto di equilibrio r^* del problema ridotto si trova imponendo $\frac{\partial W}{\partial r} = 0$; il risultato è

$$r^*(p_\vartheta) = \left(\frac{p_\vartheta^2}{mMg}\right)^{1/3} \; .$$

Si trova un moto circolare del problema completo in corrispondenza all'equilibrio del sistema ridotto. Bisogna allora prendere dati iniziali $r_0, \vartheta_0, \dot r_0, \dot\vartheta_0$ tali che $\dot r_0 = 0$ e $r_0 = r^*(p_\vartheta)$, badando però anche a sostituire p_ϑ, nell'espressione di r^*, in termini di r_0 e $\dot\vartheta_0$,

$$p_\vartheta = mr_0^2\dot\vartheta_0 \; .$$

Si trovano così moti circolari per $\dot r_0 = 0$ e $r_0, \dot\vartheta_0$ legati da

$$mr_0\dot\vartheta_0^2 = Mg \; ,$$

mentre ϑ_0 è libero. Il risultato si legge facilmente osservando che in equilibrio il filo esercita la forza Mg (per sostenere M) e questa è anche la forza centripeta necessaria a mantenere m in moto circolare. Il moto circolare è uniforme, come segue da

$$\dot\vartheta(t) = \frac{p_\vartheta}{mr(t)^2} = \frac{p_\vartheta}{mr_0^2} = \dot\vartheta_0 \; ,$$

e il suo periodo è $2\pi/\dot\vartheta_0$.