FISICA MATEMATICA - 3 febbraio 2014 - Corso di Laurea in Matematica

Attenzione: Riconsegnate TRE fogli (protocollo a 4 facciate) su cui sono separatamente svolti i quesiti 1, 2 e 3, con Cognome e Nome e con il Numero (1, 2 e 3) messo in evidenza. Niente brutte copie. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

1.1 - Si consideri il campo vettoriale

$$X = \begin{pmatrix} -x - y + xy \\ 5x + y - \frac{1}{2}y^2 \end{pmatrix}.$$

(i) Si linearizzi X nell'origine, e si studi la stabilità della linearizzazione con il metodo spettrale.
(ii) Le informazioni così ottenute permettono di concludere qualcosa sulla stabilità dell'origine per il campo vettoriale X?
(iii) Si consideri la famiglia di funzioni $W_a = 5x^2 + y^2 + 2xy + axy^2$, dove a è un parametro reale. Si determini il parametro $\bar{a}$ affinché la funzione $W_{\bar{a}}$ sia integrale del moto per X.
(iv) Si può usare la funzione $W_{\bar{a}}$ per concludere qualcosa sulla stabilità dell'origine?

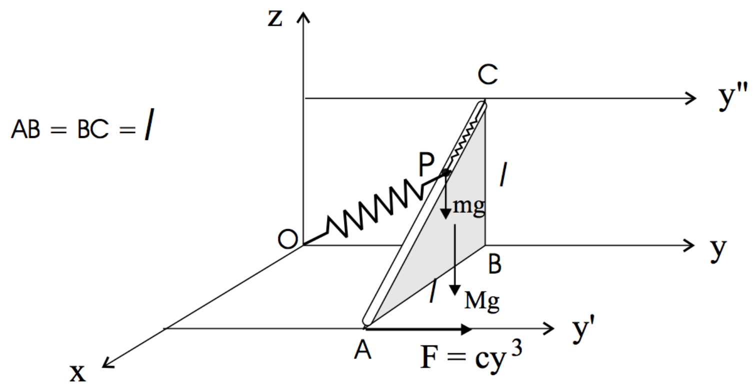
1.2 - Sia data l'equazione differenziale del secondo ordine $m\ddot{x} = -V'(x)$, con x a valori in $\mathbb{R}$, $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, ed $m \in \mathbb{R}^+$.
(i) Quale campo vettoriale, che chiameremo X, definisce l'equazione differenziale appena data? (Più specificamente: in quale spazio tale campo vettoriale è definito e quale è la sua espressione.)
(ii) Il campo vettoriale X appena definito ha un integrale del moto che chiameremo E, che espressione ha E?
(iii) Come si usa la funzione E per disegnare il ritratto in fase di X?
(iv) Potete illustrare quanto sopra disegnando una scelta particolare di V ed il relativo ritratto in fase che porga un campo vettoriale con due equilibri aventi caratteristiche spettrali diverse? (Basta il grafico di V, non serve la sua espressione analitica.)

2

2.1 - Una lamina ABC omogenea triangolare isoscele, $|AB| = |BC| = \ell$, di massa M, è contenuta in un piano parallelo al piano (O, x, z) del riferimento inerziale (O, x, y, z), z verticale ascendente ($\mathbf{g} = -g\hat{z}$) e trasla senza attrito nella direzione dell'asse y. Il suo lato AC ha una scanalatura nella quale scorre senza attrito un punto P di massa m, sul quale agiscono le forze elastiche di due molle OP e CP, entrambe con la stessa costante elastica $h > 0$ e lunghezza a riposo nulla.

Al vertice A della lamina triangolare è inoltre applicata la forza $\mathbf{F} = cy^3\,\hat{y}$, con $c > 0$, dove y è la coordinata Lagrangiana che definisce la configurazione della lamina. Introdotta come seconda coordinata Lagrangiana la posizione $s = |PC|$ del punto P nella scanalatura,

1) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.
2) Determinare le pulsazioni di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile.



2.2 - Si consideri un sistema particellare di due punti materiali liberi $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ di masse m_1, m_2, soggetto a mutue forze posizionali tali che $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$. Introdurre il sistema di riferimento (non inerziale) della **massa ridotta** e scrivere in esso le equazioni della dinamica di $\mathbf{P}_1$, con $\mathbf{P}_2$ solidale all'origine di questo sistema introdotto.

3

3.1 - Principio variazionale di Hamilton, enunciato e dimostrazione.

3.2 - Sia $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ un'Hamiltoniana che dipende solo dalle variabili p: $H = H(p)$. Determinare la trasformazione canonica dipendente dal tempo e di valenza 1 che coniuga $H = H(p)$ con $K(\bar{q}, \bar{p}) \equiv 0$. Relativamente a questo problema, la funzione $S(t, q, \bar{p}) = -H(\bar{p})t + q \cdot \bar{p}$ può essere utile? E l'equazione di Hamilton-Jacobi?

Soluzione all'esercizio 1.1

(i) La linearizzazione di X nell'origine è il campo vettoriale associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovettori sono $\pm 2i$. Quindi si tratta di un centro che è stabile ma non asintoticamente stabile (per il sistema lineare).
(ii) No.
(iii) Si deve calcolare

$$\nabla W_a \cdot X = \left(5x - \frac{y^2}{2} + y\right)(2axy + 2x + 2y) + (xy - x - y)\left(ay^2 + 10x + 2y\right) = (a+1)y\left(10x^2 + xy - y^2\right)$$

e porlo uguale a zero. Ne segue che $W_{\bar{a}}$ con $\bar{a} = -1$ è integrale del moto.
(iv) È ragionevole provare ad usare il metodo della funzione di Liapunov. Bisogna solo controllare che W_{-1} abbia un minimo stretto nell'origine. La matrice Hessiana associata a W_{-1} nell'origine è

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

ed ha autovalori $2\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$, che sono entrambe positivi. Segue che la funzione W_{-1} ha minimo stretto e quindi si può usare come funzione di Liapunov e dimostra la stabilità semplice (non asintotica) dell'origine.

Soluzione all'esercizio 1.2

Si tratta della discussione sui sistemi di Newton 1-dimensionali. Al punto (**iv**) basta disegnare un qualsiasi grafico che abbia un massimo ed un minimo locali. Il minimo locale produrrà un centro, il massimo locale una sella.

Soluzione all'esercizio 2.1

$$OP(y,s) = \frac{s}{\sqrt{2}}\hat{x} + y\hat{y} + \left(\ell - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\hat{z}$$
$$dL^F = \mathbf{F} \cdot dA = cy^3\hat{y} \cdot dy\hat{y} = -d\left(-\frac{c}{4}y^4\right)$$
$$\mathcal{U}(y,s) = \frac{hy^2}{2} - \frac{c}{4}y^4 + hs^2 - \frac{\sqrt{2}h\ell s}{2} + mg\left(\ell - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$
$$T(y,s,\dot{y},\dot{s}) = \frac{1}{2}(M+m)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{s}^2$$

Equilibri:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{,y} = hy - cy^3 = 0 \\ \mathcal{U}_{,s} = 2hs - \frac{\sqrt{2}}{2}(h\ell + mg) = 0 \end{cases}$$

$$(y_E, s_E): \qquad E_1 = (0, \frac{\sqrt{2}}{4}(h\ell + mg)), \qquad E_2 = (+\sqrt{\frac{h}{c}}, \frac{\sqrt{2}}{4}(h\ell + mg)), \qquad E_3 = (-\sqrt{\frac{h}{c}}, \frac{\sqrt{2}}{4}(h\ell + mg)).$$

$$\nabla^2\mathcal{U}(y,s) = \begin{pmatrix} h - 3cy^2 & 0 \\ 0 & 2h \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2\mathcal{U}(y,s)\Big|_{E_1} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 2h \end{pmatrix} : \text{def. pos.}, \qquad \nabla^2\mathcal{U}(y,s)\Big|_{E_2,E_3} = \begin{pmatrix} -2h & 0 \\ 0 & 2h \end{pmatrix} : \text{def. neg.}$$

Per il THND, E_1 è stabile e instabili E_2 e E_3. Piccole oscillazioni in E_1:

$$\det\left(\nabla^2\mathcal{U}(y,s)\Big|_{E_1} - \omega^2 a|_{E_1}\right) = 0, \qquad \det\left(\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 2h \end{pmatrix} - \omega^2\begin{pmatrix} M+m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{h}{M+m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2h}{m}}$$

Soluzione all'esercizio 3.2

La funzione $S(t, q, \bar{p}) = -H(\bar{p})t + q \cdot \bar{p}$ è un *integrale completo* dell'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0$$

Infatti: $\frac{\partial S}{\partial t} = -H(\bar{p})$ e $H\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right) = H(\bar{p})$, inoltre: $\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \bar{p}} \neq 0$. La trasformazione canonica è:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i} \quad : \quad p_i = \bar{p}_i$$

$$\bar{q}^j = \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_j} \quad : \quad \bar{q}^j = -t\frac{\partial H}{\partial p_j}(\bar{p}) + q^j$$

$$\begin{cases} p_i &= \bar{p}_i \\ q^j &= \bar{q}^j + t\frac{\partial H}{\partial p_j}(\bar{p}) \end{cases}$$