Master in Matematica Applicata, 2002/03

SISTEMI DINAMICI: Calcolo delle Variazioni e Teoremi di Riduzione Finita Esatta

Franco Cardin

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata Università degli Studi di Padova,
via Belzoni, 7 - 35131 Padova Italy e-mail:cardin@math.unipd.it

INTRODUZIONE

Il problema ai valori iniziali, il cosidetto problema di Cauchy,

$$\dot{x}(t) = X(x(t)), \qquad x(0) = x_0,$$

è risolubile in *uno ed unico modo* non appena il campo vettoriale X, $\mathbb{R}^m \ni x \to X(x) \in \mathbb{R}^m$, definente l'equazione differenziale, sia sufficientemente limitato e regolare (per es., C^1 e a supporto compatto). Quando l'equazione differenziale ammette formulazione variazionale, spesso, dal punto di vista computazionale, il problema della ricerca della soluzione si semplifica: è infatti a volte più agile algoritmicamente determinare 'punti stazionari' di funzionali (p.e.'minimi'), piuttosto che costruire soluzioni (anche in questo caso, con qualche procedimento iterativo, algoritmico) di equazioni differenziali. D'altra parte, il problema variazionale, cioè determinare la curva (o le curve) $[t_0, t_1] \ni t \to q(t) \in \mathbb{R}^N$ tale che il funzionale $J(q(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt$ sia ivi stazionario nella classe di curve tra le *medesime* configurazioni estreme, $q(t_0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1$, a priori *non ammette nè esistenza nè tanto meno unicità*, indipendentemente dalla regolarità degli oggetti in gioco, per esempio della Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$.

In questi appunti proveremo ad occuparci proprio di questo: semplificare, in maniera possibilmente adatta agli algoritmi di analisi numerica, il problema della determinazione dei punti stazionari dei funzionali della Meccanica. Questo verrà realizzato introducendo una *riduzione*, dall'infinito-dimensionale al finito-dimensionale, dello spazio delle curve ove è definito il funzionale meccanico nella formulazione Hamiltoniana: tale riduzione, detta di Amann-Conley-Zehnder (risale ormai a più di vent'anni fa, 1980 circa), risulterà *esatta*, nel senso che la scelta di un opportuno troncamento, assieme una funzione 'punto-fisso', restituirà esattamente il funzionale originale senza alcuna approssimazione.

Rivedremo inizialmente il principio variazionale di Hamilton (equazioni di Lagrange); richiameremo l'ambiente Hamiltoniano associato a quello Lagrangiano (Trasformazione di Legendre); introdurremo il principio variazionale in tale ambiente, detto pr. variazionale di Hamilton-Helmholtz; quindi, infine, opereremo la annunciata riduzione esatta. La determinazione delle curve stazionari sarà tradotta nella i) determinazione di una funzione punto-fisso (e questa esisterà sempre, una ed unica) e ii) nella soluzione di un'equazione finito-dimensionale: quest' ultima sarà responsabile (e solo quest'ultima) della possibile (o non) esistenza ed eventuale unicità dei punti stazionari [1]. Questa equazione finito-dimensionale risulterà della forma (per $q(T)$ fissato):

$$\text{determinare } u^* \in \mathbb{R}^k \text{ tale che } \quad \frac{\partial S}{\partial u}(q(T), u^*) = 0,$$

dunque: il problema variazionale infinito-dimensionale è cosí tradotto in un equivalente problema, ancora variazionale, ma ora **finito** dimensionale.

[1] **Avvertenza:** Qualche parte di queste dispense è in inglese, ciò è dovuto semplicemente al fatto che sono stati utilizzati dei brani di articoli scientifici di rassegna.

PRINCIPIO VARIAZIONALE DI HAMILTON.
Siano q_0 e q_1 due configurazioni di $\mathbb{R}^N$. Consideriamo l'insieme delle curve di classe C^2, definite nell'intervallo $[t_0, t_1]$, a valori in $\mathbb{R}^N$, tra le due configurazioni prefissate,

$$\Gamma^{q_0,q_1}_{t_0,t_1} = \{q(\cdot) \in C^2([t_0, t_1]; \mathbb{R}^N) : \ q(t_0) = q_0, \ q(t_1) = q_1\}.$$

Questo sottoinsieme $\Gamma^{q_0,q_1}_{t_0,t_1}$ di $C^2([t_0, t_1]; \mathbb{R}^N)$ non è linearmente chiuso; è invece linearmente chiuso, ha struttura di $\mathbb{R}$-spazio, il seguente sottoinsieme

$$\Gamma^{0,0}_{t_0,t_1} = \{q(\cdot) \in C^2([t_0, t_1]; \mathbb{R}^N) : \ q(t_0) = 0, \ q(t_1) = 0\}.$$

Tale spazio è talvolta detto spazio *direttore* poichè, scelta una curva $q(\cdot) \in \Gamma^{q_0,q_1}_{t_0,t_1}$, si ha

$$\Gamma^{q_0,q_1}_{t_0,t_1} = q(\cdot) + \Gamma^{0,0}_{t_0,t_1}.$$

Da un punto di vista prettamente geometrico $\Gamma^{0,0}_{t_0,t_1}$ si atteggia a *spazio tangente* a $\Gamma^{q_0,q_1}_{t_0,t_1}$ nel generico punto $q(\cdot)$; infatti, pensiamo alla costruzione dei vettori tangenti come derivate di curve che passano per $q(\cdot)$ e a valori in $\Gamma^{q_0,q_1}_{t_0,t_1}$: tali curve sono del tipo

$$[-\varepsilon, +\varepsilon] \times [t_0, t_1] \ni (\lambda, t) \mapsto \gamma(\lambda, t) \in \mathbb{R}^N, \quad \gamma(0, \cdot) = q(\cdot);$$

dunque, per ogni $\lambda \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$, $\quad \gamma(\lambda, t_0) = q(t_0)$, $\quad \gamma(\lambda, t_1) = q(t_1)$, cosicchè la curva vettore tangente,

$$h(\cdot) := \frac{d}{d\lambda}\gamma(\lambda, \cdot)|_{\lambda=0},$$

valutata in t_0 e in t_1, è il vettore nullo. Quindi $h(\cdot) \in \Gamma^{0,0}_{t_0,t_1}$.

Sia assegnata una funzione Lagrangiana di classe C^2

$$L : TQ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (q, \dot{q}, t) \mapsto L(q, \dot{q}, t).$$

Si noti che L a questo stadio è estremamente generale, quindi di tipo non necessariamente meccanico. Mediante L costruiamo il seguente funzionale reale J, detto *funzionale d'Azione*,

$$J : \Gamma^{q_0,q_1}_{t_0,t_1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$q(\cdot) \mapsto J[q(\cdot)] := \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt.$$

Si chiama *variazione* di J, costruita a partire dal punto (curva) $q(\cdot) \in \Gamma^{q_0,q_1}_{t_0,t_1}$, e di *incremento* $h(\cdot) \in \Gamma^{0,0}_{t_0,t_1}$, la seguente derivata direzionale (nella direzione del vettore $h(\cdot)$):

$$dJ[q(\cdot)]h(\cdot) := \frac{d}{d\lambda}J[q(\cdot) + \lambda h(\cdot)]|_{\lambda=0}.$$

Diremo infine che il punto $q(\cdot) \in \Gamma^{q_0,q_1}_{t_0,t_1}$ rende *stazionario* J se

$$dJ[q(\cdot)]h(\cdot) = 0, \qquad \forall h(\cdot) \in \Gamma^{0,0}_{t_0,t_1}.$$

Il seguente teorema caratterizza le soluzioni delle equazioni di Lagrange di Lagrangiana L tra le configurazioni q_0 e q_1 e nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$. In ambito variazionale le equazioni di Lagrange sono spesso citate come equazioni di Euler-Lagrange.
Principio Variazionale di Hamilton (formulazione Lagrangiana). *La curva $q(\cdot) \in \Gamma^{q_0,q_1}_{t_0,t_1}$ rende stazionario il funzionale J se e solo se $q(\cdot)$ risolve le equazioni di Euler-Lagrange di Lagrangiana L.*

Prova. Si tratta di esplicitare $dJ[q(\cdot)]h(\cdot)$ —c'è la sommatoria, sottintesa, per $i = 1, ..., N$—

$$dJ[q(\cdot)]h(\cdot) = \frac{d}{d\lambda}\int_{t_0}^{t_1} L(q(t)+\lambda h(t), \dot{q}(t)+\lambda\dot{h}(t), t)dt|_{\lambda=0} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} [\frac{\partial}{\partial q^i}L(q(t),\dot{q}(t),t)h^i(t) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}L(q(t),\dot{q}(t),t)\dot{h}^i(t)]dt =$$

$$= [\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}L(q(t),\dot{q}(t),t)h^i(t)]|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}](t)h^i(t)dt,$$

il primo termine è nullo per la proprietà caratteristica di $\Gamma^{0,0}_{t_0,t_1}$, dunque

$$dJ[q(\cdot)]h(\cdot) = -\int_{t_0}^{t_1}[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}](t)h^i(t)dt.$$

Se la curva $q(\cdot)$ risolve le equazioni di Lagrange allora tutte le N funzioni del tempo $[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}](t)$ sono identicamente nulle in $[t_0, t_1]$ e dunque $q(\cdot)$ rende stazionario J. Viceversa, $q(\cdot)$ renda stazionario J, cioè,

$$\int_{t_0}^{t_1}[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}](t)h^i(t)dt = 0, \qquad \forall h(\cdot) \in \Gamma^{0,0}_{t_0,t_1}.$$

Supponiamo, per assurdo, che $q(\cdot)$ non soddisfi alle equazioni di Lagrange in $[t_0, t_1]$, quindi, per qualche indice i' e a qualche istante t^*,

$$[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{i'}} - \frac{\partial L}{\partial q^{i'}}](t^*) \neq 0.$$

Dato che L e $q(\cdot)$ sono di classe C^2, le funzioni $[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}](t)$ sono continue in t, ed esiste —teorema della permanenza del segno— un intervallo $[\alpha, \beta]$, che contiene internamente t^*, in cui $[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{i'}} - \frac{\partial L}{\partial q^{i'}}](t)$ assume lo stesso segno di $[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{i'}} - \frac{\partial L}{\partial q^{i'}}](t^*)$. Scegliamo ora una particolare $h(\cdot) \in \Gamma^{0,0}_{t_0,t_1}$:

$$h^i(t) = 0, \quad i \neq i',$$

$$h^{i'}(t) = 0, t \in [t_0, t_1] - [\alpha, \beta], \qquad\qquad h^{i'}(t) \neq 0, t \in [\alpha, \beta],$$

per esempio, in $[\alpha, \beta]$, $h^{i'}(t) = (t-\alpha)^3(\beta - t)^3$. Si osservi che l'esponente 3 è scelto affinché $h(\cdot)$ sia di classe C^2 in $[t_0, t_1]$. Con tale scelta di $h(\cdot)$ otteniamo —qui non c'è naturalmente la sommatoria sottintesa sull'indice i'—

$$dJ[q(\cdot)]h(\cdot) = \int_{\alpha}^{\beta}[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{i'}} - \frac{\partial L}{\partial q^{i'}}](t)h^{i'}(t)dt \neq 0,$$

contro l'ipotesi: assurdo; quindi $q(\cdot)$ risolve le equazioni di Lagrange in $[t_0, t_1]$. □

La classe dei sistemi meccanici la cui dinamica si pone in forma variazionale è *strettamente* più ampia della classe dei sistemi meccanici olonomi lisci e conservativi. Si consideri per esempio una particella libera di massa m e soggetta ad una forza conservativa di energia potenziale $V(q), q \in \mathbb{R}^3$, e alla resistenza di mezzo di tipo viscoso $F = -k\dot{q}$. Mostrare che le equazioni dinamiche per tale sistema, cioè $m\ddot{q} = -\nabla V(q) - k\dot{q}$, sono le equazioni di Euler-Lagrange con lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = e^{\frac{k}{m}t}(\frac{1}{2}m|\dot{q}|^2 - V(q))$.

TRASFORMAZIONE DI LEGENDRE

Sia assegnata una funzione Lagrangiana

$$L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (q, \dot{q}, t) \mapsto L(q, \dot{q}, t),$$

e definiamo le seguenti funzioni

$$p_i = p_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}, t).$$

Notiamo che tali funzioni p_i, definite come gradienti, si atteggiano in maniera naturale ad essere interpretate quali componenti di forme differenziali. Supponiamo che, per ogni fissata coppia $(q, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, la mappa $\dot{q} \mapsto p$ sia, almeno localmente, invertibile; quest'ultima richiesta è senz'altro soddisfatta se per esempio vale la condizione algebrica del teorema del Dini (le funzioni in studio sono C^∞):

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}(q, \dot{q}, t) \neq 0.$$

Indicheremo con $\dot{q}^i = S^i(q, p, t)$ tale inversa. Definiamo ora la seguente *trasformazione di Legendre*:

$$\mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}$$

$$(q, \dot{q}, t) \mapsto (q, p(q, \dot{q}, t), t),$$

la quale, nelle ipotesi di lavoro scelte, stabilisce un diffeomorfismo (almeno locale) tra la struttura $\mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}$ Lagrangiana (fibrato tangente per il tempo) e la struttura $\mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}$ Hamiltoniana (fibrato co-tangente per il tempo).

Indagheremo ora brevemente su alcune ipotesi atte a *globalizzare* la costruzione *locale* ora stabilita. Premettiamo il seguente generale teorema fortemente interessante anche al di fuori del contesto in cui stiamo lavorando, poiché risulta essere il più semplice (anche dal punto di vista della dimostrazione) *teorema di invertibilità globale*.

Teorema di inversione globale (vedi per es. a pag. 137 di M. Berger e M. Berger, Perspectives in nonlinearity, ed: W. A. Benjamin, 1968). *Sia Ω un aperto convesso di $\mathbb{R}^N$ e sia $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Supponiamo che la (parte simmetrica della) matrice Jacobiana di f sia, per ogni $x \in \Omega$, definita positiva,*

$$\sum_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \lambda_i \lambda_j > 0, \quad \forall \lambda \neq 0.$$

Allora f è iniettiva.

Prova. Dato che, evidentemente, $\det(\nabla f) \neq 0$, f è sicuramente localmente invertibile: il fatto che sia, inoltre, un diffeomorfismo con l'immagine sarà garantito dalle sopra enunciate ipotesi di convessità. Dobbiamo dunque mostrare che comunque scegliamo $a, b \in \Omega, a \neq b$, allora $f(a) \neq f(b)$. Sia $\Phi : [0, 1] \ni t \mapsto \Phi(t) \in \mathbb{R}$ cosí definita:

$$\Phi(t) = f(tb + (1 - t)a) \cdot (b - a).$$

Osserviamo che Φ è ben definita data la struttura convessa di Ω. Si vede che

$$\Phi(0) = f(a) \cdot (b - a), \qquad \Phi(1) = f(b) \cdot (b - a).$$

Per raggiungere la tesi ci basta mostrare che $\Phi(0) \neq \Phi(1)$: in tal caso allora $f(a) \neq f(b)$. Calcoliamo $\dot{\Phi}(t)$:

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tb + (1 - t)a)(b_i - a_i)(b_j - a_j);$$

dall'ipotesi sullo Jacobiano di f, $\dot{\Phi}(t) > 0, \forall t \in [0, 1]$, ed il teorema segue. $\square$

L'applicazione del teorema funziona nel seguente modo: per ogni fissati $(q, t) \in Q \times \mathbb{R}$ si identifica f con la mappa $\dot{q} \mapsto p$; se ora per ogni $\dot{q} \in \mathbb{R}^N$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}(q, \dot{q}, t) \lambda_i \lambda_j > 0, \quad \forall \lambda \neq 0,$$

allora ne segue che la trasformazione di Legendre è globale. Ricordiamo che nel caso Lagrangiano meccanico ($L = T - V$) quest'ipotesi di convessità è sempre soddisfatta.

EQUAZIONI DI HAMILTON. Ricordiamo che la costruzione in atto dipende da una Lagrangiana inizialmente assegnata, L. Definiamo la funzione di Hamilton, o Hamiltoniana H,

$$H : \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$(q, p, t) \mapsto H(q, p, t) := [\dot{q}^j p_j - L(q, \dot{q}, t)]|_{\dot{q}=S(q,p,t)}.$$

Stabiliamo qualche relazione tra le derivate parziali delle funzioni

$$L(q, \dot{q}, t) \quad \text{e} \quad H(q, p, t),$$

calcoliamo

$$\frac{\partial H}{\partial q^i}(q, p, t) = \frac{\partial S^j}{\partial q^i} p_j - \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial S^j}{\partial q^i},$$

dunque

$$\frac{\partial H}{\partial q^i}(q, p, t) = -\frac{\partial L}{\partial q^i}(q, S(q, p, t), t).$$

Analogamente, si vede che

$$\frac{\partial H}{\partial p^i}(q, p, t) = S^i(q, p, t).$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial t}(q, p, t) = -\frac{\partial L}{\partial t}(q, S(q, p, t), t).$$

Il seguente teorema stabilisce l'equivalenza tra le equazioni di Lagrange e le cosidette equazione canoniche, o di Hamilton.

Teorema. *La curva $\mathbb{R} \ni t \mapsto q(t) \in \mathbb{R}^N$, o più precisamente $\mathbb{R} \ni t \mapsto (q(t), \dot{q}(t)) \in \mathbb{R}^{2N}$ (=fibrato tangente), risolve le equazioni di Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

se e solo se, stabilite le definizioni di $p_i(q, \dot{q}, t)$ e di $H(q, p, t)$, la curva $\mathbb{R} \ni t \mapsto (q(t), p(t)) \in \mathbb{R}^{2N}$ (=fibrato co-tangente) risolve le equazioni (Canoniche o) di Hamilton:

$$\frac{d}{dt} q^i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t), t), \quad \frac{d}{dt} p_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q(t), p(t), t).$$

Prova. $\mathbb{R} \ni t \mapsto q(t) \in Q$ risolva le equazioni di Lagrange, cioè

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{d}{dt} p_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^i},$$

che corrispondono al secondo gruppo di equazioni canoniche. Anche il primo gruppo è soddisfatto, utilizzando l'inversione della trasf. di Legendre e una delle relazioni tra derivate di L e H appena sopra scritte,

$$\dot{q}^i(t) = S^i(q(t), p(t), t) = \frac{\partial H}{\partial p^i}(q(t), p(t), t).$$

In maniera analoga si dimostra il viceversa. □

Esercizi.1) Dimostrare che la funzione H è un integrale primo per il sistema canonico se e solo se H è indipendente dal tempo. 2) Mostrare che nel caso Lagrangiano meccanico, $L = T(q, \dot{q}) - V(q)$, l'Hamiltoniana è proprio l'energia totale $H = T + V$.

PRINCIPIO VARIAZIONALE DI HAMILTON-HELMHOLTZ.
Sia data una Hamiltoniana H. Consideriamo la seguente Lagrangiana

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(q, p, \dot{q}, \dot{p}, t) \mapsto \mathcal{L}(q, p, \dot{q}, \dot{p}, t) := p \cdot \dot{q} - H(q, p, t).$$

Consideriamo il differenziale direzionale (la variazione) del funzionale

$$S[q(\cdot), p(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q, p, \dot{q}, \dot{p}, t) dt$$

nella classe $\hat{\Gamma}^{q_0,q_1}_{t_0,t_1}$ delle curve $\gamma : [t_0, t_1] \ni t \mapsto (q(t), p(t)) \in \mathbb{R}^{2N}$ con $q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1$ e nessuna restrizione sulle $p(\cdot)$. Se $\gamma \in \hat{\Gamma}^{q_0,q_1}_{t_0,t_1}$, allora ogni altra curva di $\hat{\Gamma}^{q_0,q_1}_{t_0,t_1}$ si ottiene sommando a γ una generica $\delta\gamma$ appartenente alla classe di curve $\hat{\Gamma}^{0,0}_{t_0,t_1}$ (è uno spazio vettoriale, mentre $\hat{\Gamma}^{q_0,q_1}_{t_0,t_1}$ non lo è) tali che $\delta q(t_0) = 0 = \delta q(t_1)$ e nessuna restrizione sulle $\delta p(\cdot)$.

$$dS[\gamma]\delta\gamma = \frac{d}{d\lambda} S[\gamma + \lambda\delta\gamma]|_{\lambda=0},$$

$$dS[\gamma]\delta\gamma = \int_{t_0}^{t_1} [(\dot{q} - \nabla_p H) \cdot \delta p - (\dot{p} + \nabla_q H))\delta q] dt + p \cdot \delta q|_{t_0}^{t_1}.$$

Dunque: la curva $\gamma \in \hat{\Gamma}^{q_0,q_1}_{t_0,t_1}$ rende stazionario il funzionale S nella classe di variazioni $\hat{\Gamma}^{0,0}_{t_0,t_1}$ se e solo se γ risolve le equazioni canoniche tra le medesime configurazioni.

UN PROBLEMA VARIAZIONALE IN FORMA HAMILTONIANA
Una curva è in $L((0, T); \mathbb{R}^n)$ se è a 'quadrato sommabile', cioè:

$$||\gamma||^2_{L((0,T);\mathbb{R}^n)} := \int_0^T |\gamma(t)|^2 dt < +\infty$$

Indichiamo con $H^{1,2}\big((0, T), \mathbb{R}^{2n}\big)$ il completamento dello spazio delle curve $\gamma(t)$ di $C^\infty([0, T]; \mathbb{R}^{2n})$ che sono in L^2 assieme a $\dot{\gamma}(t)$, dunque la norma è

$$||\gamma||^2_{H^{1,2}} := \int_0^T |\gamma(t)|^2 dt + \int_0^T |\dot{\gamma}(t)|^2 dt < +\infty$$

Vedremo che l'introduzione di questo spazio, che è tipico nel calcolo delle variazioni, ci servirà per sviluppare in serie di Fourier le curve derivate $\dot{\gamma}(t)$, e questo sarà possibile dato che esse sono in $L^2\big([0, T], \mathbb{R}^{2n}\big)$.

Problema Variazionale:
Sia data una funzione Hamiltoniana H. Determinare la (una) curva $\gamma(t) = (q(t), p(t))$ risolvente le equazioni di Hamilton, definita nell'intervallo $[0, T]$, che parte al tempo $t = 0$ con **momento** *$p(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ e arriva al tempo $t = T$ nella* **configurazione** *prefissata $q(T) = q_T \in \mathbb{R}^n$.*

Questo problema non è esattamente adatto alla formulazione del teorema variazionale di Hamilton-Helmoltz sopra esposto, dove si intendono invece prefissate le configurazioni iniziale q_0 e finale q_T. Ciononostante, ci rendiamo conto che anche in questo caso sempre $2n$ dati al bordo sono fissati. Vedremo qui sotto (Lemma 3) una opportuna riedizione di tale teorema variazionale. In una serie di Lemmi dimostreremo qui sotto l'annunciato Teorema di riduzione.

Preliminarmente, enunciamo e dimostriamo il

Teorema di punto di fisso di Banach-Caccioppoli *Sia V uno spazio vettoriale dotato di norma, $||\cdot||$, completo* [1] *, e*

$$f : V \longrightarrow V$$

una 'contrazione', cioè una funzione Lipschitziana con costante di Lipschitz $\lambda < 1$:

$$||f(u) - f(v)|| \leq \lambda ||u - v|| \quad \forall u, v \in V.$$

Allora f ammette uno ed un unico punto fisso v^*:

$$v^* = f(v^*).$$

Questo si può ottenere con le successioni delle iterate di f a partire da qualunque punto iniziale $v_0 \in V$.
Prova. Consideriamo un arbitrario punto $v_0 \in V$ e la successione $\{f^n(v_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ delle iterate di f:

$$v_0, \quad f(v_0), \quad f^2(v_0) = f \circ f(v_0), \quad \dots \quad f^n(v_0) = f \circ \dots \circ f(v_0), \quad \dots$$

Dimostriamo che è successione di Cauchy. Definiamo

$$d := ||f(v_0) - v_0||,$$

se v_0 non è punto fisso, allora $d > 0$. Abbiamo che

$$||f^{n+1}(v_0) - f^n(v_0)|| \leq \lambda ||f^n(v_0) - f^{n-1}(v_0)|| \leq \dots$$

$$\leq \lambda^n ||f(v_0) - v_0|| = \lambda^n \, d$$

Pertanto, per $n > m$,

$$||f^n(v_0) - f^m(v_0)|| \leq$$
$$\leq ||f^n(v_0) - f^{n-1}(v_0)|| + ||f^{n-1}(v_0) - f^{n-2}(v_0)|| + \dots + ||f^{m+1}(v_0) - f^m(v_0)|| \leq$$
$$\leq (\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \dots + \lambda^{m+1} + \lambda^m)d.$$

Si vede che mostrare che $\{f^n(v_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy è esattamente come mostrare che la successione delle somme parziali della serie geometrica $\sum_{l=0}^{+\infty} \lambda^l d$ è di Cauchy, ma quest'ultima, essendo $\lambda < 1$, è convergente, cioè la successione delle somme parziali è convergente e dunque di Cauchy. Mostriamo che $\{f^n(v_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un punto fisso: essendo Lipschitz, f è continua,

$$v^* = \lim_{n\to+\infty} f^n(v_0) = \lim_{n\to+\infty} f^{n+1}(v_0) =_{(\text{continuità})} f(\lim_{n\to+\infty} f^n(v_0)) = f(v^*).$$

Unicità del punto fisso: Sia $\bar{v}$ un altro punto fisso per f, allora

$$||\bar{v} - v^*|| = ||f(\bar{v}) - f(v^*)|| \leq \lambda ||\bar{v} - v^*||, \quad \text{cioè} \quad \lambda \geq 1,$$

ma ciò è in contraddizione con $\lambda < 1$, a meno che $\bar{v} = v^*$. □

AVVERTENZA: Nelle pagine precedenti N era la dimensione dello spazio delle q, $q \in \mathbb{R}^N$, e cosí per esempio $(q, p) \in \mathbb{R}^{2N}$ ecc. Nelle prossime pagine si userà la notazione $q \in \mathbb{R}^n$, e cosí per esempio $(q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$, mentre l'intero N sarà usato come 'cut-off', si veda: **Fourier Expansions and Fixed Point.**

[1] uno spazio vettoriale normato si dice completo (o di Banach) se tutte le successioni di Cauchy di elementi di V convergono in V. Richiamiamo la definizione di successione di Cauchy: sia $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione con $v_n \in V$, essa si dirà successione di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \, \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$ tale che $\forall n_1, n_2 > \bar{n}$ si ha: $||v_{n_1} - v_{n_2}|| < \varepsilon$. Una successione convergente è sicuramente di Cauchy: $\lim_{n\to+\infty} v_n = v$ significa che $\forall \epsilon > 0 \ \exists n(\epsilon)$ tale che $\forall n > n(\epsilon)$ si ha $||v_n - v|| < \epsilon$, e dunque ciò implica che $||v_n - v_m|| = ||v_n - v + v - v_m|| \leq 2\epsilon$. Ma non tutte le successioni di Cauchy sono convergenti.

Teorema di Riduzione Finita Esatta *Sia $H(q,p,t)$ una funzione Hamiltoniana con le derivate seconde, rispetto al complesso delle variabili $x=(q,p)\in\mathbb{R}^{2n}$, limitate in $\mathbb{R}^{2n}$ uniformemente in $t\in[0,T]$:*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^{2n}\ t\in[0,T]} \nabla^2_{xx}H(x,t)=C<+\infty$$

Allora esiste una funzione reale, per qualche k intero finito opportunamente grande,

$$S:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$(q(T),u)\longmapsto S(q(T),u)$$

tale che le curve risolventi il problema variazionale *sopra enunciato sono in bijezione (corrispondenza biunivoca) con i punti stazionari u^* di S per $q(T)$ fissato:*

$$\frac{\partial S}{\partial u}(q(T),u^*)=0$$

Inoltre,

$$p(T):=\frac{\partial S}{\partial q(T)}(q(T),u^*)$$

rappresenta il valore del momento p al tempo $t=T$ lungo la curva risolvente caratterizzata dal valore u^* del vettore dei parametri ausiliari.

La dimostrazione si articolerà in vari Lemma.

Let us consider the set of curves

$$\Gamma:=\Big\{\gamma(\cdot)=\big(q(\cdot),p(\cdot)\big)\in H^{1,2}\big([0,T],\mathbb{R}^{2n}\big):\ p(0)=0\Big\}.$$

By Rellich-Kondrachov Theorem (or by Sobolev imbedding Theorem),

$$H^{1,2}((0,T),\mathbb{R}^{2n})\hookrightarrow\mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R}^{2n})$$

compactly, so in the above definition it is understood that the elements of Γ are the natural continuous extension of the curves of $H^{1,2}((0,T),\mathbb{R}^{2n})$: more explicitly the continuous curves in $T^*\mathbb{R}^n$, $t\mapsto\gamma(t)$, arriving to the zero section, such that $\dot\gamma=\frac{d\gamma}{dt}\in L^2:=L^2((0,T),\mathbb{R}^{2n})$. It is self-evident the following
Lemma 1 (Linear structure of Γ) *The set Γ has a natural structure of linear space, and then $T_\gamma\Gamma=\Gamma$, for all $\gamma\in\Gamma$.*

An equivalent way to describe the curves of Γ is to assign the q-projection of the end point, $q(T)\in\mathbb{R}^n$, and the velocity $\dot\gamma$, for each $s\in[0,T]$, of the curve γ by means of a function $\phi\in L^2$.
Lemma 2 (The bijection g) *For all $\phi\in L^2$ set $\phi=(\phi_q,\phi_p)$. The map g,*

$$g:\mathbb{R}^n\times L^2\longrightarrow\Gamma,$$

$$(q(T),\phi)\longmapsto g(q(T),\phi)(s):=\left(q(T)-\int_s^T\phi_q(r)\ dr,\int_0^s\phi_p(r)\ dr\right),$$

is a bijection.
Proof. Let $\gamma(\cdot)=\big(q(\cdot),p(\cdot)\big)\in\Gamma$, since $\big(\dot q(s),\dot p(s)\big)\in L^2$, then $\gamma(s)=g\Big(q(T),\big(\dot q(s),\dot p(s)\big)\Big)$. This proves that g is surjective.

Now, let $q(T), \bar{q}(T) \in \mathbb{R}^n$, $\phi, \bar{\phi} \in L^2$, such that $g(q(T), \phi) = g(\bar{q}(T), \bar{\phi})$, in other words,

$$\left(q(T) - \int_s^T \phi_q(r)\ dr, \int_0^s \phi_p(r)\ dr \right) = \left(\bar{q}(T) - \int_s^T \bar{\phi}_q(r)\ dr, \int_0^s \bar{\phi}_p(r)\ dr \right).$$

Thus, for all $s \in [0, T]$ one has

$$\bar{q}(T) - q(T) - \int_s^T \left(\bar{\phi}_q(r) - \phi_q(r) \right)\ dr = 0, \qquad \int_0^s \left(\bar{\phi}_p(r) - \phi_p(r) \right)\ dr = 0,$$

hence

$$\bar{q}(T) = q(T), \qquad \bar{\phi}_q = \phi_q, \qquad \bar{\phi}_p = \phi_p.$$

This shows that g is injective. □

Let $\{\Phi^s\}_{s \in [0,T]}$ be the flow of the Hamiltonian dynamics in $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\Phi^s = \Phi^{s,0}_{X_H}, \qquad \Phi^{0,0}_{X_H} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2n}}.$$

Set

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix}, \quad \nabla H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix},$$

the Hamilton's equations related to $X_H = \mathbb{E} \nabla H$, $\dot{x} = X_H(x, s)$, that is $\dot{x} = \mathbb{E}\ \nabla H$,

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p},$$

can be written in the form $\dot{\gamma} - \mathbb{E}\ \nabla H = 0$, or, equivalently,

$$\mathbb{E}\ \dot{\gamma} + \nabla H = 0.$$

The map

$$A : \Gamma \to \mathbb{R}, \qquad \gamma \mapsto A[\gamma] := \int_0^T \Big[p(s) \cdot \dot{q}(s) - H\big(s, q(s), p(s)\big) \Big]\ ds$$

is the **Action Functional** of the Hamilton-Helmholtz variational principle related to the Hamiltonian H.

Lemma 3 (Hamilton-Helmholtz) *A curve $\gamma \in \Gamma$ solves the Hamilton's equations if and only if*

$$\big(\delta : \text{Gâteaux derivative}\big) \quad \delta A[\gamma]\delta\gamma = 0, \quad \forall\ \delta\gamma \in \Gamma \quad \textit{such that} \quad \delta q(T) = 0.$$

Proof. By a direct computation: $\forall \delta\gamma \in T_\gamma\Gamma = \Gamma$,

$$\delta A[\gamma]\delta\gamma =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{dA}{d\lambda}(\gamma + \lambda\delta\gamma)|_{\lambda=0} = \frac{DA}{D\gamma}\delta\gamma = \\
&= \int_0^T \left(\delta p \cdot \dot{q} + p \cdot \delta\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \delta p \right)\ ds = \\
&= \int_0^T \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \cdot \delta p\ ds - \int_0^T \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \delta q\ ds + \int_0^T p \cdot \delta\dot{q}\ ds = \\
&= \int_0^T \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \cdot \delta p\ ds - \int_0^T \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \delta q\ ds + p \cdot \delta q\ \Big|_0^T - \int_0^T \dot{p} \cdot \delta q\ ds = \\
&= \int_0^T \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \cdot \delta p\ ds - \int_0^T \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \cdot \delta q\ ds + p(T) \cdot \delta q(T) = \\
&= -\int_0^T (\mathbb{E}\dot{\gamma} + \nabla H) \cdot \delta\gamma\ ds + p(T) \cdot \delta q(T).
\end{aligned}$$

$\square$

The Lemma 4 below allows us to regard the Action functional A as a generating function —that is, like the function S in the statement— with infinite parameters (in L^2).

Lemma 4 (∞-parameters generating function) *The map*

$$W := A \circ g : \mathbb{R}^n \times L^2 \to \mathbb{R},$$

$$\big(q(T), \phi\big) \mapsto W\big(q(T), \phi\big) := A \circ g\big(q(T), \phi\big) = A[g(q(T), \phi)]$$

generates the following set Λ_T:

$$\Lambda_T = \Big\{(q(T), p(T)) :$$

$$q(T) \in \mathbb{R}^n, \quad p(T) = \frac{\partial W}{\partial q(T)}(q(T), \phi^*), \ \frac{DW}{D\phi}(q(T), \phi^*) = 0\Big\}.$$

where $p(T)$ is the final impulse along the curve solving Hamilton's equ.s related to the stationary ϕ^* above.

Proof. Let us to write explicitly W:

$$W\big(q(T), \phi\big) =$$

$$= \int_0^T \left[\phi_q(s) \int_0^s \phi_p(r)\ dr - H\left(s, q(T) - \int_s^T \phi_q(r)\ dr, \int_0^s \phi_p(r)\ dr\right)\right] ds;$$

then

$$\frac{DW}{D\phi}\ \delta\phi = \int_0^T \Big[\delta\phi_q(s) \int_0^s \phi_p(r)\ dr + \phi_q(s) \int_0^s \delta\phi_p(r)\ dr -$$

$$- \frac{\partial H}{\partial q}\Big(-\int_s^T \delta\phi_q(r)\ dr\Big) - \frac{\partial H}{\partial p} \int_0^s \delta\phi_p(r)\ dr\Big]\ ds.$$

Let us rewrite the first term. Preliminarily, one has

$$\frac{d}{ds}\left(\int_0^s \phi_p(r)\ dr \int_T^s \delta\phi_q(r)\ dr\right) = \phi_p(s) \int_T^s \delta\phi_q(r)\ dr + \delta\phi_q(s) \int_0^s \phi_p(r)\ dr;$$

by integrating from $s = 0$ to $s = T$ one obtains

$$0 = \left(\int_0^s \phi_p(r)\ dr \int_T^s \delta\phi_q(r)\ dr\right)\Big|_0^T =$$

$$= \int_0^T \left(\delta\phi_q(s) \int_0^s \phi_p(r)\ dr - \phi_p(s) \int_s^T \delta\phi_q(r)\ dr\right) ds,$$

and hence

$$\int_0^T \delta\phi_q(s) \int_0^s \phi_p(r)\ dr\ ds = \int_0^T \phi_p(s) \int_s^T \delta\phi_q(r)\ dr\ ds.$$

Using this result to rewrite the expression of $DW/D\phi$ we obtain

$$\frac{DW}{D\phi}\ \delta\phi = \int_0^T \Big[\phi_p(s) \int_s^T \delta\phi_q(r)\ dr + \phi_q(s) \int_0^s \delta\phi_p(r)\ dr -$$

$$- \frac{\partial H}{\partial q}\Big(-\int_s^T \delta\phi_q(r)\ dr\Big) - \frac{\partial H}{\partial p} \int_0^s \delta\phi_p(r)\ dr\Big]\ ds =$$

$$= \int_0^T \Big[-\Big(\phi_p(s) + \frac{\partial H}{\partial q}\Big)\Big(-\int_s^T \delta\phi_q(r)\ dr\Big) -$$

$$- \Big(-\phi_q(s) + \frac{\partial H}{\partial p}\Big) \int_0^s \delta\phi_p(r)\ dr\Big]\ ds =$$

$$= -\int_0^T (\mathbb{E}\dot{\gamma} + \nabla H)\ \delta\gamma\ ds.$$

where $\delta\gamma = \Big(-\int_s^T \delta\phi_q(r)\ dr, \int_0^s \delta\phi_p(r)\ dr\Big) \in \Gamma$. Hence, one obtains that

$$\frac{\partial W}{\partial q(T)}\Big|_{\frac{DW}{D\phi}=0} = \int_0^T \Big(-\frac{\partial H}{\partial q}\Big)\ ds = \int_0^T \dot{p}(s)\ ds = p(T).$$

□

Fourier Expansions and Fixed Point. For every $\phi \in L^2$ let us to consider the Fourier expansion

$$\phi(s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi_k\ e^{i\frac{2\pi k}{T}s}.$$

For each fixed $N \in \mathbb{N}$ let us to consider the projection maps on the basis $\{e^{i\frac{2\pi k}{T}s}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ of L^2,

$$\mathbb{P}_N\phi(s) := \sum_{|k|\le N} \phi_k\ e^{i\frac{2\pi k}{T}s}, \qquad \mathbb{Q}_N\phi(s) := \sum_{|k|>N} \phi_k\ e^{i\frac{2\pi k}{T}s}.$$

Clearly,

$$\mathbb{P}_N L^2 \oplus \mathbb{Q}_N L^2 = L^2,$$

and for $\phi \in L^2$ we will write $u := \mathbb{P}_N\phi$ and $v := \mathbb{Q}_N\phi$.

Remark. The idea to prove existence of a generating function with finitely many parameters is to show that the 'infinite' tail $\mathbb{Q}_N\dot{\gamma}$ of $\dot{\gamma}$, for γ a curve in Γ solving Hamilton's equations, can be dropped out from the expression of the Action functional; in other words, γ is completely determined by a suitable choice of its 'finite' part $\mathbb{P}_N\dot{\gamma}$, for suitable (large) $N \in \mathbb{N}$.

Lemma 5 (Lipschitz). *For fixed $q(T) \in \mathbb{R}^n$ and $u \in \mathbb{P}_N L^2$, the map*

$$\mathbb{Q}_N L^2 \longrightarrow (\Gamma, \|\cdot\|_{L^2}), \qquad v \longmapsto g\big(q(T), u+v\big)$$

is Lipschitz with

$$\mathrm{Lip}(g) \le \frac{T}{2\pi N}(1+\sqrt{2N}).$$

Proof. In some more details, the above map is

$$v \longmapsto \left(q(T) - \int_s^T (u_q+v_q)(r)dr, \int_0^s (u_p+v_p)(r)dr\right)$$

For each $v_1, v_2 \in \mathbb{Q}_N L^2$, let us to consider the Fourier expansion:

$$v := v_2 - v_1 = \sum_{|k|>N} v_k\ e^{i\frac{2\pi k}{T}s}, \qquad v_k = (\,q_k\ ,\ p_k\,)\,.$$

We compute $g(q(T), u+v_2) - g(q(T), u+v_1)$:

$$\begin{aligned}
g(v_2) - g(v_1) &= \Big(-\int_s^T (v_{q2} - v_{q1})(r)dr, \int_0^s (v_{p2} - v_{p1})(r)dr\Big) = \\
&= \Big(-\int_s^T \sum_{|k|>N} q_k\ e^{i\frac{2\pi k}{T}r}dr, \int_0^s \sum_{|k|>N} p_k\ e^{i\frac{2\pi k}{T}r}dr\Big) = \\
&= T\Big(\sum_{|k|>N} \frac{q_k\ e^{i\frac{2\pi k}{T}r}}{i2\pi k}\Big|_T^s, \sum_{|k|>N} \frac{p_k\ e^{i\frac{2\pi k}{T}r}}{i2\pi k}\Big|_0^s\Big) = \\
&= T\Big(\sum_{|k|>N} \frac{(q_k, p_k)}{i2\pi k} e^{i\frac{2\pi k}{T}s} - \sum_{|k|>N} \frac{(q_k, p_k)}{i2\pi k}\Big) = \\
&= T\Big(\sum_{|k|>N} \frac{v_k}{i2\pi k} e^{i\frac{2\pi k}{T}s} - \sum_{|k|>N} \frac{v_k}{i2\pi k}\Big).
\end{aligned}$$

Hence the estimate of $||(g(q(T),u+v_2)-g(q(T),u+v_1)||_{L^2}$ follows*:

$$
\begin{aligned}
||(g(v_2)-g(v_1)||_{L^2} \leq T\Big(\Big|\Big|\sum_{|k|>N}\frac{v_k}{i2\pi k}\ e^{i\frac{2\pi k}{T}t}\Big|\Big|_{L^2}+\Big|\Big|\sum_{|k|>N}\frac{iv_k}{2\pi k}\ \Big|\Big|_{L^2}\Big) &\leq \\
\leq T\Big(\frac{1}{2\pi N}\big|\big|v\big|\big|_{L^2}+\frac{1}{T}\big|\big|\langle v,\mathbb{Q}_N\mathrm{id}_{[0,T]}\rangle_{L^2}\big|\big|_{L^2}\Big) &\leq \\
\leq T\Big(\frac{1}{2\pi N}\big|\big|v\big|\big|_{L^2}+\frac{1}{T}\big|\big|v\big|\big|_{L^2}\ \big|\big|\mathbb{Q}_N\mathrm{id}_{[0,T]}\big|\big|_{L^2}\Big) &\leq \\
\leq T\Big(\frac{1}{2\pi N}\big|\big|v\big|\big|_{L^2}+\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{N}}\big|\big|v\big|\big|_{L^2}\Big) &\leq \\
\leq \frac{T}{2\pi N}(1+\sqrt{2N})\big|\big|v\big|\big|_{L^2}.&
\end{aligned}
$$

□

Lemma 6 (Contraction map) *Suppose that*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^{2n}\ s\in[0,T]}\big|\nabla^2_{yy}H\big|=C<+\infty \qquad (y:=(q,p)).$$

For N large enough: $\frac{TC}{2\pi N}(1+\sqrt{2N})<1$, for every fixed $q(T)\in\mathbb{R}^n$ and $u\in\mathbb{P}_N L^2([0,T];\mathbb{R}^{2n})$ the map:

$$\mathbb{Q}_N L^2([0,T];\mathbb{R}^{2n})\longrightarrow\mathbb{Q}_N L^2([0,T];\mathbb{R}^{2n})$$

$$v\longmapsto\mathbb{Q}_N\mathbb{E}\nabla H\Big(g\big(q(T),u+v\big)\Big)$$

is a contraction map.
Proof.

$$
\begin{aligned}
&\Big|\Big|\mathbb{Q}_N\mathbb{E}\nabla H\Big(g\big(q(T),u+v_2\big)\Big)-\mathbb{Q}_N\mathbb{E}\nabla H\Big(g\big(q(T),u+v_1\big)\Big)\Big|\Big|_{L^2}\leq \\
&\leq \sup_{y\in\mathbb{R}^{2n}s\in[0,T]}\big|\nabla^2_{yy}H\big|\ \Big|\Big|g\big(q(T),u+v_2\big)-g\big(q(T),u+v_1\big)\Big|\Big|_{L^2}\leq \\
&\leq\frac{TC}{2\pi N}(1+\sqrt{2N})\ \big|\big|v_2-v_1\big|\big|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

□

By the Banach-Caccioppoli Theorem there exists one and only one fixed point $f(q(T),u)$ for the above contraction map. By standard arguments one can easily see that this fixed point depends smoothly on $q(T)$ and u. In formula, $f(q(T),u)$ is such that

$$f(q(T),u)=\mathbb{Q}_N\mathbb{E}\nabla H\Big(g\big(q(T),u+f(q(T),u)\big)\Big).$$

It is crucial to observe that, if we solve the *finite* (say, algebraic) equation for u,

$$u=\mathbb{P}_N\mathbb{E}\nabla H\Big(g\big(q(T),u+f(q(T),u)\big)\Big),$$

* We recall that
$\mathbb{Q}_N\mathrm{id}_{[0,T]}=\sum_{|k|>N}\frac{iT}{2\pi k}e^{i\frac{2\pi k}{T}t}$, so $\Big|\Big|\sum_{|k|>N}\frac{iv_k}{2\pi k}\ \Big|\Big|_{L^2}=\frac{1}{T}|\langle\sum_{k\in\mathbb{Z}}v_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t}\ ,\ \mathbb{Q}_N\mathrm{id}_{[0,T]}\rangle_{L^2}|\leq$
$\frac{1}{T}|\langle\sum_{k\in\mathbb{Z}}v_k e^{i\frac{2\pi k}{T}t}\ ,\ \mathbb{Q}_N\mathrm{id}_{[0,T]}\rangle_{l^2}|\leq\frac{1}{T}\ ||v||_{l^2}\ ||\mathbb{Q}_N\mathrm{id}_{[0,T]}||_{l^2}\leq\frac{1}{T}\ ||v||_{l^2}\ \Big(2(\frac{T}{2\pi})^2\sum_{k>N}\frac{1}{k^2}\Big)^{1/2}\leq$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}||v||_{l^2}\ \Big(\sum_{k>N}\frac{1}{k^2}\Big)^{1/2}\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}||v||_{l^2}\Big(\int_N^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx\Big)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}||v||_{l^2}\frac{1}{\sqrt{N}}.$

and we sum the last two formulas, then the resulting equation

$$\dot{\gamma} = \mathbb{E}\nabla H(\gamma)$$

implies that the curve $\gamma = g\big(q(T), u+f(q(T),u)\big)$ *solves* the Hamilton canonical differential equations, and it is starting from the zero section (so that $\gamma \in \Gamma$). Furthermore, we point out that $\dim\big(\mathbb{P}_N L^2([0,T];\mathbb{R}^{2n})\big) = 2n(2N+1) =: k(n,N)$.

To conclude the proof of Theorem 1 we need to show

Lemma 7 (The finite-parameters generating function) *The following function*

$$S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k(n,N)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\big(q(T), u\big) \longmapsto S(q(T), u)$$

$$S(q(T), u) := A \circ g\big(q(T), u + f(q(T), u)\big) = W\big(q(T), u + f(q(T), u)\big),$$

is a global generating function for $\Lambda = \Phi^T(\Lambda_0)$ *where* Λ_0 *is the vanishing-section:* $\Lambda_0 = \{(q,p) \in \mathbb{R}^{2n} : p = 0\}$.

Proof. We write

$$\frac{\partial S}{\partial u}(q(T), u) = \frac{DW}{D\phi}\Big(\frac{D\phi}{Du} + \frac{D\phi}{Dv}\frac{Df}{Du}\Big)$$

(note that $\frac{D\phi}{Du}$ and $\frac{D\phi}{Dv}$ are the projectors $\mathbb{P}_N$ and $\mathbb{Q}_N$ respectively),

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial u}(q(T), u) = &- \int_0^T \Big[\mathbb{P}_N(\mathbb{E}\dot{\gamma} + \nabla H(\gamma))\Big]\Big|_{\gamma = g(q(T), u+f(q(T),u))} ds - \\ &- \int_0^T \Big[\mathbb{Q}_N(\mathbb{E}\dot{\gamma} + \nabla H(\gamma))\Big]\Big|_{\gamma = g(q(T), u+f(q(T),u))} \frac{Df}{Du}\, ds.\end{aligned}$$

By the very construction of $f(q(T), u)$ the second integral vanishes, so

$$\frac{\partial S}{\partial u}(q(T), u) = - \int_0^T \Big[\mathbb{P}_N(\mathbb{E}\dot{\gamma} + \nabla H(\gamma))\Big]\Big|_{\gamma = g(q(T), u+f(q(T),u))} ds,$$

so that

$$\frac{\partial S}{\partial u}(q(T), u) = 0 \text{ is equivalent to } \Big[\mathbb{P}_N(\mathbb{E}\dot{\gamma} + \nabla H(\gamma))\Big]\Big|_{\gamma = g(q(T), u+f(q(T),u))} = 0.$$

On the other hand,

$$\frac{\partial S}{\partial q(T)} = \frac{\partial W}{\partial q(T)} + \frac{DW}{D\phi}\frac{D\phi}{Dv}\frac{Df}{Dq(T)},$$

$$\frac{\partial S}{\partial q(T)} = \frac{\partial W}{\partial q(T)} - \int_0^T \Big[\mathbb{Q}_N(\mathbb{E}\dot{\gamma} + \nabla H(\gamma))\Big]\Big|_{\gamma = g(q(T), u+f(q(T),u))} \frac{Df}{Dq(T)} ds,$$

hence

$$\frac{\partial S}{\partial q(T)}(q(T), u) = \frac{\partial W}{\partial q(T)}(q(T), \phi)\Big|_{\phi = u + f(q(T),u)}.$$

Now it is easy to conclude that the pair $(q(T), \phi) \in \mathbb{R}^n \times L^2$ satisfies

$$\begin{cases} p(T) = \dfrac{\partial W}{\partial q(T)}(q(T), \phi) \\ \quad 0 = \dfrac{DW}{D\phi}(q(T), \phi) \end{cases}$$

if and only if the pair $(q(T), u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k(n,N)}$, where

$$\phi = u + f(q(T), u), \quad \text{so that} \quad u = \mathbb{P}_N \phi,$$

satisfies

$$\begin{cases} p(T) = \dfrac{\partial S}{\partial q(T)}(q(T), u) \\ \quad 0 = \dfrac{\partial S}{\partial u}(q(T), u). \end{cases}$$

□

References

[Amann & Zehnder, 1980] Amann H. and Zehnder E., *Periodic solutions of asymptotically linear hamiltonian systems*, Manus. Math. 32, p. 149-189, 1980.

[Conley & Zehnder, 1983] Conley C. and Zehnder E., *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnol'd.* Invent. Math. 73, no. 1, 33–49, 1983.

[Conley & Zehnder, 1984] Conley C. and Zehnder E., *Morse type index theory for flows and periodic solutions for Hamilton equations*, Comm. Pure Appl. Math., 37, p. 207-253, 1984.

[Viterbo, 1990] Viterbo, C., *Recent progress in periodic orbits of autonomous Hamiltonian systems and applications to symplectic geometry.* Nonlinear functional analysis (Newark, NJ, 1987), 227–250, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 121, Dekker, New York, 1990.