UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
ORE 9:30 — 9 LUGLIO 2018
DURATA: 2:45 ORE

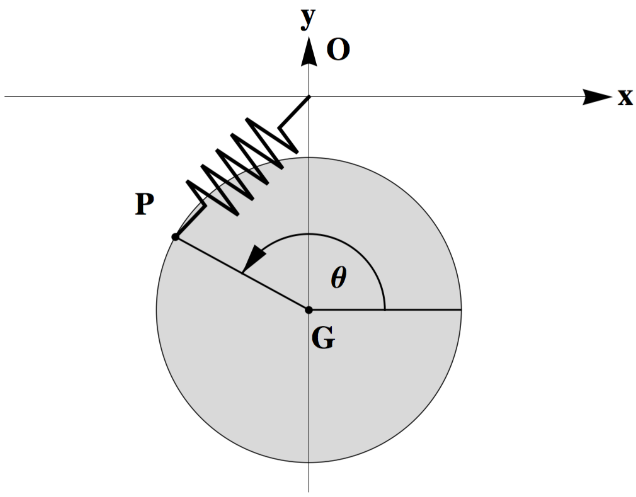
Attenzione: Scriverete chiaramente su tutti i fogli che riconsegnerete cognome e nome e data. Non riconsegnate questo foglio nè brutte copie. Potrete uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

(i) Dare la definizione di stabilità semplice e asintotica per $\dot{x} = X(x)$.
(ii) Enunciato e dimostrazione del teorema topologico di Lyapunov per la stabilità semplice.
(iii) Sia f un diffeomorfismo $C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Dimostrare che l'unico equilibrio x_E dell'equazione differenziale $\dot{x} = X(x)$, con $X(x) := -[f'(x)]^{-1} f(x)$ è asintoticamente stabile in DUE modi diversi: con il primo metodo spettrale e poi con l'uso di una opportuna funzione di Lyapunov. Perché "unico"?

2

In un sistema di riferimento Oxy, con y verticale ascendente, un disco omogeneo di massa m e raggio R ha centro vincolato all'asse delle y. Una molla di costante elastica k è fissata ad un punto P del bordo del disco. L'altro capo della molla è attaccato all'origine del sistema di riferimento. Sul sistema agisce la gravità. Si scelgano come coordinate Lagrangiane y, la coordinata del centro di massa G, e ϑ, l'angolo tra il segmento GP e l'asse delle x (vedi figura).
a. *Si scriva la Lagrangiana del sistema (il momento di inerzia di un disco è $I_G = \frac{m}{2}R^2$).*
b. *Si determinino tutti gli equilibri e si studi la stabilità solo degli equilibri con $y \neq 0$.*
c. *Assumendo che $k = 2\frac{mg}{R}$, si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni all'equilibrio che è stabile per qualsiasi scelta dei parametri.*



3

(i) Dimostrare che la mappa

$$C^\infty(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R}), \{\cdot, \cdot\} \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^{2N}; \mathbb{R}^{2N}), [\cdot, \cdot]$$

$$H(\cdot) \longmapsto \mathbb{E}\nabla H(\cdot)$$

è un anti-morfismo d'agebra.
(ii) E' vero che le parentesi $\{\cdot, \cdot\}$ sono invarianti per trasformazioni canoniche? Che ruolo gioca la valenza in questa invarianza?

SOLUZIONI

Per scrivere il problema linearizzato dobbiamo calcolare $X'(x_E)$.
$X(x) = -[f'(x)]^{-1} f(x)$,
$f'(x)X(x) = -f(x)$, $f''X + f'X' = -f'$,
$X' = [f'(x)]^{-1}(-f' + f''[f'(x)]^{-1} f)$,
$f(x_E) = 0$ onde: $X'(x_E) = -\mathbb{I}$. Il sistema linearizzato, nelle variabili y di deviazione dall'equ. $y := x - x_E$, è: $\dot{y} = -y$.
La funzione di Lyapunov è $W(x) = |f(x)|^2$ (cf. dispensa).
Il p.to d'equilibrio è unico perché in corrispondenza ad esso $f(x_E) = 0$ e dato che f è un diffeomorfismo assume lo zero in un unico punto.

– – – – –

a. I punti e gli atti di moto rilevanti per il sistema sono

$$OP = (R\cos\vartheta, y + R\sin\vartheta), \qquad OG = (0, y), \qquad \dot{OG} = (0, \dot{y}).$$

L'energia cinetica del sistema è $T = \frac{1}{2}m|v_G|^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$. In questo caso il primo termine diventa semplicemente $\frac{1}{2}m\dot{y}^2$, mentre la velocità angolare è $\dot{\vartheta}e_3$ e quindi il secondo termine è $\frac{1}{2}\frac{m}{2}R^2\dot{\vartheta}^2$. Quindi

$$\boxed{T(y, \vartheta, \dot{y}, \dot{\vartheta}) = \tfrac{1}{2}m\Big(\dot{y}^2 + \tfrac{R^2}{2}\dot{\vartheta}^2\Big)}$$

I potenziali in gioco sono quello gravitazionale e quello della molla. $V = V_g + V_k = mgy_G + \frac{k}{2}|OP|^2 = mgy + \frac{k}{2}\Big((R\cos\vartheta)^2 + (y + R\sin\vartheta)^2\Big)$. Un conto, a meno di costante, porge

$$\boxed{V(x, y, \vartheta) = mgy + \tfrac{k}{2}(y^2 + 2Ry\sin\vartheta)}$$

La Lagrangiana è $L = T - V$.

b. Per determinare gli equilibri bisogna studiare il gradiente del potenziale

$$\nabla V = \begin{pmatrix} mg+ky+kR\sin\vartheta \\ kRy\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

La seconda equazione porge o la soluzione $\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}$ oppure $y = 0$.

Nel secondo caso si ha che $\sin\vartheta = -\frac{mg}{kR}$, che porge due soluzioni, $-\frac{\pi}{2} \pm \bar{\vartheta}$ se $\frac{mg}{kR} < 1$, una soluzione $\frac{\pi}{2}$ se $\frac{mg}{kR} = 1$ e nessuna se $\frac{mg}{kR} > 1$.

Nel primo caso invece si ha che $y = -\frac{mg}{k} \mp R$. Oltre ai due eventuali equilibri con $y = 0$ si hanno gli equilibri $(-\frac{mg}{k} - R, \frac{\pi}{2})$ e $(-\frac{mg}{k} + R, -\frac{\pi}{2})$.

Per studiare la stabilità degli equilibri usiamo il teorema della Hessiana non degenere. La matrice Hessiana di V è

$$HV = \begin{pmatrix} k & kR\cos\vartheta \\ kR\cos\vartheta & -kRy\sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

Calcolata negli equilibri con $y \neq 0$ si ha

$$HV(-\frac{mg}{k} - R, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & kR(\frac{mg}{k}+R) \end{pmatrix}.$$

che è definita positiva, quindi l'equilibrio $(-\frac{mg}{k} - R, \frac{\pi}{2})$ $\boxed{\text{è stabile}}$, e

$$HV(-\frac{mg}{k} + R, -\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & kR(-\frac{mg}{k}+R) \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha un autovalore negativo se e solo se $R - \frac{mg}{k} < 0$, ovvero quando $1 < \frac{mg}{kR}$ allora l'equilibrio $\boxed{(-\frac{mg}{k} + R, -\frac{\pi}{2}) \text{ è instabile}}$. Nel caso invece in cui $1 > \frac{mg}{kR}$ allora l'equilibrio $\boxed{(-\frac{mg}{k} + R, -\frac{\pi}{2}) \text{ è stabile}}$.

c. L'equilibrio che è sempre stabile indipendentemente dai parametri è $(-\frac{mg}{k} - R, \frac{\pi}{2})$. Assumendo che $k = 2\frac{mg}{R}$ si ha che la matrice Hessiana di V all'equilibrio diventa

$$HessV = \begin{pmatrix} 2\frac{mg}{R} & 0 \\ 0 & 3mgR \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico da calcolare è

$$\det\left[\begin{pmatrix} 2\frac{mg}{R} & 0 \\ 0 & 3mgR \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}\right]$$

Le matrici sono a blocchi e porgono $\omega = \sqrt{2\frac{g}{R}}$ e $\omega = \sqrt{6\frac{g}{R}}$. □