Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
5 luglio 2016

Attenzione: Consegnate DUE soli fogli (protocollo bianchi, a 4 facciate), su entrambi scrivete chiaramente <u>cognome</u> e <u>nome</u>. Sul primo risolvete la parte 1, sul secondo risolvete la parte 2. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1.

1.1. Si consideri l'equazione differenziale dipendente da parametri

$$\ddot{x} = f(x, \mu) - 2k\dot{x}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad k > 0$$

ove

$$f(x, \mu) = \sin x(\mu \cos x - 1), \qquad \mu \in [0, +\infty).$$

$a1$) Si determinino le configurazioni di equilibrio al variare di $k \in (0, +\infty)$, $\mu \in [0, +\infty)$.

$a2$) Si supponga ora $\mu \in (0, 1]$, si studi la stabilità degli equilibri usando il teorema spettrale.

$a3$) Si dica, motivando in dettaglio, se

$$W(x, v) = \frac{v^2}{2} - \int_c^x f(\xi, \mu) d\xi$$

è funzione di Lyapunov per la stabilità, *semplice o asintotica*, degli equilibri trovati al punto precedente.

$a4$) Si supponga ora $k = 0$ e $\mu = 2$. Si tracci il ritratto in fase associato all'equazione

$$\ddot{x} = f(x, 2)$$

nel piano delle fasi.

1.2.[1] Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange-Dirichlet.

2.

2.1. Si consideri il sistema meccanico costituito da un punto materiale P di massa m vincolato in modo liscio sull'ellissoide di equazione

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = R^2$$

ove $R > 0$. Le forze attive agenti sul sistema sono il peso, ove z è verticale ascendente, e la forza di richiamo esercitata da una molla ideale di costante elastica $h > 0$ che congiunge P alla sua proiezione ortogonale sull'asse z. Si consideri il sistema solo nella calotta superiore dell'ellissoide, ove $z > 0$. Utilizzando le coordinate lagrangiane (x, y) sulla calotta superiore:

(a) Scrivere la Lagrangiana del sistema.
(b) Si determinino tutte le configurazioni di equilibrio del sistema nella calotta superiore e
(c) si determinino le condizioni sui parametri del sistema affinché (almeno) una configurazione sia stabile;
(d) attorno a quest'ultima si studi il sistema linearizzato, cioè, si determinino le pulsazioni di piccola oscillazione.

2.2. Dato un sistema particellare di punti materiali P_i di masse $m_1, \dots, m_n$, soggetto a forze di tipo generale

$$\mathbb{R}^{6n+1} \ni (OP_1, \dots, OP_i, \dots, OP_n; v_1, \dots, v_i, \dots, v_n, t) \longmapsto F_i(\dots) \in \mathbb{R}^3,$$

e vincolato in maniera liscia con vincoli olonomi

$$\mathbb{R}^{N+1} \ni (q^1, \dots, q^h, \dots, q^N, t) \longmapsto \tilde{OP}_i\big|_{i=1,\dots,n}(\dots) \in \mathbb{R}^{3n}$$

si mostri in dettaglio che i moti dinamicamente possibili $t \mapsto q^h(t)$, $h = 1, \dots, N$, sono soluzione delle equazioni di Lagrange.

2.3. Date due funzioni Hamiltoniane $H_1(q, p)$ e $H_2(q, p)$, dimostrare che se le loro parentesi di Poisson sono nulle allora $H_1(q, p)$ e $H_2(q, p)$ sono integrali primi per il sistema Hamiltoniano $H = H_1 + H_2$.

[1] Per gli studenti **Erasmus**, per la prima metà del corso: Enunciare in dettaglio il metodo spettrale per la stabilità degli equilibri di un generale sistema dinamico non lineare $\dot{x} = X(x)$.

Traccia della soluzione del 1.1.

$a1$) La funzione data è periodica in x. Basta studiarla per $x \in [0, 2\pi]$. Le configurazioni di equilibrio si trovano ponendo $f(x, \mu) = 0$, quindi per

$$\sin x = 0 \qquad x_1 = 0, \quad x_2 = \pi$$

e se $\mu \geq 1$,

$$\cos x = \mu^{-1} \qquad x_{3,4} = \pm \arccos(\mu^{-1})$$

Se $\mu = 1$, vi sono solo due configurazioni di equilibrio : $x_{3,4} = x_{1,2}$.

$a2$) Il sistema ridotto al primo ordine è

$$\dot{x} = v, \qquad \dot{v} = f'(x) - 2kv$$

e la matrice associata al sistema linearizzato è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(x,\mu) & -2k \end{pmatrix}$$

ove

$$f'(x, \mu) = 2\mu \cos^2 x - \cos x - \mu$$

Per studiare la stabilità dobbiamo calcolare lo spettro degli autovalori di A. Si ha quindi

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ f'(x,\mu) & -2k - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

che ha soluzioni

$$\lambda_{1,2} \; = -k \pm \sqrt{k^2 + f'(x, \mu)}$$

Si ha $f'(0, \mu) = \mu - 1$ e $f'(\pi, \mu) = \mu + 1$ e quindi

$$SpA(x = 0) = \{-k - \sqrt{k^2 + \mu - 1}, -k + \sqrt{k^2 + \mu - 1}\}$$

e

$$SpA(x = \pi) = \{-k - \sqrt{k^2 + \mu + 1}, -k + \sqrt{k^2 + \mu + 1}\}$$

Si vede che $0 \notin SpA(x = 0)$ se $\mu < 1$ e $0 \in SpA(x = 0)$ per $\mu = 1$. Quindi se $\mu < 1$ tutti gli autovalori hanno parte reale minore di zero e quindi l'equilibrio $(0, 0)$ è linearmente e nonlinearmente asintoticamente stabile, mentre se $\mu = 1$, nulla si può dire della stabilità del sistema nonlineare.

Invece, $0 \notin SpA(x = \pi)$ sempre e lo spettro contiene sempre un autovalore con parte reale positiva, quindi l'equilibrio $(\pi, 0)$ è sempre linearmente e nonlinearmente instabile.

$a3$) La funzione di Lyapunov proposta coincide con l'energia totale (cinetica più potenziale) di una particella di massa unitaria soggetta alla forza f e alla forza viscosa $f = -2k\dot{x}$. L'energia potenziale è

$$U(x) = -\int_c^x f(\xi, \mu) d\xi = \int f(x, \mu) dx + costante = \frac{\mu^2}{2} \cos^2 x - \cos x$$

Per $\mu < 1$, dallo studio della funzione si vede che essa ha un massimo in $x = \pi$ e un minimo stretto in $x = 0$. La derivata di Lie della funzione W è

$$\mathcal{L}(W)(x, v) = \partial_x(W)v + \partial_v(W)(f(x, \mu) - 2kv) = -2kv^2 \leq 0$$

Quindi la funzione proposta è funzione di Lyapunov per la stabilità semplice ma non per quella asintotica.

$a4$) Per tracciare il ritratto in fase basta studiare il grafico dell'energia potenziale dell'unica forza presente, la forza f. Per $\mu = 2$ la funzione U ha un massimo in $x = \pi$ e due minimi in $x_{3,4} = \pm \arccos(\mu^{-1}) = \pm \arccos(1/2) = \pm\pi/3$. Il ritratto in fase si traccia con il metodo qualitativo visto a lezione.

Traccia della soluzione del 2.1.

Calotta superiore $z > 0$:

$$\tilde{z}(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - 2y^2}$$

Allora,

$$\dot{z} = \frac{-x\dot{x} - y\dot{y}}{\sqrt{R^2 - x^2 - 2y^2}}$$

e

$$T(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{R^2 - x^2 - 2y^2}\right]$$

$$\mathcal{U}(x, y) = mg\tilde{z}(x, y) + \frac{1}{2}h(x^2 + y^2), \qquad\qquad L = T - \mathcal{U}$$

$$Equilibri: \qquad \nabla\mathcal{U} = \begin{pmatrix} (h - \frac{mg}{\sqrt{R^2-x^2-2y^2}})x \\ (h - \frac{mg}{\sqrt{R^2-x^2-2y^2}})y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oltre a $(x, y) = (0, 0)$, è necessario studiare in dettaglio

$$x = 0, \quad h - \frac{mg}{\sqrt{R^2 - x^2 - 2y^2}} = 0$$

e

$$y = 0, \quad h - \frac{mg}{\sqrt{R^2 - x^2 - 2y^2}} = 0$$

si troveranno quindi (dettagliarle) delle condizioni sui parametri del sistema per l'esistenza di ulteriori equilibri oltre a $(x, y) = (0, 0)$.

Per quanto riguarda $(x, y) = (0, 0)$,

$$\nabla^2\mathcal{U}(0, 0) = \begin{pmatrix} h - \frac{mg}{R} & 0 \\ 0 & h - \frac{2mg}{R} \end{pmatrix}$$

La stabilità è assicurata da

$$h > \frac{2mg}{R}$$

Matrice cinetica in $(0, 0)$:

$$a(0, 0) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$0 = \det\begin{pmatrix} h - \frac{mg}{R} - m\omega^2 & 0 \\ 0 & h - \frac{2mg}{R} - m\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{h}{m} - \frac{g}{R}}, \qquad\qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{h}{m} - \frac{2g}{R}}$$

Soluzione del 2.3. $f(q, p)$ è integrale primo per X_H se e solo se $0 = L_{X_H} f = \{f, H\}$:

$\{H_1, H_1 + H_2\} = \{H_1, H_1\} + \{H_1, H_2\} = 0,$

$\{H_2, H_1 + H_2\} = \{H_2, H_1\} + \{H_2, H_2\} = 0.$