Attenzione: Consegnate DUE soli fogli (protocollo bianchi, a 4 facciate), su entrambi scrivete chiaramente cognome e nome. Sul primo risolvete la PARTE 1., sul secondo risolvete la PARTE 2. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1.

1.1. Si consideri l'equazione differenziale lineare del 2° ordine che descrive il moto di un punto materiale di massa m vincolato in modo liscio a muoversi lungo l'asse x di un riferimento inerziale $Oxyz$ sottoposto all'azione di una forza posizionale di potenziale

$$V(x) = x^2 e^{-x}$$

$a1)$ Si determini un integrale primo.

$a2)$ Si determinino i punti di equilibrio e si discuta la loro stabilità giustificandola con i teoremi visti nel corso

$a3)$ Si tracci il ritratto in fase e si definisca l'insieme $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ dei dati iniziali che danno luogo ad orbite periodiche.

$a4)$ Si supponga ora che il riferimento $Oxyz$ ruoti con velocità angolare costante ω diretta come l'asse y. Indagare la stabilità degli equilibri trovati al punto $a2)$ al variare di ω. Giustificare i risultati

$a5)$ Si consideri l'equazione differenziale non lineare del 2° ordine:

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}(x) - x^2\dot{x}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Dire se $W(x,v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$ è funzione di Lyapunov per la stabilità asintotica dell'equilibrio $(x,v) = (0,0)$. Motivare adeguatamente la risposta.

1.2. Scrivere le definizioni di equilibrio stabile e di equilibrio asintoticamente stabile. Enunciare il primo metodo di Lyapunov, o metodo spettrale, per la stabilità degli equilibri di $\dot{x} = X(x)$.

2.

2.1. Un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito sull'asse orizzontale x di un sistema di riferimento $Oxyz$ con y verticale ascendente: $\underline{g} = (0, -g, 0)$. Una molla di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica $h > 0$ è tesa tra O e P. Il punto P è inoltre estremità di una sbarretta di massa trascurabile di lunghezza L. Nell'altra estremità della sbarretta è vincolato un punto materiale Q anch'esso di massa m. Considerare quali parametri Lagrangiani x di P e l'angolo φ in figura.
Determinare *esplicitamente* le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno ad un equilibrio stabile.

2.2. Principio Variazionale di Hamilton, enunciato e dimostrazione.

Soluzione di **1.1**. il moto del punto è retto dall'equazione $m\ddot{x} = -v'(x)$,che riduciamo al primo ordine. Dalla teoria sappiamo che l'energia totale $E(x,v) = mv^2/2 + V(x)$ è un integrale primo.

Le configurazioni di equilibrio sono i punti critici del potenziale, ovvero le soluzioni di $V'(x) = 0$. L'equazione

$$V'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$$

ha soluzioni $x = 0$ e $x = 2$. Dallo studio del grafico del potenziale si ha

$$V''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2), \qquad V''(0) = 2, \qquad V''(2) = -2e^{-2}$$

Quindi $x = 0$ e' un minimo e $x = 2$ è un massimo. Essendo il sistema soggetto a sole forze conservative, per il teorema di Lagrange Dirichlet, i minimi del potenziale sono stabili. Alternativamente, possiamo usare come funzione di Lyapunov per la stabilità semplice l'integrale primo $E(x,v)$. Per il punto $x = 2$ non possiamo usare il T di Lyapunov ne il T di Lagrange-Dirichlet. Usiamo il metodo spettrale. La matrice del sistema linearizzato valutata nell'equilibrio è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -m^{-1}V''(2) & 0 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori $\lambda = \pm\sqrt{-m^{-1}V''(2)}$. Abbiamo quindi un autovalore con parte reale positiva e pertanto l'equilibrio $x = 2$ è instabile.

$a3$) Tracciato il ritratto in fase, si vede che i moti periodici corrispondono a moti con energia totale strettamente inferiore a $V(2) = 4e^{-2}$, valore corrispondente alla separatrice. Pertanto

$$\Sigma = \{(x,v) : \frac{mv^2}{2} + V(x) < 4e^{-2}\}.$$

$a4$) Se il sistema ruota attorno all'asse y dobbiamo tener conto delle forze apparenti, Coriolis e Centrifuga. la prima è nulla negli equilibri e ha componenti lagrangiane nulle per un sistema uno-dimensionale. Abbiamo quindi sole forze conservative; il potenziale complessivo è

$$U(x) = V(x) + U^{cf}(x) = V(x) - \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

Gli equilibri si trovano imponendo

$$U'(x) = V'(x) - m\omega^2 x = 0$$

Si vede che $x = 0$ è ancora equilibrio mentre $x = 2$ non lo è più. Tale equilibrio è stabile se

$$U''(0) = V''(0) - m\omega^2 > 0, \qquad \omega^2 < 2/m$$

per il Teorema di Lyapunov o il TLD, mentre è instabile se $\omega^2 > 2/m$ per il teorema spettrale. Il caso $\omega^2 = 2/m$ si indaga con lo studio delle derivate successive del potenziale.

$a5$) la funzione proposta è di Lyapunov per la stabilità semplice ma non per quella asintotica. Infatti

$$L_X W = \dot{E} = -x^2\dot{x}^2 \leq 0$$

ma non è vero che $L_X W < 0$ in un intorno 'forato' dell'equilibrio $(0,0)$.

Soluzione di **2.1**.

$$x_P = x, \qquad y_P = 0,$$
$$x_Q = x + L\ \sin\varphi, \qquad y_Q = -L\ \cos\varphi.$$

$$U(x,\varphi) = \frac{h}{2}x^2 - mgL\cos\varphi.$$

$$T(x,\dot{x},\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + L\cos\varphi\dot{\varphi})^2 + (L\sin\varphi\dot{\varphi})^2] =$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2m & mL\cos\varphi \\ mL\cos\varphi & mL^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix}$$

Matrice cinetica: $a_{ij}(x,\varphi)$. Equilibri:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial U}{\partial x} = hx, \\ 0 &= \frac{\partial U}{\partial \varphi} = mgL\sin\varphi \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ (0,0),\quad (0,\pi).$

$$\nabla^2 U(x,\varphi) = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & mgL\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Si può applicare il teorema dell'Hessiano non-degenere: $\det \nabla^2 U(x,\varphi)(0,0) \neq 0, \quad \det \nabla^2 U(x,\varphi)(0,\pi) \neq 0,$

$$\det \nabla^2 U(x,\varphi)(0,0) \text{ è def. pos.} \Rightarrow \ (0,0) \ \text{ è stabile},$$

$$\det \nabla^2 U(x,\varphi)(0,\pi) \text{ non è def. pos.} \Rightarrow \ (0,\pi) \ \text{ è instabile.}$$

En. cinetica di piccola oscill. attorno a $(0,0)$:

$$T^{(0)}(\dot{x},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}a_{ij}(0,0)\dot{q}^i\dot{q}^j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}2m & mL\\ mL & mL^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix}^T$$

Per le frequenze di piccola oscillazione si deve risolvere:

$$\det\left(\nabla^2 U(x,\varphi)(0,0) - \omega^2 a(0,0)\right) = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix}h - 2m\omega^2 & -mL\omega^2\\ -mL\omega^2 & mgL - ml^2\omega^2\end{pmatrix} = 0,$$

$$(\omega^2)_{1,2} = \frac{2mg + hL \pm \sqrt{4m^2g^2 + h^2L^2}}{2mL}.$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2mg + hL + \sqrt{4m^2g^2 + h^2L^2}}{2mL}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2mg + hL - \sqrt{4m^2g^2 + h^2L^2}}{2mL}}.$$