Università
degli Studi
di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
1^0 Compitino — 19 aprile 2018

- Scrivere **nome e cognome su ogni foglio** di svolgimento consegnato.
- Svolgere esercizi e domande **1** su di **un** foglio, ed esercizi e domande **2** su di un **altro** foglio.
- **NON consegnare brutta copia e testo del compito**.
- Si può uscire dall'aula solo **dopo aver consegnato definitivamente** il compito.

1

1.1 - Esercizio

Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale:

$$V(x) = e^{-2x^2}\left(e^{-2x^2} - 1\right).$$

a. Studiare il grafico dell'energia potenziale;
b. Determinare eventuali punti di equilibrio per il sistema dinamico associato;
c. Discutere la loro stabilità.
d. Tracciare il ritratto in fase;
e. Determinare –ombreggiando il ritratto in fase e specificando i corrispondenti valori dell'energia totale– l'insieme dei dati iniziali che generano traiettorie periodiche;
f. Verificare in particolare che le traiettorie con energia totale $E = -3/16$ sono periodiche e scriverne il periodo come integrale definito (non svolgere l'integrale).

1.2 - Teoria

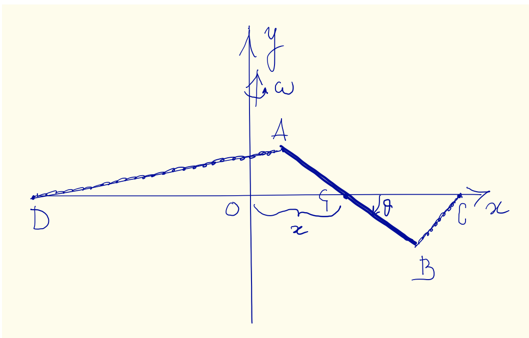
a. Dedurre i ritratti in fase dei sistemi lineari nel piano, nel caso di matrice 2×2 diagonalizzabile con 2 autovalori reali distinti ed entrambi diversi da zero;
b. Discutere quando si possono ottenere informazioni sulla stabilità di un punto di equilibrio di un sistema dinamico nonlineare attraverso lo studio del sistema linearizzato.

2

2.1 - Esercizio

Il sistema cartesiano $(Oxyz)$, con asse y verticale ascendente: $\mathbf{g} = -g\hat{y}$, $g > 0$, è associato ad uno spazio non inerziale uniformemente rotante attorno all'asse y rispetto ai sistemi inerziali con velocità angolare di trascinamento $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{y}$, con ω costante. Nel piano Oxy è vincolata una sbarretta omogenea AB di lunghezza $\ell = |AB|$ e massa m e con il baricentro G vincolato a scorrere sull'asse x, il tutto senza attrito.

Nel piano Oxy, tra il punto $D = (-a, 0)$ e A è tesa una molla di costante elastica $h > 0$ e così pure tra il punto $C = (a, 0)$ e B. Scegliendo come coordinate Lagrangiane l'ascissa x del centro di massa G e l'angolo orientato ϑ dal semiasse delle x positive alla semiretta orientata AB:



a. Determinare gli equilibri del sistema, la loro esistenza al variare di ω nei reali positivi;
b. Studiare la stabilità degli equilibri al variare di ω nei reali positivi;
c. Scrivere la funzione energia cinetica $T = T(x, \vartheta, \dot{x}, \dot{\vartheta})$.

2.2 - Teoria

a. Teorema topologico (C^0) di Lyapunov della stabilità di un equilibrio x^* per $\dot{x} = X(x)$. Enunciato e dimostrazione;
b. Sia $\boldsymbol{F}_i(OP_1, \dots, OP_n)$, $i = 1, \dots, n$, un sistema di forze posizionali per n punti materiali. Supponiamo sia conservativo: cosa significa? Introdurre un vincolo olonomo, con immersione vincolare $q = (q_1, \dots, q_N) \mapsto \widetilde{OP}(q) \in \mathbb{R}^{3n}$, si può affermare o negare che il sistema è ancora conservativo? Discutere in dettaglio;
c. Se lungo un moto di un corpo rigido libero CR la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ ha componenti costanti (nel tempo) rispetto ad una fissata terna solidale al CR, possiamo allora affermare che la velocità angolare ha componenti costanti anche rispetto ad una terna solidale ad un sistema di riferimento inerziale in cui osserviamo il moto del CR? Discutere in dettaglio.

SOLUZIONE ESERCIZIO 1.1

a) $V(x) = v(t) = t(t-1)$

dove $t = e^{-2x^2}$.

$V'(x) = v'(t)\dfrac{dt}{dx}$ con $v'(t) = 2t-1 = 4xt(1-2t)$

$\dfrac{dt}{dx} = -4xt$

$$V''(x) = v''(t)\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + v'(t)\left(-4t - 4x\frac{dt}{dx}\right) = 32x^2t^2 + 4t(1-2t)(1-4x^2).$$

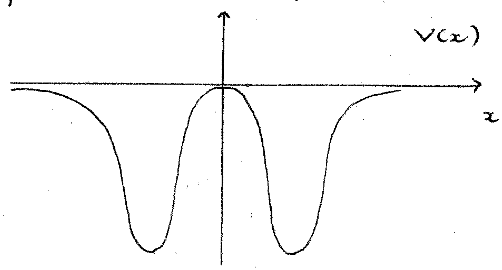
Inoltre $V(x)$ è una funzione pari, e si ha $\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = 0$

$V'(x) = 0$ se $x = 0$ oppure se $t = 0$, $2t = 1$.

Poiché $t = e^{-2x^2} > 0$, si hanno quindi 3 punti stazionari:

$x = 0$ e $x = \pm x_0$ dove $x_0 = \sqrt{\dfrac{\log 2}{2}}$.

$x = 0$ risulta punto di massimo, mentre $x = \pm x_0$ sono due punti di minimo.

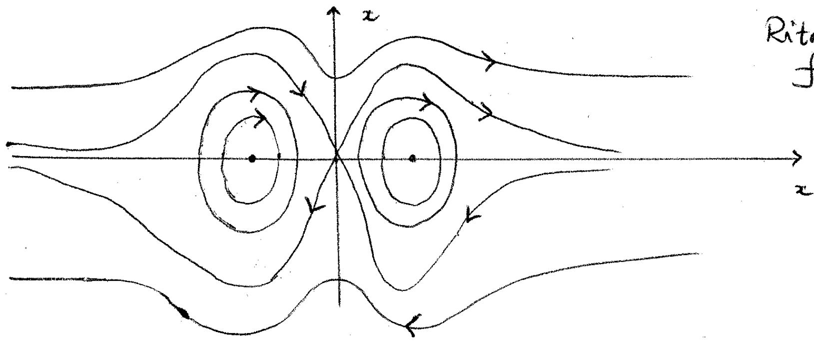


b) I punti di equilibrio per il sistema dinamico associato sono quindi tre

$P_0 = (0,0)$ e $P_\pm = (\pm x_0, 0)$.

c) P_0 risulta instabile mentre $P_\pm$ sono stabili.

d)



Ritratto in fase.

e) Traiettorie periodiche. Tutte le traiettorie che giacciono sulle curve di livello con $E \in (V(x_0), 0)$, sono periodiche.

f) La traiettoria corrispondente è periodica poiché

$V(x_0) < -3/16 < 0$.

Dunque possiamo scrivere il periodo T come integrale definito

$$T = 2\int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{dx}{\sqrt{2\,(E-V(x))}}\,,$$

Conto dettagliato

dove $E=-3/16$ e $x_\pm(E)$ sono le due radici positive (o negative) dell'equazione $V(x)-E=0$ [cioè

$$V(x)=v(t)=t^2-t=-\frac{3}{16} \Rightarrow t^2-t+\frac{3}{16}=0$$

$$\Rightarrow t=\begin{cases}1/4\\ 3/4\end{cases}$$

che implica le due soluzioni positive

$$\begin{cases} x_-(E)=\sqrt{\dfrac{\log 4}{2}} \\[2ex] x_+(E)=\sqrt{\dfrac{\log(4/3)}{2}} \end{cases}$$

Quindi

$$T=2\int_{\sqrt{(\log 4)/2}}^{\sqrt{(\log 4/3)/2}} \frac{dx}{\sqrt{2\left(-\frac{3}{16}-V(x)\right)}}\,.\Big]$$

a. Le coordinate dei punti importanti in questo esercizio sono

$$OA = (x,0) - \frac{\ell}{2}(\cos\vartheta, \sin\vartheta), \quad OB = (x,0) + \frac{\ell}{2}(\cos\vartheta, \sin\vartheta), \quad OG = (x,0).$$

La forza di Coriolis sulla sbarretta propone un lavoro che si calcolo mediante un integrale la cui funzione integranda è composta da prodotti misti di vettori complanari: Velocità angolare di trascinamento, velocità del punto materiale che si considera e generico vettore spostamento consentito dal punto materiale. L'energia potenziale delle forze elastiche è data quindi da

$$\mathcal{U}^h_{BC} = \frac{h}{2}|BC|^2 = \frac{h}{2}\left((x-a+\frac{\ell}{2}\cos\vartheta)^2 + \frac{\ell^2}{4}\sin^2\vartheta\right) \simeq \frac{h}{2}(x-a)(x-a+\ell\cos\vartheta) \simeq \frac{h}{2}(x^2-2ax+\ell(x-a)\cos\vartheta)$$

$$\mathcal{U}^h_{AD} = \frac{h}{2}|AD|^2 = \frac{h}{2}\left((x+a-\frac{\ell}{2}\cos\varphi)^2 + \frac{\ell^2}{4}\sin^2\vartheta\right) \simeq \frac{h}{2}(x+a)(x+a-\ell\cos\vartheta) \simeq \frac{h}{2}(x^2+2ax-\ell(x+a)\cos\vartheta).$$

Sommando si ottiene

$$\mathcal{U}^h = h(x^2 - \ell a\cos\vartheta).$$

L'energia potenziale gravitazionale è costante, e quindi non si considera. L'energia potenziale centrifuga richiede invece un calcolo più elaborato. Chiamando $I_{O,y}$ il momento angolare dell'asta rispetto all'asse y, si ha che

$$\mathcal{U}^{cf}_{AB} = -\frac{1}{2}\omega^2 I_{O,y}, \qquad I_{O,y} = I_{O,y}(x,\vartheta).$$

Il calcolo di $I_{O,y}$ necessita l'operatore di inerzia relativo a $\mathcal{I}_G$ che, scritto nel riferimento solidale all'asta

$$\hat{Y}_1 = vers\,AB, \qquad \hat{Y}_2 = \hat{z}\times\hat{Y}_1, \qquad \hat{Y}_3 = \hat{z},$$

È rappresentato dalla matrice

$$\mathcal{I}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{\ell^2}{12} \end{pmatrix}.$$

Il versore della velocità angolare in tale sistema di riferimento è $\hat{y} = -\sin\vartheta\, Y_1 + \cos\vartheta\, Y_2$. Da questo segue che, usando il teorema di Huygens-Steiner,

$$I_{O,y} = I_{G,y} + mx^2 = \hat{y}^T\mathcal{I}_G\hat{y} + mx^2 = m\frac{\ell^2}{12}\cos^2\vartheta + mx^2$$

e quindi

$$\mathcal{U}^{cf}_{AB} = -\frac{1}{2}m\,\omega^2\left(\frac{\ell^2}{12}\cos^2\vartheta + x^2\right).$$

L'energia potenziale totale $\mathcal{U}$ è la somma delle due energie potenziali $\mathcal{U}^h$ e $\mathcal{U}^{cf}_{AB}$ appena calcolate. Per determinare gli equilibri si uguaglia a zero il gradiente dell'energia potenziale, che è

$$\nabla\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 2hx - m\,\omega^2\,x \\ h\ell a\sin\vartheta + m\,\frac{\ell^2}{12}\,\omega^2\,\cos\vartheta\sin\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(2h - m\,\omega^2) \\ \sin\vartheta\left(h\ell a + m\,\omega^2\,\frac{\ell^2}{12}\,\cos\vartheta\right) \end{pmatrix}.$$

Dalla prima equazione si ha che $x = 0$. Dalla seconda si ha che o $\sin\vartheta = 0$ e quindi $\vartheta = 0, \pi$, oppure $\cos\vartheta = -12\frac{ha}{m\,\omega^2\,\ell}$. Questa equazione ammette due soluzioni che sono $\vartheta = \pm\arccos\left(-12\frac{ha}{m\,\omega^2\,\ell}\right)$ solamente quando $12ha < m\omega^2\ell$. Ci sono quindi sempre 2 equilibri $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,\pi)$ e condizionalmente altri due equilibri $P_3 = \left(0, \arccos\left(-12\frac{ha}{m\,\omega^2\,\ell}\right)\right)$ e $P_4 = \left(0, -\arccos\left(-12\frac{ha}{m\,\omega^2\,\ell}\right)\right)$.

b. La matrice Hessiana del sistema è

$$\nabla^2\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 2h - m\omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}m\ell^2\omega^2\cos^2\vartheta + h\,\ell\,a\cos\vartheta - \frac{1}{12}m\ell^2\omega^2 \end{pmatrix}$$

che, nei 4 equilibri $(0,0), (0,\pi), (0,\vartheta_1), (0,\vartheta_2)$ vale rispettivamente

$$\nabla^2\mathcal{U}(0,0) = \begin{pmatrix} 2h-m\omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m\ell^2\omega^2 + h\,\ell\,a \end{pmatrix}, \quad \nabla^2\mathcal{U}(0,\pi) = \begin{pmatrix} 2h-m\omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}\ell(m\,\omega^2\,\ell - 12h\,a) \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2\mathcal{U}(P_3) = \nabla^2\mathcal{U}(P_4) = \begin{pmatrix} 2h-m\omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m\ell^2\omega^2\left(\left(\frac{12a^2h^2}{m\omega^2\ell}\right)^2 - 1\right) \end{pmatrix}.$$

Segue che l'equilibrio $(0,0)$ è stabile se $2h > m\omega^2$, mentre P_2 lo è non solo quando è verificata questa ipotesi, ma anche quando è verificata l'ipotesi di esistenza degli altri due equilibri (i.e. $12ha < m\omega^2\ell$). Gli ultimi due equilibri P_3 e P_4 sono sempre instabili quando esistono.