Attenzione: Consegnate DUE soli fogli (protocollo bianchi, a 4 facciate), su entrambi scrivete chiaramente cognome e nome. Sul primo risolvete la PARTE 1., sul secondo risolvete la PARTE 2. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1.

1.1. Sia $f(x) = (x^2 - 1)(x + 2)^2$.

a) Si consideri l'equazione differenziale
$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
Si tracci il ritratto in fase, specificando la natura degli equilibri.

b) Si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} = -f'(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

*b*1) Si determinino tutti i punti di equilibrio e si linearizzi l'equazione attorno ad un equilibrio.

*b*2) Si tracci il ritratto in fase.

*b*3) Si ombreggi nel piano delle fasi l'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche, specificando se il bordo di tale insieme è incluso oppure no.

*b*4) Per il valore dell'energia $E = 0$, esiste un moto periodico. Si scriva l'integrale definito che fornisce il periodo dell'orbita corrispondente (non è richiesto il calcolo esplicito).

1.2. Dare le nozioni di Lyapunov stabilità e di asintotica stabilità.

2.

2.1. Nel piano verticale Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse y verticale ascendente, si consideri il sistema soggetto a gravità costituito da un punto materiale P di massa m vincolato in modo liscio a scorrere sulla guida liscia di equazione $y = f(x) = x^3 - x$. Si prenda come coordinata lagrangiana del punto la sua ascissa x di modo che $OP(x) = (x, f(x))$. Il sistema di riferimento $Oxyz$ ruota con velocità angolare costante ω diretta come l'asse verticale y.

a) Scrivere l'energia potenziale del sistema, l'energia cinetica, la lagrangiana del sistema nel riferimento rotante e calcolare la componente lagrangiana della forza di Coriolis.

b) Si supponga ora che in luogo del punto P vi sia un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza l contenuta nel piano Oxy e con il baricentro G libero di scorrere sulla guida. Si riferisca la posizione dell'asta AB alla ascissa x del suo baricentro e all'angolo θ tra la direzione positiva dell'asse y l'asta AB, valutato positivamente in senso orario. Scrivere la nuova energia cinetica e potenziale del sistema nel riferimento rotante. Si studi la stabilità degli equilibri nel sistema rotante giustificando i risultati con i teoremi visti nel corso.

c) Si supponga ora che $\omega = 0$, il punto P è di nuovo presente sulla guida mentre l'asta AB ha il baricentro vincolato a scorrere sull'asse orizzontale x. Si riferisca la posizione dell'asta alle coordinate $s = x_G$, θ definito sopra, e il punto a $x = x_P$. Si scriva l'energia cinetica e potenziale del nuovo sistema. Quali sono gli integrali primi del nuovo sistema? Che interpretazione fisica hanno?

2.2. Rispondere in modo esauriente a una delle domande seguenti:

a) Trasformata di Legendre e equivalenza tra equazioni di Lagrange e di Hamilton

b) Relazione tra moti spontanei e geodetiche su superficie bidimensionale liscia.

Correzione Primo Appello del 17 Giugno 2016

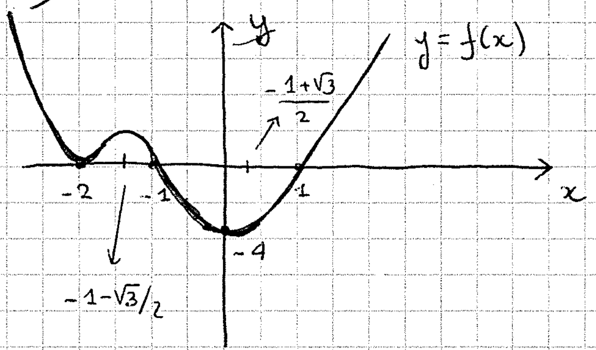
1.1 Sia $f(x) = (x^2-1)(x+2)^2$.

a) Si consideri l'equazione differenziale

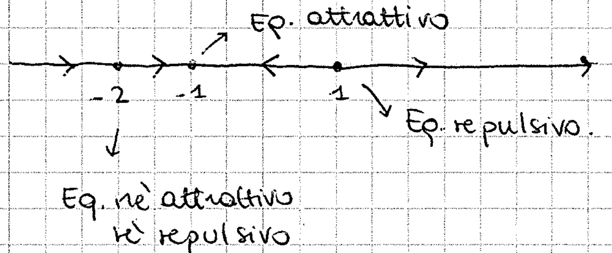
$\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Si tracci il ritratto in fase, specificando la natura degli equilibri.

Sol l'andamento di f è il seguente.



Ci sono conseguentemente tre equilibri: ± 1 e -2. Il ritratto in fase è quello riportato sotto.



b) Si consideri l'equazione differenziale

$\ddot{x} = -f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b1) Si determinino tutti i p.ti di equilibrio e si linearizzi l'equazione attorno ad un equilibrio.

$\ddot{x} = -f'(x)$ $\rightsquigarrow$ Al primo ordine $\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -f'(x) \end{cases}$ Quindi calcolo

$$J(x,v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f''(x) & 0 \end{pmatrix}$$

$$f'(x) = \underbrace{2x}(\underbrace{x+2})^2 + 2(\underbrace{x+2})(x^2-1) = 2(x+2)[x(x+2)+x^2-1] =$$

$$= 2(x+2)[2x^2+2x-1] = 0 \iff x = -2 \text{ o } x = -1 \pm \sqrt{3}/2$$

$$f''(x) = 2(2x^2+2x-1) + 2(x+2)(4x+2) =$$

$$= 2(2x^2+2x-1) + 4(x+2)(2x+1)$$

Quindi gli equilibri sono $(-2,0)$, $(-1+\sqrt{3}/2, 0)$ e $(-1-\sqrt{3}/2, 0)$

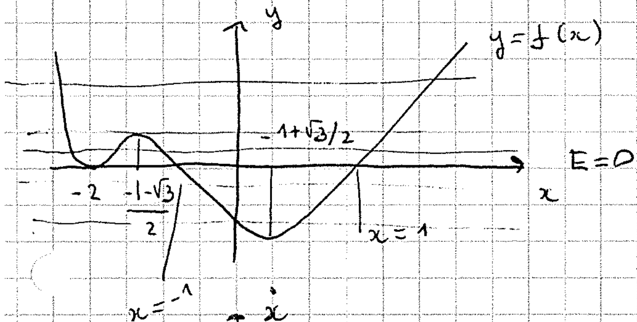
Linearizzo attorno a $(-2,0)$.

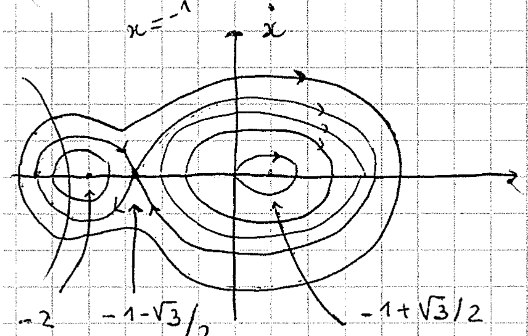
$$J(-2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f''(-2) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -6(x+2) \end{cases}$$

b2) Si tracci il ritratto in fase.

Usiamo la conservazione dell'energia





$E=0 \Rightarrow x = \pm 1$ sono le intersezioni dell'orbita corrispondente con l'asse x.

b3) Si ombreggi nel piano delle fasi l'insieme dei dati iniziali che generano orbite periodiche. Tale insieme è tutto $\mathbb{R}^2$ esclusa la separatrice, basta guardare la soluzione del pto b2)

b4) Per il valore dell'energia $E = 0$, esiste un moto periodico. Si scriva l'integrale definito che fornisce il periodo dell'orbita corrispondente.

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + f(x) = 0 \Rightarrow \dot{x}^2 = -2f(x) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{-2f(x)}$$

Integro per parti.

$$\underbrace{T/2}_{\text{SEMIPERIODO}} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{-2f(x)}}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{-2(x^2-1)(x+2)^2}}\,dx$$

Equivalentemente, se si sceglie di percorrere la parte di orbita periodica nel semipiano $\dot{x} \leq 0$ dello spazio delle fasi:

$$T/2 = \int_{1}^{-1} \frac{-1}{\sqrt{-2f(x)}}\,dx.$$

Soluzione es 2.

a) L' energia potenziale è la somma dell'energia gravitazionale e di quella centrifuga

$$U = U^g + U^{cf} = mgf(x) - \frac{m\omega^2}{2}x^2 = mg(x^3 - x) - \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}mv_P^2 = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2] = \frac{1}{2}m(1 + f'(x)^2)\dot{x}^2$$

mentre la lagrangiana è $L = T - U$. La componente Lagrangiana della forza di Coriolis $f = -2m\omega \times v_P$ è nulla perchè i vettori ω, v_P, w sono complanari.

b) Se ora consideriamo l'asta AB, il potenziale gravitazionale non cambia, mentre a quello centrifugo dobbiamo aggiungere il termine del Teorema di Steiner

$$-\frac{1}{2}\frac{\omega^2 ml^2}{12}\sin^2\theta$$

mentre all'energia cinetica dobbiamo aggiungere il termine del T di Konig

$$\frac{1}{2}\omega I_G \omega = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2$$

Per il potenziale si ha quindi

$$U(x,\theta) = U(x) + U(\theta) = mg(x^3 - x) - \frac{m\omega^2}{2}x^2 - \frac{1}{2}\frac{\omega^2 ml^2}{12}\sin^2\theta$$

Gli equilibri sono quindi i punti ove $U'(x) = U'(\theta) = 0$ i.e. ove

$$U'(x) = mg(3x^2 - 1) - m\omega^2 x = m[3gx^2 - \omega^2 x - g] = 0, \quad U'(\theta) = -\frac{1}{2}\frac{\omega^2 ml^2}{12}\sin\theta\cos\theta = 0$$

La funzione $U'(x)$ è una parabola con concavità verso l'alto e $\Delta = b^2 - 4ac = \omega^4 + 12g^2 > 0$. Vi sono quindi due radici reali x_1 e x_2, con $x_1 < x_2$. Dallo studio del segno di $U'(x)$ si vede che x_1 è un massimo locale (quindi $U''(x_1) < 0$) mentre x_2 è un minimo (quindi $U''(x_2) > 0$). Inoltre $U'(\theta)$ è nulla per $\theta = k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$. La matrice hessiana è diagonale

$$H_U(x,\theta) = Diag[U''(x), U''(\theta)] = Diag[m(6gx - \omega^2), \frac{1}{2}\frac{\omega^2 ml^2}{12}(2\sin^2\theta - 1)]$$

Quindi, per THND, un equilibrio è stabile se e solo se $U''(x) > 0, U''(\theta) > 0$. Gli equilibri stabili sono quindi $(x_2, \pi/2)$ e $(x_2, 3\pi/2)$, gli altri sono instabili.

c) L'energia cinetica del punto è quella del punto a) mentre l'energia cinetica dell'asta è

$$T_{AB} = \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2$$

L'energia potenziale del sistema è la sola energia gravitazionale del punto. Quindi L è

$$L = T_P + T_{AB} - U^g = \frac{1}{2}m(1 + f'(x)^2)\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2 - mgf(x)$$

La lagrangiana quindi non dipende dalle coordinate s e θ. Vi sono quindi, oltre ad $E = T + U$ due integrali primi di ciclicità, corrispondenti alla quantità di moto dell'asta ($m\dot{s}$) e al momento della quantità di moto dell'asta rispetto al baricentro ($ml^2\dot{\theta}/12$).