Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
Terzo appello del 9 settembre 2016
Durata: 2 ore e 45 minuti

Attenzione: Consegnate DUE soli fogli (protocollo bianchi, a 4 facciate), su entrambi scrivete chiaramente cognome e nome. Sul primo risolvete la PARTE 1., sul secondo risolvete la PARTE 2. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1.

1.1. Si consideri l'equazione differenziale lineare del 2° ordine che descrive il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto all'azione di una forza posizionale di potenziale

$$V(x) = -ax^2 + bx^4, \qquad a, b > 0$$

Il moto è descritto dall'equazione di Newton:

$$\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}(x), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$a1)$ Si riconduca (1) ad un sistema dinamico del 1° ordine.

$a2)$ Si determini un integrale primo.

$a3)$ Si determinino i punti di equilibrio e si discuta la loro stabilità (con il metodo che si ritiene più opportuno).

$a4)$ Si tracci il ritratto in fase e si determini l'insieme Π dei dati iniziali che danno luogo ad orbite periodiche.

$a5)$ Sia $a = b = 1$. Si scriva come integrale definito (senza svolgere l'integrale) il periodo dell'orbita con dato iniziale $(1/2, 0)$.

$a6)$ Si consideri l'equazione differenziale non lineare del 2° ordine:

$$\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}(x) - x^2\dot{x}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

La natura dell'equilibrio $(0, 0)$ cambia oppure no? Motivare adeguatamente la risposta.

1.2. Definire il flusso di un campo vettoriale completo. Quali proprietà ha?

2.

Nel piano Oxy di un riferimento inerziale $Oxyz$, con y diretto in senso contrario alla gravita', giace una guida rettilinea liscia passante per l'origine e formante un angolo di $\pi/4$ con la direzione positiva dell'asse x. Sia s l'ascissa sulla guida orientata con verso positivo concorde a quello dell'asse x. Una lamina omogenea quadrata di massa m e lato $2l$ ha il baricentro G vincolato a scorrere lungo la guida, rimanendo nel piano verticale Oxy. Si riferisca la posizione della lamina all'ascissa $s = s_G$ del baricentro e all'angolo θ tra la guida e il segmento AB avente come estremi due punti medi di lati opposti del quadrato (vedi figura). Oltre alla gravita' sul sistema agisce una molla di costante elastica h tesa tra l'origine e il punto A del quadrato.

$b1)$ Si scriva l'energia potenziale del sistema, si determinino le configurazioni di equilibrio e la loro stabilita' al variare del parametro $\lambda = mg\sqrt{2}/2hl$.

$b2)$ Si scriva l'energia cinetica del sistema e le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una configurazione di equlibrio stabile.

$b3)$ Si supponga ora che il riferimento $Oxyz$ ruoti con velocita' angolare costante diretta come l'asse y rispetto ad un riferimento inerziale. Si calcoli il potenziale delle forze apparenti di tipo conservativo e le componenti lagrangiane della sollecitazione per quelle non conservative.

$b4)$ Si scriva l'Hamiltoniana associata alla Lagrangiana del sistema.

2.1. Enunciato e dimostrazione del teorema di Noether in Meccanica

Soluzione es 1.

a) L'energia potenziale e' la somma del potenziale elastico e quello gravitazionale

$$U(s,\theta) = mg\frac{\sqrt{2}}{2}s + \frac{h}{2}(s^2 + l^2 - 2ls\cos\theta)$$

Le configurazioni di equilibrio annullano il gradiente del potenziale

$$\begin{cases} U_s &= mg\frac{\sqrt{2}}{2} + hs - hl\cos\theta = 0 \\ U_\theta &= hls\sin\theta = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ha soluzioni per $\sin\theta = 0$ oppure per $s = 0$. Dalla prima equazione

$$s = l(\cos\theta - \lambda)$$

Quindi per $s\sin\theta = 0$ abbiamo le due soluzioni $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$ e le due configurazioni di equilibrio

$$P_1 = (l(1-\lambda), 0) \qquad P_2 = (-l(1+\lambda), \pi)$$

mentre per $s = 0$ abbiamo le soluzioni $\theta_{3,4} = \pm\arccos(\lambda)$ se $\lambda \leq 1$ e quindi gli equilibri

$$P_3 = (0, \arccos\lambda) \qquad P_4 = (0), -\arccos\lambda)$$

Per la stabilita' (sole forze conservative) possiamo usare THND. La matrice Hessiana vale

$$H_U(s,\theta) = \begin{pmatrix} h & hl\sin\theta \\ hl\sin\theta & hls\cos\theta \end{pmatrix}$$

In tutti gli equilibri il primo minore e' positivo. Si ha quindi stabilita' se e solo se $\det H_U(P) > 0$. Si ha allora

$$\det H_U(P_1) = h^2l^2(1-\lambda), \qquad \det H_U(P_2) = -h^2l^2(1+\lambda), \qquad \det H_U(P_{3,4}) = -h^2l^2\sin^2\theta_{eq}$$

Quindi solo P_1 e' stabile quando $\lambda < 1$ mentre per $\lambda > 1$ e' instabile; le configurazioni di equilibrio $P_{3,4}$ sono sempre instabili mentre P_2 e' sempre stabile.

b) L'energia cinetica si calcola con il teorema di Konig

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\omega \cdot I_G^z\omega = \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2$$

quind la matrice dell'energia cinetica e' diagonale e vale $A = Diag[m, 2ml^2/3]$. Le frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione stabile P_1 sono le soluzioni di $\det(H_U(P_1) - \omega^2 A) = 0$ e quindi facilmente

$$\omega_1^2 = \frac{h}{m}, \qquad \omega_2^2 = \frac{3h}{2m}(1-\lambda), \qquad (\lambda < 1)$$

c) Nel caso di sistema rotante, bisogna aggiungere le forze di Coriolis e Centrifuga. Le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono nulle perche' i vettori ω, v e w (velocita' virtuale) sono complanari. La forza centrifuga, conservativa, ha potenziale (usando il Teorema di Steiner)

$$U^{cf} = -\frac{\omega^2}{2}I_O^y = -\frac{\omega^2}{2}[ms^2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + I_G^y]$$

La matrice d'inerzia rispetto al baricentro vale $I_G = Diag[ml^3/3, ml^2/3, 2ml^2/3]$ e $I_G^y = \hat{y} \cdot I_G\hat{y}$ ove $\hat{y}$ e' il versore dell'asse y, che ha componenti nella base principale d'inerzia $\hat{y} = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ quindi

$$I_G^y = \frac{ml^2}{3}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{ml^2}{3}$$

d) La lagrangiana e' del tipo $L = T - U$ quindi l'Hamiltoniana e' del tipo $H = T + U = \frac{1}{2}A^{-1}p \cdot p + U$. Essendo la matrice cinetica diagonale, la sua inversa si calcola senza difficolta'.