Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
ore 10:00 — 21 Agosto 2017
Durata: 2:30 ore

Attenzione: Riconsegnerete DUE fogli (protocollo bianco, a 4 facciate), scriverete chiaramente cognome e nome, data e NUMERO (1 e 2) ben in vista, su ciascuno. Non riconsegnate questo foglio nè brutte copie. Potrete uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

1.1 Un punto materiale P di massa m è vincolato sulla superficie paraboloidale

$$z = z(x,y) = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2), \qquad b > a > 0.$$

associata ad un riferimento $Oxyz$ solidale ad uno spazio cinematico uniformemente rotante rispetto agli spazi inerziali con velocità angolare

$$\underline{\omega} = \omega\,\hat{z}.$$

L'asse z è verticale ascendente: $\underline{g} = -g\,\hat{z}, \quad g > 0$.

Scrivere le varie Componenti Lagrangiane delle Sollecitazioni non posizionali (le Q_x e Q_y), l'energia potenziale di quelle posizionali conservative in gioco; scrivere l'energia cinetica, in particolare, metterne in evidenza la matrice cinetica (2×2):

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{xx} & \tilde{a}_{xy} \\ \tilde{a}_{yx} & \tilde{a}_{yy} \end{pmatrix}$$

Determinare le condizioni sui dati strutturali definenti tale sistema meccanico (cioè: m, g, a, b, ω) affinché sussista un equilibrio *stabile*. Riusciamo per questo sistema meccanico a dare condizioni di instabilità?

Successivamente, nel caso di presenza di viscosità $\underline{\mathbf{F}}^v = -k\,\dot{OP}, \quad k > 0$, dire se le condizioni sopra appena determinate sono ancora valide per la stabilità.

1.2 Si consideri l'equazione differenziale del *primo* ordine in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y - x^3 \\ \dot{y} &= x - y^3 \end{cases}$$

Studiare la possibile stabilità (semplice o asintotica) dell'equilibrio $(0,0)$ usando una delle seguenti funzioni, candidate f. di Lyapunov:

$$W_1(x,y) = x^2 - y^2, \qquad W_2(x,y) = x^2 + y^2, \qquad W_3(x,y) = x^3 + y^3.$$

1.3 Descrivere il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la determinazione delle Reazioni Vincolari per i sistemi olonomi (p.e., con vincoli dati da zeri di funzioni) e senza attrito (lisci).

2

2.1 Descrizione dei moti rigidi alla Poinsot.

2.2 Siano date due funzioni Hamiltoniane $H, K : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ con la proprietà $\{H, K\} = 0$, è vero o falso che i flussi associati alle equazioni differenziali relative ai due rispettivi campi vettoriali Hamiltoniani X_H e X_K commutano: $\Phi^t_{X_H} \circ \Phi^s_{X_K} = \Phi^s_{X_K} \circ \Phi^t_{X_H}$? Un cenno di spiegazione?

Soluzioni

Soluzione 1.1:

Parametri Lagrangiani : $(q_1, q_2) = (x, y)$

Energia Cinetica $T(x,y,\dot x,\dot y) = \frac{1}{2} m\left[\dot x^2 + \dot y^2 + (a x \dot x + b y \dot y)^2\right] =$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} m(1+a^2x^2) & mabxy \\ mabxy & m(1+b^2y^2)\end{pmatrix}}_{\text{matrice cinetica } \underset{\sim}{a}(x,y)} \begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U}^{(\text{gravità})}(x,y) = \frac{mg}{2}(a x^2 + b y^2), \quad \mathcal{U}^{(\text{centr.})}(x,y) = -\frac{m}{2}\omega^2(x^2+y^2)$$

$$d\mathcal{L}^{(\text{Coriolis})}\Big|_{\text{parabol.}} = -2m\underline{\omega} \times \begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ a x\dot x + b y \dot y\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx\\ dy\\ a x\, dx + b y\, dy\end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} dx & dy & a x\, dx + b y\, dy\\ 0 & 0 & -2m\omega\\ \dot x & \dot y & a x \dot x + b y \dot y\end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+2}(-2m\omega)(\dot y\, dx - \dot x\, dy),$$

$$= \underbrace{2m\omega\dot y}_{Q_x^{(\text{Coriolis})}}\, dx \underbrace{- 2m\omega\dot x}_{Q_y^{(\text{Coriolis})}}\, dy .$$

Equilibri : per $\dot x = 0 = \dot y$, sono i punti critici di $\mathcal{U}^{(\text{gravità})} + \mathcal{U}^{(\text{centr.})}$,

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = m(ga - \omega^2)x \\ 0 = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = m(gb - \omega^2)y \end{cases} \qquad \nabla^2\mathcal{U}(0,0) = \begin{pmatrix} m(ga-\omega^2) & 0 \\ 0 & m(gb-\omega^2)\end{pmatrix}$$

per $ga \neq \omega^2$ & $gb \neq \omega^2$ $\exists! \, (x_E, y_E) = (0,0)$.

Dato che ci sono comp. Lagr. non posizionali (Coriolis), si può (solo) usare Lagrange-Dirichlet : $(0,0)$ è min. loc. per $\mathcal{U}$ se $\nabla^2\mathcal{U}(0,0)$ è def. pos: $(*)\begin{cases} ga > \omega^2, \\ gb > \omega^2. \end{cases}$

Non si può usare THND.

Nel caso di ulteriore presenza di $\underline{F}$. dissipative, per L-D la stabilità offerta dalle $(*)$ è ancora garantita.

Chiaramente, la potenza della forza viscosa sarà comunque ≤ 0.

Soluzione 1.2: L'unica def. pos. è la W_2 e la sua derivata di Lie vale

$$L_X W_2 = -2(x^4 + y^4)$$

che è def. neg., pertanto l'equilibrio $(0, 0)$ è *asintoticamente* stabile.

Soluzione 1.3: vedere dispensa.

Soluzione 2.1: vedere dispensa.

Soluzione 2.2: In programma c'era da sapere due cose:
1) $X_{\{H,K\}} = -[X_H, X_K]$
2) i flussi di due campi vettoriali generici X e Y (non necessariamente Hamiltoniani) commutano, cioè $\Phi_X^t \circ \Phi_Y^s = \Phi_Y^s \circ \Phi_X^t$, se e solo se il campo vettoriale 'parentesi di Lie' $[X, Y]$ è identicamente nullo.

Ora, se noi abbiamo che le parentesi di Poisson $\{H, K\}$ sono la funzione nulla, allora $X_{\{H,K\}} = 0$ e da 1) segue la tesi.