Soluzione di 1.1 $\qquad (1+1+4+3+2+1+\underline{3}=15)$

a1) Sia $z=(x,v)$. Si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = 2ax - 4bx^3 \end{cases}$$

a2) Essendo un sistema 1-dim. conservativo, c'è l'integrale primo dell'energia $E(x,v) = \frac{1}{2}v^2 \underbrace{- ax^2 + bx^4}_{+V(x)}$

a3) Gli equilibri sono $P_1 = (0,0)$, $P_2 = \left(\sqrt{\frac{a}{2b}}, 0\right)$ e $P_3 = \left(-\sqrt{\frac{a}{2b}}, 0\right)$.

Uso il metodo spettrale. Sia $\dot{z} = A_i(z - P_i)$ la linearizzazione attorno a P_i. Si trova subito che

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4a & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori della matrice A_1 sono $\pm\sqrt{2a} \Rightarrow P_1$ è p.to di eq. instabile.

Gli autovalori della matrice A_2 sono $\pm 2i\sqrt{a} \Rightarrow$ il metodo spettrale non dice nulla sulla stabilità di P_2 e P_3.

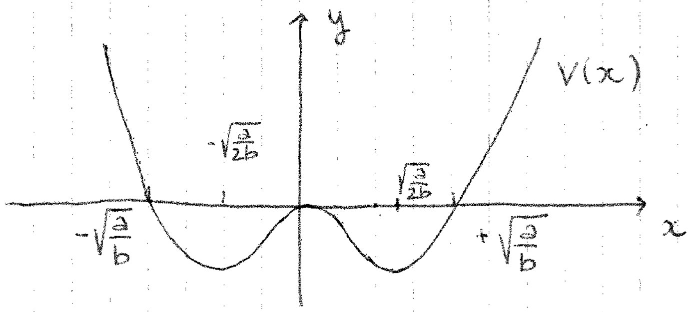
Uso il metodo della f. di Lyapunov. I p.ti P_i ($i=1\dots3$) sono estremali per la funzione $E(x,v)$. La matrice Hessiana di $E(x,v)$ è

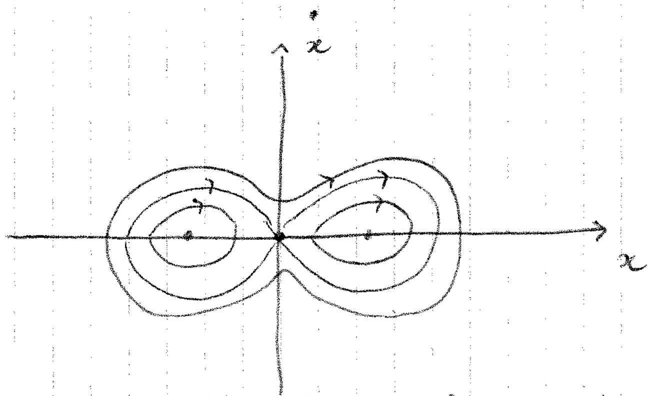
$$\text{Hess}\, E(x,v) = \begin{pmatrix} -2a + 12bx^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservo che $\det \text{Hess}\, E(P_{2,3}) = 4a > 0$ e che $\text{Hess}_{11}\, E(P_2, P_3) = 4a > 0 \Rightarrow P_{2,3}$ sono p.ti di minimo per $E(x,v)$. Conseguentemente,

$\tilde{E}(x,v) = E(x,v) - E(P_{2,3})$ è una funzione di Lyapunov per P_2 e per P_3, che quindi risultano p.ti di equilibrio stabile.

(a4) Ritratto in fase.





Tutti i dati iniziali danno luogo ad orbite periodiche, tranne la separatrice $\Rightarrow \Pi = \mathbb{R}^2 \setminus$ "separatrice"

$\downarrow$

corrisponde a $E = 0$.

(a5) Uso la cons. dell'energia. (Trattazione generale, non richiesta)

$$\frac{1}{2}v^2 - ax^2 + bx^4 = E\left(\sqrt{\frac{a}{4b}}, 0\right) = -\frac{3a^2}{16b} \quad \text{Quindi}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2(ax^2 - bx^4) - \frac{6a^2}{16b}$$

"Scelgo" il segno +:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2(ax^2-bx^4) - \frac{3a^2}{8b}} \Rightarrow T = 2\int_{\sqrt{\frac{a}{4b}}}^{\sqrt{3a/4b}} \frac{dx}{\sqrt{2(ax^2-bx^4) - \frac{3a^2}{8b}}}$$

N.B. il pto $\sqrt{\frac{a}{4b}}$ si trova risolvendo

$E(x,0) = -3a^2/16b$

In particolare, per $a=b=1$, si ottiene:

$$T = 2\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{2(x^2-x^4) - 3/8}}$$

a6) $\ddot{x} = 2ax - 4bx^3 - x^2\dot{x} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = 2ax - 4bx^3 - x^2 v \end{cases}$$

La matrice 2×2 del problema linearizzato è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2a & 0 \end{pmatrix}$

con autovalori $\pm\sqrt{2a}$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ rimane punto di equilibrio

instabile anche per il sistema non lineare.