

Programma di Fisica Matematica 2017/18

L. Tr. in Matematica, F. Cardin, O. Bernardi.

Materiale didattico:

F. Cardin, Sistemi Dinamici Meccanici - Introduzione alla Meccanica Razionale. – CLEUP, 2018

Richiami sulle ODE e sui metodi di risoluzione elementari.

Introduzione all'analisi qualitativa: Flusso, spazio delle fasi, orbite, ritratti in fase. ODE del 2° ordine come sistemi del 1° ordine. Esempi base di ritratti in fase.

Equilibri. Linearizzazione attorno ad un equilibrio.

Ritratti in fase dei sistemi lineari nel piano reale.

Insiemi invarianti ed integrali primi. Derivata di Lie. Riduzione dell'ordine per mezzo di un integrale primo. Ritratti in fase dell'equazione Newton 1-dimensionale. Esempi di biforcazioni.

Cambi di coordinate e coniugazione di campi vettoriali. Il teorema di rettificazione locale. Riparametrizzazioni temporali.

Equilibri attrattivi. Stabilità degli equilibri. Primo Metodo ("spettrale") di Lyapunov.

Esempi di applicazioni di ODE a vari ambiti.

Spazi Inerziali, riferimenti. Tempo. Particelle: p.ti materiali, massa. Spazio delle Configurazioni, per n p.ti liberi: $\mathbb{R}^{3n}$; Spazio delle Fasi: per n p.ti liberi: $\mathbb{R}^{6n}$.

Leggi di Forza.

Vincoli, p.to di vista geometrico:

Olonomi $S \subset \mathbb{R}^{3n}$, $\dim S = N$;

Anolonomi $A \subset \mathbb{R}^{6n}$.

Uso del teorema del Dini per la loro descrizione locale. Esempi concreti. Immersione vincolare: $\mathbb{R}^N \supset U \ni q \mapsto \check{O}P(q) \in \mathbb{R}^{3n}$. Spazio tangente $T_P \in S$: $\text{im } d\check{O}P$, oppure $\ker df$, se S è loc. descritta da $f^{-1}(0)$.

Vincoli, p.to di vista dinamico: Reazioni Vincolari. Esempi: vincoli privi di attrito. Moti Dinamicamente Possibili. Equazioni di Galilei-Newton per i sistemi vincolati. Esempi. Triedro di Frenet, circolo osculatore, in dettaglio. Particella vincolata su guida senza attrito con forza attiva puramente posizionale: riduzione a $\ddot{s} = f(s)$.

Determinazione, nel caso privo di attrito, delle Reazioni Vincolari mediante il Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange (teorema di omomorfismo tra sp. vett.).

Sistemi di forze posizionali per n p.ti materiali: associata 1-forma differenziale 'lavoro' in $\mathbb{R}^{3n}$; se esatta: $\delta L_F = -dU$, $U(OP_1, \dots, OP_n)$, ne è l'energia potenziale. Esempi vari. Teorema: la restrizione di un sistema di

forze conservativo e conservativa (cioè, pull-back commuta col differenziale). Moti rigidi, velocità angolare, Formula Fondamentale dei Moti Rigidi. Cinematica Relativa. Teoremi di Galilei e Coriolis.

Definizione di 'Equilibrio Meccanico' e sua rilettura in termini ODE. Stabilità di Equilibri Meccanici, ancora, relazioni in termini ODE. Definizione della classe dei Vincoli Ideali (o Lisci). Principio-Teorema di D'Alembert. Principio-Teorema dei Lavori Virtuali.

Teorema delle Forze Vive. Teorema generale di Conservazione dell'Energia. Stabilità: Secondo Metodo di Lyapunov (detto della funzione di Lyapunov) per la stabilità.

Teorema di Lagrange-Dirichlet (è un'applicazione del secondo metodo di Lyapunov cf. FM1, ove la funz. di Lyapunov è l'Energia Totale). Teorema dell'Hessiano non-degenere (THND). Stabilità giroscopica e sua fragilità con l'introduzione di eventuali viscosità.

Equazioni di Lagrange. Forma normale delle E. di Lagrange. Piccole Oscillazioni dei sistemi Lagrangiani attorno ad equilibri stabili: applicazione del problema della linearizzazione -cf. FM1. Integrali primi delle Equazioni di Lagrange: di ciclicità, e di indipendenza dal tempo: int. di Jacobi.

Invarianza geometrica, 'in forma', delle Equazioni di Lagrange per cambi di coordinate locali (invarianza rispetto al gruppo di diffeomorfismi locali). Geometria e dinamica del Corpo Rigido: Spazio delle Congurazioni del C.R. libero: R^3 $SO(3)$, Equazioni Cardinali, Operatore d'Inerzia, Equazioni di Euler, rotazioni uniformi del C. R. scarico, discussione della loro stabilità. Descrizione alla Poincaré. Giroscopio.

Principio Variazionale di Hamilton. Relazioni tra i moti spontanei su varietà lisce $L = T$ e geodetiche $L = \sqrt{T}$. Geodetiche su superfici di rivoluzione: teorema di Clairaut. Brachistocrona, Bolle di sapone (Plateau).

Teorema di Routh.

Simmetrie: teorema di Noether.

Problema dei Due Corpi Newtoniani: Moti piani, moti centrali, velocità areolare. Formule di Binet. Le leggi (fenomenologiche) di Kepler e quanto si può trarre da esse. Legge di Newton, massa ridotta, coniche. Cenno ai Tre Corpi: soluzioni esatte equilatera di Lagrange.

Capitolo 9 Meccanica di Hamilton:

Cenno sulle strutture 'tangente' e 'cotangente' ad una varietà vincolare S : TS e T^*S . Trasformazione di Legendre tra TS e T^*S , suo significato di 'coniugazione' delle equ. di Lagrange con le equazioni di Hamilton.

9.1 tutto,

9.2 tutto,

9.3 tutto,

del 9.4: non è da studiare il paragrafo 9.4.1: Appendice - Diffeomorfismi globali di $\mathbb{R}^n$ in sé.

9.5 tutto,

9.6 no,

9.7 tutto,

9.8: la pag. 183 (cioè, ci si ferma al Lemma Tecnico escluso), poi, si accetta senza dim. il teorema caratterizzante le TC di p. 187, assieme ai seguenti fatti:

i) data H , che la nuova Hamiltoniana del sistema trasformato è $K = c\tilde{H} + K_0$;

ii) il flusso di un generico sistema Hamiltoniano è TC, è il lemma 2 di p. 186, studiarne anche la dimostrazione.

iii) sapere le proprietà gruppali dell'insieme delle TC, infine, $J^T \mathbb{E} J = c\mathbb{E}$ è equivalente a $J\mathbb{E}J^T = c\mathbb{E}$.

Capitolo 10 Algebra dei Campi Vettoriali:

10.1 tutto,

10.2 tutto,

10.3: enunciato del teorema di commutazione dei flussi, saperlo dimostrare nel caso di campi vettoriali lineari.

Poi, si salta al 10.6: si studia solo il 10.6.2: Cenno sul problema delle perturbazioni.