Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
ore 9:30 — 9 settembre 2015
Durata: 3 ore

Attenzione: Riconsegnerete DUE fogli (protocollo bianco, a 4 facciate), scriverete chiaramente cognome e nome, data e NUMERO (1 e 2) ben in vista, su ciascuno. Non riconsegnate questo foglio nè brutte copie. Potrete uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

1.1 Nel piano $\mathbb{R}^2_{x,y}$ si consideri il sistema di equazioni differenziali

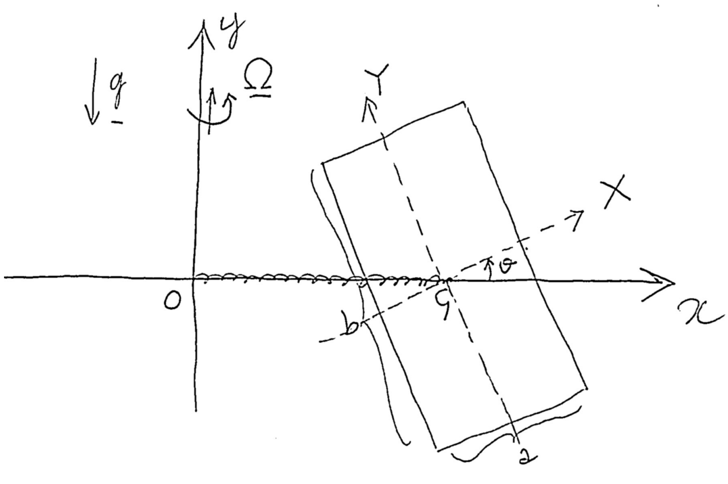
$$\dot{x} = 1 + x + y^2, \qquad \dot{y} = 2 + 2x + 2y - xy - 2y^2.$$

1. Si calcolino gli equilibri del sistema;
2. si linearizzi il sistema negli equilibri ottenuti al punto 1;
3. si discuta la stabilità di tali equilibri;
4. si disegni il ritratto in fase accurato del sistema linearizzato all'equilibrio più lontano dall'origine.

1.2 Un diffeomorfismo (o cambiamento di coordinate) $\mathcal{C} : U \subset \mathbb{R}^n_x \to V \subset \mathbb{R}^n_y$, $x \to \mathcal{C}(x) = y$ coniuga un campo vettoriale $X = (X_1(x), ..., X_n(x))$ in U and un campo vettoriale $Y = (Y_1(y), ..., Y_n(y))$ in V. Qual è l'espressione di Y? Dimostrarlo.

2

2.1 Una lamina rettangolare omogenea di massa $m > 0$ e di lati a e b, $a < b$, è vincolata senza attrito nel piano (O, x, y) di un sistema rotante uniformemente con velocità angolare di trascinamento $\underline{\Omega} = \Omega\,\hat{y}$ rispetto agli spazi inerziali. Il suo baricentro G è inoltre vincolato a scorrere senza attrito sull'asse x. Tra G e l'origine O è tesa una molla di costante elastica $h > 0$. L'asse y è verticale ascendente: $\underline{g} = -g\,\hat{y}$, $g > 0$. Si determinino equilibri e si discuta la stabilità di essi al variare dei parametri strutturali del sistema. Determinare le pulsazioni di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile. Usare quali parametri Lagrangiani la x del baricentro G e l'angolo orientato θ come in figura.



2.2 Sia $H : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$, $(q, p) \mapsto H(q, p)$, una funzione Hamiltoniana di classe C^2, molto generale, cioè non necessariamente di tipo meccanico. E' vero che i punti critici di H sono esattamente gli equilibri per il sistema dinamico Hamiltoniano associato a H? Dimostrare o confutare in dettaglio se sia possibile trovare Hamiltoniane del tipo sopra scritto, cioè indipendenti dal tempo, tali da possedere equilibri asintoticamente stabili.

SOLUZIONI

1.1 1. Dalla prima equazione si ricava che $x = -1 - y^2$. Sostituendo nella seconda si ha che $2 + 2(-1 - y^2) + 2y - (-1 - y^2)y - 2y^2 = 0$, ovvero $y(-4y + 3 + y^2) = 0$ ovvero $y = 0$ oppure $y = 2 \pm 1$. Segue che gli equilibri sono $(-1, 0)$, $(-2, 1)$, $(-10, 3)$.

2. La matrice Jacobiana del campo vettoriale è $JX = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2-y & 2-x-4y \end{pmatrix}$. Calcolata nelle tre configurazioni di equilibrio si hanno le matrici

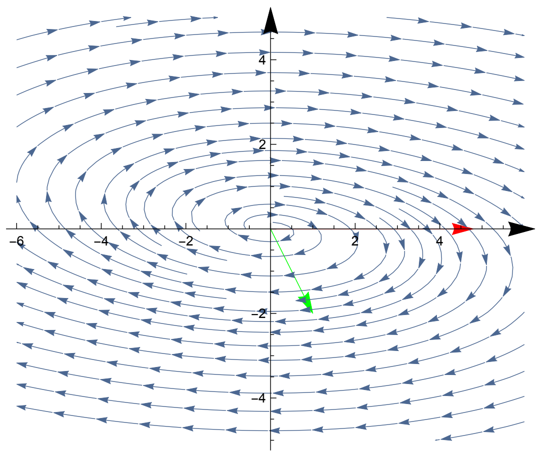
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. La linearizzazione in $(1, 0)$ ha matrice con traccia 4 e determinante 3, quindi la formula $det - (tr/2)^2$ porge $3 - 4 < 0$ che indica un nodo instabile. L'equilibrio è quindi instabile. La linearizzazione in $(-2, 1)$ ha matrice con traccia 1 e determinante -2. Siccome il determinante è negativo si tratta necessariamente di una sella instabile (un autovalore positivo ed uno negativo); l'equilibrio è quindi instabile. La linearizzazione in $(-10, 3)$ ha matrice con traccia 1 e determinante 6, quindi il discriminante $6 - (1/2)^2 > 0$ porge un fuoco instabile. L'equilibrio è quindi instabile.

4. L'equilibrio più lontano dall'origine è $(-10, 3)$. Gli autovalori della matrice associata sono $\lambda_\pm = \left(1 \pm i\sqrt{23}\right)/2$ ed i rispettivi autovettori sono

$$v_+ = \begin{pmatrix} 1 + i\sqrt{23} \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad v_- = \begin{pmatrix} 1 - i\sqrt{23} \\ -2 \end{pmatrix}$$

Seguendo una regola discussa in classe, si prende l'autovettore associato all'autovalore con parte reale positiva, si considerano i due quasi-autovettori $v^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $v^{(i)} = \begin{pmatrix} \sqrt{23} \\ 0 \end{pmatrix}$ e si disegna una spirale che si avvolge espandendosi verso l'esterno in modo che il vettore $v^{(r)}$ vada a sovrapporsi al vettore $v^{(i)}$ facendo "il giro lungo"



(Questo perché nel sistema di riferimento $v^{(r)}, v^{(i)}$ il campo vettoriale si coniuga alla composizione di una rotazione antioraria di frequenza $\sqrt{23}/2$ con una omotetia esponenziale di esponente $1/2$.) Un modo più pratico di decidere il verso di rotazione è calcolare il campo vettoriale in punti negli assi coordinati e disegnare tutte le frecce in modo consistente.

1.2 Partiamo direttamente dalla dimostrazione. Se $\mathcal{C}$ coniuga X ad Y allora manda le soluzioni di X nelle soluzioni di Y. Sia quindi $t \to x(t)$ una soluzione dell'equazione $\dot{x} = X(x)$, la mappa $\mathcal{C}$ manda tale funzione in $t \to \mathcal{C}(x(t)) = y(t)$ che deve essere soluzione di $\dot{y} = Y(y)$. Derivando si ottiene

$$Y(y(t)) = \dot{y}(t) = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}(x(t))\dot{x}(t) = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}(x(t))X(x(t)) = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}(\mathcal{C}^{-1}(y(t)))X(\mathcal{C}^{-1}(y(t))).$$

Quindi deve valere $Y(y) = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}(x)X(x)|_{x=\mathcal{C}^{-1}(y)}$.

2.1(traccia)

$$T(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{m(a^2 + b^2)}{12}\dot{\theta}^2$$

La matrice associata all'operatore d'Inerzia

$$U(x, \theta) = \frac{h}{2}x^2 - \frac{1}{2}\Omega^2(mx^2 + \frac{mb^2}{12}\sin^2\theta + \frac{ma^2}{12}\cos^2\theta) \qquad \text{(cf. dispensa in rete p. 43-44)}$$

Equilibri:

$$(0,0),(0,\pi/2),(0,\pi),(0,3/2\pi)$$

Si controlla che $(0,\pi/2)$ è stabile, e le locali pulsazioni di piccola oscillazione sono:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{h-m\Omega^2}{m}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\Omega^2}$$

2.2 Dalla struttura delle equazioni di Hamilton (basta scriverle) si vede che gli equilibri sono esattamente i p.ti critici di H. E' noto poi che non ci possono essere equilibri asintoticamente stabili in presenza di integrali primi, quale è appunto $H(q,p)$.