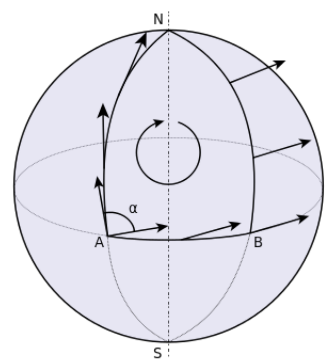
Conversazione su Tullio Levi Civita, la grande Matematica a Padova.

F. Cardin, Mathesis - 22 maggio 2015

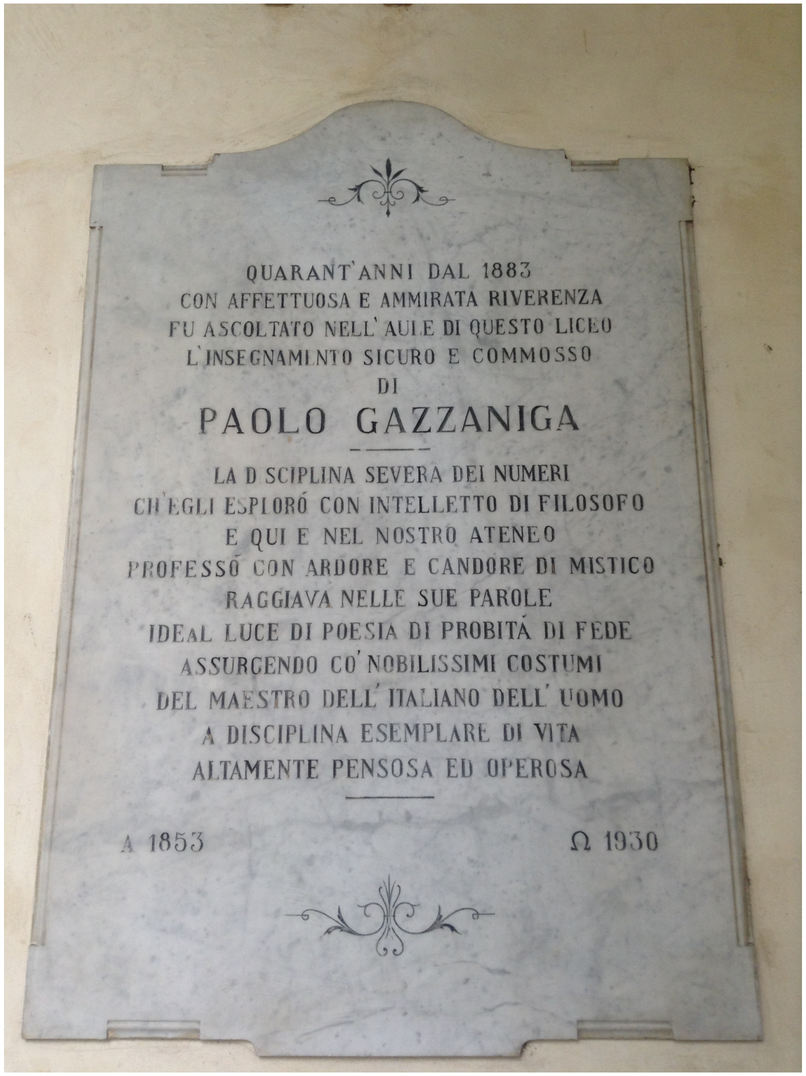
Se ne riassume il ruolo, alcuni risultati e l'ambiente culturale attorno a questa grande figura della matematica europea; si propongono infine le linee guida elementari del *trasporto parallelo*.



TULLIO LEVI-CIVITA nasce il 29 marzo 1873, a Padova in via Daniele Manin al n. 7.

In seguito, fino a tutto il 1918, abita in via Altinate al n. 14.

Frequenta il Liceo Tito Livio, ha come professore di Matematica **Paolo Gazzaniga**, insegnante efficacissimo e valente cultore di **Teoria dei numeri**, che fu, tra l'altro, segretario della rivista **Mathesis** nel biennio 1909 - 10.



GLI ELEMENTI

DELLA

TEORIA DEI NUMERI

DI

PAOLO GAZZANIGA
Prof. di Matematica al R. Liceo Tito Livio
Lib. Doc. di Anal. Inf. all'Univ. di Padova

Verona - FRATELLI DRUCKER - Padova
Librai Editori
1903

Maturità, luglio 1890: si noti che Tullio fu uno dei pochissimi, l'unico nella porzione di tabellone qui riportata, che optò per lo scritto di Matematica!

COGNOME e NOME	PRIMO GRUPPO – Scritto – Italiano	Scritto – Versione dal Latino	Scritto – Versione dall' Italiano	Scritto – Greco	Orale – Italiano	Orale – Latino	Orale – Greco	Orale – Storia	Orale – Filosofia	SECONDO GRUPPO – Scritto – Matematica	Orale – Matematica	Orale – Fisica	Orale – Storia naturale	RISULTATO – Licenziati	RISULTATO – non Licenziati	OSSERVAZIONI
Indri Giovanni	7	6	—	6	7	8	5	—	7	—	6	6	3			Non licenziato
Pozzo Achille	4	6	5	5	+	+	—	—	—	—	—	—	—			Non licenziato
Levi-Civita Tullio	9	8	—	—	10	10	10	10	10	10 dieci	10	10	10	15		Licenziato
Limentani Gustavo	6	8	—	8	6	7	6	—	6	—	6	4	7			Non licenziato
Longhi Rinaldi	6	7	5	7	8	8	7	—	—	—	8	7	7		Non	Licenziato
Maninfior Filippo	5	6	—	8	+	8	5	7	6	—	—	7	6			Non licenziato
Marioni Cesare	7	7	—	6	8	7	7	8	7	—	7	8	9	16	✓	Licenziato ✓
Mariani Giovanni	5	4	4	4	+	+	+	—	—	—	—	4	3			Non licenziato
Massignan Raffaele	5	6	6	4	+	6	+	8	7	—	5	6	6			Non licenziato
Maura Angela	7	7	4	4	—	+	+	—	—	—	—	—	—			Non licenziato
Meneghini Agostino	6	6	—	8	8	5	5	6	6	—	6	6	6			Non licenziato
Micheli Umberto	4	5	8	5	+	7	—	—	—	—	6	6	6			Non licenziato
Manfrini Beniamino	5	6	6	4	+	8	+	—	—	—	—	7	7			Non licenziato
Monaumi Guido	6	7	—	6	8	7	7	7	7	—	8	7	7	17		Licenziato
Manzardo Gino	8	7	—	7	7	7	7	6	9	—	8	9	10	18		Licenziato
Morello Gino	6	6	—	7	8	6	6	—	7	—	6	6	6			Non licenziato
Morello Ugo	6	7	—	8	5	5	4	—	5	—	7	6	6			Morello Ugo Non licenziato
[illegible]	6	8	8	7	9	7	7	6	8	—	7	7	7			Licenziato

N. 445.

R. PROVVEDITORATO AGLI STUDI

ESAMI DI LICENZA LICEALE

Le prove scritte avranno luogo nell'ordine e nei giorni seguenti:

Lunedì	7	Luglio	—	Componimento italiano;
Mercoledì	9	»	—	Versione dal latino in italiano;
Giovedì	10	»	—	Versione dal greco in italiano;
Venerdì	11	»	—	Tema di matematica;
Lunedì	14	»	—	Versione dall'italiano in latino.

Queste prove comincieranno alle ore 8 antimeridiane di ciascuno dei suindicati giorni.

Prima del giorno assegnato per la prova scritta di greco i candidati, che vogliono valersi della concessione loro accordata dal R. Decreto 27 maggio 1888, devono dichiarare al Presidente della Commissione esaminatrice la scelta fra i due temi di greco e di matematica. La dichiarazione della scelta fatta avrà valore anche per i susseguenti esami di riparazione.

Le prove orali avranno principio dopo le prove scritte nel giorno che sarà fissato dalla Commissione esaminatrice.

I candidati agli esami predetti devono inscriversi presso il regio Liceo Tito Livio in Padova e presentare con la domanda la ricevuta della *tassa* di lire 75 prescritta dalla legge. Gli alunni di scuola privata o paterna dovranno produrre inoltre la fede di nascita e l'attestato di licenza ginnasiale conseguito almeno da tre anni. Però tanto agli alunni dei *Licei Regi* e pareggiati quanto a quelli di scuola paterna o privata è *data facoltà di presentarsi all'esame di licenza Liceale anche se da due anni soli conseguirono la ginnasiale, quando nell'anno in corso, o nel seguente, siano soggetti al servizio militare senza aver probabili o notori motivi di esenzione o dispensa. La stessa facoltà è data anche a chi abbia compiuto il ventesimo anno d'età (articolo 96).*

Padova, 1 Giugno 1890

p. IL R. PROVVEDITORE AGLI STUDI

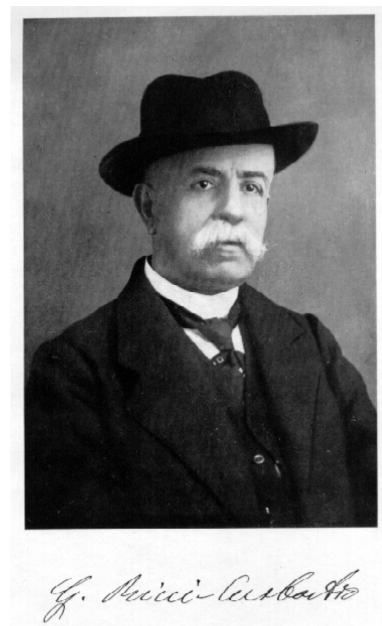
GALANTI

Padova, Soc. Tipog. Provinc. Penada

Tullio Levi Civita studia Matematica a Padova,

il grande incontro della sua vita scientifica:

Gregorio Ricci Curbastro



G. Ricci C: Allievo alla Scuola Normale di Pisa di Enrico Betti, Eugenio Beltrami, Ulisse Dini e Felix Klein.

(n: Lugo, 12 gennaio 1853 – m: Bologna, 6 agosto 1925)

Tullio Levi-Civita, Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici, Atti del R. Istituto Veneto, 1893,

Tullio Levi-Civita, Sugli invarianti assoluti [Dissertazione di laurea] Atti del R. Istituto Veneto, 1893-94,

Tullio Levi-Civita, Sui gruppi di operazioni funzionali, Rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere,1895,

Tullio Levi-Civita, Alcune osservazioni alla nota Sui gruppi di operazioni funzionali, Rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere,1895,

Tullio Levi-Civita, I gruppi di operazioni funzionali e l'inversione degli integrali definiti (Rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere, 1895

Tullio Levi-Civita, Di una espressione analitica atta a rappresentare il numero dei numeri primi compresi in un determinato intervallo (Atti della R. Accademia dei Lincei. Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, 1895

Tullio Levi-Civita, Sull'inversione degli integrali definiti nel campo reale (Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, 1895-96,

Tullio Levi-Civita, Sulla distribuzione indotta in un cilindro indefinito da un sistema simmetrico di masse, Atti della R. Accademia dei Lincei. Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, 1895.

Tullio Levi-Civita, Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche (Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, 1895-96,

Tullio Levi-Civita, Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche (Annali di Mat. pura ed applicata, 1896, Nell'aprile 1896, fu affidato allo stesso Gazzaniga l'insegnamento della Meccanica Razionale, in seguito affidato a Levi Civita.

Nel 1898, a ventiquattro anni, Levi Civita diventa titolare a Padova della cattedra di Meccanica Razionale

• E' il fiorire della moderna Geometria Differenziale, il Calcolo Tensoriale, la Teoria degli Invarianti...
il Calcolo Differenziale Assoluto

La Derivata Covariante: fu introdotta da Gregorio Ricci Curbastro nel 1888 e in seguito sviluppata con Tullio Levi-Civita in teoria metrica Riemanniana, fino alla definitiva sistemazione nell'importante articolo di rassegna, sollecitato da Felix Klein:

Gregorio Ricci Curbastro, Tullio Levi-Civita, "Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications", Mathematische Annalen 54 (1-2): 125-201, 1901.

Ricci e Levi-Civita (seguendo le idee di Elwin Bruno Christoffel) osservarono infatti che i simboli di Christoffel, da questi utilizzati per definire la curvatura, avrebbero potuto fornire una nozione di differenziazione che generalizzava su di una varietà la derivata direzionale classica di un campo vettoriale Y lungo la direzione di un altro campo vettoriale X, Derivata Covariante:

$$(D_X Y)^\alpha = \left(D_{\frac{\partial}{\partial x^\beta}} Y^\alpha \right) X^\beta = \left(\frac{\partial Y^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\ \alpha} \, Y^\gamma \right) X^\beta$$

$$\underbrace{\Gamma_{\beta\gamma}^{\ \alpha}}_{\text{simb. di Christoffel del 2 tipo}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(g_{\rho\beta,\gamma} + g_{\gamma\rho,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho} \right)}_{[\beta\gamma,\rho]\text{: simb. di Christoffel del 1 tipo}} \quad g^{\rho\alpha}$$

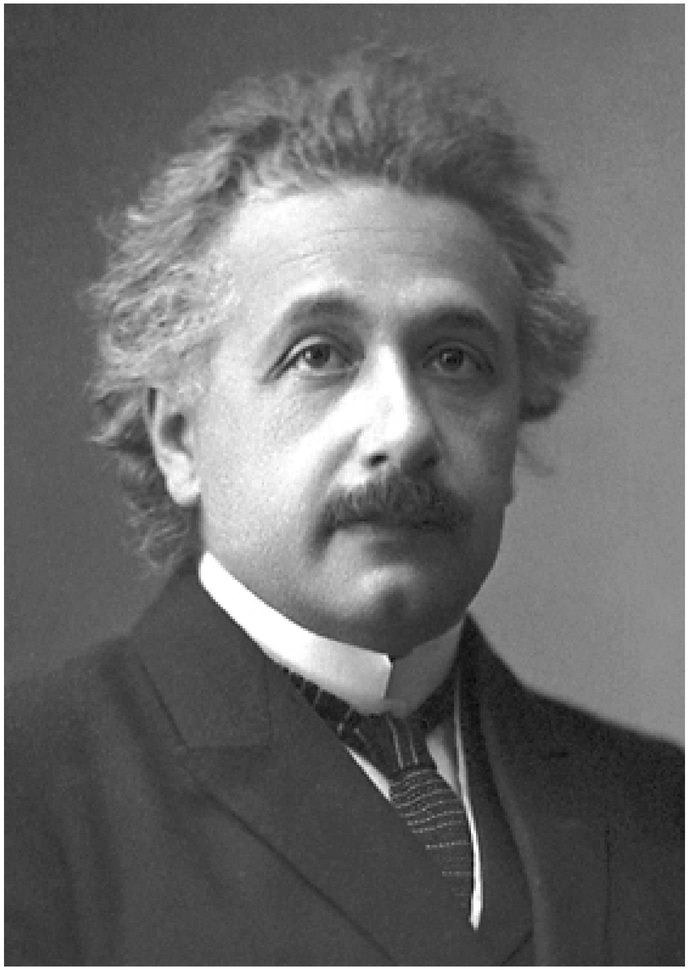
Questa nuova derivata risultò covariante, nel senso che soddisfaceva il requisito, di Riemann, che gli oggetti in geometria dovevano essere indipendenti dalla loro descrizione in un particolare sistema di coordinate.

Quella meravigliosa teoria fu accolta con freddezza dalla comunità, Tullio Levi-Civita, da quell'anno 1901, non ritornò oltre sulla geometria differenziale, neppure Ricci.

Tullio Levi-Civita rientrò ad occuparsene con la corrispondenza epistolare nel 1915 con Einstein, arrivando alla definizione generale (qui più avanti abbozzata) di trasporto parallelo nel 1916.

Fu in seguito notato da altri matematici di rilievo, tra questi Hermann Weyl, Jan Arnoldus Schouten, e Élie Cartan, che una nozione di Derivata Covariante poteva essere definita in modo astratto, senza la presenza di una metrica, ma a partire dalla nozione, categoricamente più generale, di Connessione.

Albert Einstein



Relatività Generale, *Pre* Levi Civita:

Einstein, 1912, Zur Theorie des statischen Gravitationsfeldes Annalen der Physik, 38 (1912), pp. 443–458 (Reprinted as Vol. 4, Doc. 4 CPAE)

Einstein, 1913, Zum gegenwrtigen Stande des Gravitationsproblems Physikalische Zeitschrift, 14 (1913), pp. 124–1266 (Reprinted as Vol. 4, Doc. 17 CPAE)

Einstein, A., & **Grossmann, M.** (1913). **Entwurf** einer verallgemeinerten Relativittstheorie und einer Theorie der Gravitation. Leipzig: Teubner (Reprinted in CPAE, Vol. 4, Doc. 13).

Einstein, 1914, Die formale Grundlage der allgemeinen Relativittstheorie. Sitzungsberichte der Kniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften (pp. 79–801) (Reprinted as Vol. 6, Document 9 CPAE).

Max Abraham

Max Abraham, Politecnico di Milano, ‘fisico classico’,

era stato un forte sostenitore dell’esistenza dell’etere e che un elettrone fosse una sfera perfettamente rigida con una carica distribuita uniformemente sulla sua superficie.

Nel gennaio 1915 in un incontro con Tullio Levi Civita lo invita a leggere e ‘criticare’ l’**Entwurf**

Ma per Tullio Levi Civita è invece una folgorazione:
E’ la teoria di Ricci e sua che diventa ‘fisica’!
Scrive subito ad Einstein: è una bellissima teoria, ma c’è un errore! Einstein nega, la corrispondenza è fittissima. Alla fine, Einstein ammette, e lo ringrazia: ma è il 22 maggio del 1915, due giorni dopo l’Italia entra in guerra, tutto finisce. Ma ora, le equazioni gravitazionali sono finalmente giuste!

Relatività Generale, *Post* Levi Civita:

Einstein, 1916a, Die Grundlage der allgemeinen Relativittstheorie Annalen der Physik, 49 (7) (1916), pp. 769–822 (Reprinted as Vol. 6, Doc. 30 CPAE)

Einstein, 1916b, ber Friedrich Kottlers Abhandlung ber Einsteins quivalenzhypothese und die Gravitation Annalen der Physik, 356 (22) (1916), pp. 639–642 (Reprinted as Vol. 6, Doc. 40 CPAE)

Einstein esprime calorosa riconoscenza a Levi Civita

Einstein, alla domanda “cosa ama dell’Italia?”, risponderà sempre: “spaghetti e Levi Civita”

Lastly we define the *gravitational* tensor $A_{\alpha\beta}$ [6] whose divergence vanishes identically:

$$A_{\alpha\beta} = R_{\alpha\rho}{}^{\rho}{}_{\beta} + \tfrac{1}{2} R_{\rho\sigma}{}^{\rho\sigma} g_{\alpha\beta} \quad \text{whence} \quad A_{[\alpha\beta]} = 0 = A_{\alpha\beta}{}^{/\beta}. \tag{16.10}$$

[6] The tensor $A_{\alpha\beta}$, which plays an essential role in the Einstein gravitational equations, is also called the Levi Civita tensor because, in its tensorial and final form, it was introduced by Levi Civita [1917]. The quantity previously playing the essential role mentioned above was not a tensor and had led Einstein to obtain rather surprising results which are avoided by the use of $A_{\alpha\beta}$. In order to explain them, Einstein had suggested use of quantum theory.

Dicembre 1916: Tullio Levi Civita introduce il trasporto parallelo

Nel maggio del '15, forse, non si sapeva ancora cosa fosse quella guerra, ma nel dicembre del '16 tutti erano consapevoli dell'orrore: ciononostante, i Rend. di Palermo pubblicano il lavoro di Levi Civita, in cui l'autore loda senza reticenza il 'tedesco' Einstein.... spera che tale proposta di trasporto parallelo possa servire ad Einstein per migliorare e rendere sempre più importante e utile la sua nuova teoria.

Diventa il grande divulgatore mondiale, matematico!, della Relatività Generale:
Princeton, ecc. . . . Dottore honoris causa delle università di Amsterdam, Harvard, Parigi, fu decorato della Medaglia Sylvester della Royal Society.
La sua fama internazionale cresce, per tanti, innumerevoli e pregevoli lavori in meccanica analitica e meccanica celeste,
resta p.e. un monumento la sua
"Regolarizzazione del problema dei tre corpi"

Scrive con Ugo Amaldi un ineguagliato capolavoro didattico:

Siamo lieti di InvitarLa alla presentazione della Nuova edizione del testo

“Lezioni di Meccanica Razionale”

di T. Levi-Civita e U. Amaldi

che si terrà venerdì 11 APRILE 2014 alle ore 16.30
nella sede dell’Accademia Nazionale dei Lincei, Palazzo Corsini,
sala di scienze fisiche, via della Lungara 10, Roma

Programma

- Introduzione di Giuseppe Saccomandi;
- Un breve saluto di Francesco Amaldi;
- Relazione di Franco Magri sull’opera nel contesto generale dell’Insegnamento della Meccanica Razionale in Italia;
- Intervento di Alessandro Giuliani.

Il testo è stato ricomposto in LaTeX e ciò ha portato a una riduzione del numero di pagine con conseguente riunificazione dei due tomi del secondo volume in un unico libro. Nella Prefazione al primo volume veniva anticipato il contenuto del secondo comprensivo della Meccanica dei continui, ma nella Prefazione al secondo volume tale argomento venne di nuovo rimandato a un terzo volume che non ha mai visto la luce. Esso fu, invece, sviluppato dagli Autori nel «Compendio»; si è pensato allora di completare questa riedizione con i cinque capitoli su quell’argomento (nella prima parte del terzo volume). La seconda parte del terzo volume contiene i contributi, di cultori italiani della materia. Tali interventi sono di tre tipi:

– inquadramento storico di alcuni aspetti;
– argomenti mancanti nelle Lezioni;
– sviluppi di alcuni concetti successivi alla stampa del testo.

CONTRIBUTI DEL COMPENDIO A CURA DI:

U.I. Amaldi, S. Benenti, G. Benettin, P. Benvenuti, P. G. Bordoni, E.N.M. Cirillo, F. Cardin, L. Dell’Aglio, F. Fassò, G. Gallavotti, G. Gorni, M. Guzzo, C. Marchioro, G. Maschio, S. Rionero, T. Ruggeri, G. Saccomandi, A. Sinopoli, G. Zampieri

Francesco Severi

Ci fu un rapporto di amicizia, ma anche in parte orribile, di Francesco Severi col Tullio Levi Civita.

La famiglia Severi era legatissima a Tullio e Libera, furono assieme a Padova dal 1905 al 1918, e poi ancora dal 1922 a Roma.

Andavano perfino in vacanza assieme.

Poi, quando Severi cambiò bandiera (girava in camicia nera e orbace anche alle conferenze scientifiche), istigo' il ministro Gentile al giuramento di fedelta' al regime.

Fig. 1. – Francesco Severi accompagna Benito Mussolini nella visita alla Biblioteca dell'Istituto di Matematica dell'Università di Roma; nello sfondo, a destra, si riconosce Enrico Bompiani.

Mod. 3

Regia Università degli Studi di Roma

Roma, addì 25 OTT 1938 Anno XVI 19 Anno

Chiar.mo Signor

Prof. Tullio Levi-Civita

ROMA

Pos. N. 4 Prot. N. 9977

Allegati

Risposta al foglio del

Pos. N. Prot. N.

OGGETTO : Personale di razza ebraica.

Dalla Vostra scheda di censimento personale risul= ta che appartenete alla razza ebraica.

Siete stato, pertanto, sospeso dal servizio a decorre= re dal 16 ottobre 1938 XVI a norma del R.D.L. 5-9-1938 n° 1390.

Con osservanza,

p. IL RETTORE

G. Cardinali

sposta si prega di citare la data e i numeri della presente

In quel terribile 1938 il direttore dell'Istituto Matematico di Roma era Gaetano Scorza.

Si sa bene che oltre al licenziamento, fu proibito a Levi Civita, a Enriques, a Castenuovo (e ad altri) perfino di frequentare la Biblioteca dell'Istituto di Matematica a Roma.

Ma non fu il direttore Gaetano Scorza a forzare quell'ulteriore vessazione: la lettera che Castelnuovo scrisse al Nostro, in occasione della morte di Gaetano Scorza nel 1939, allontana questa ipotesi (si veda la slide successiva)

Il Severi era il nume tutelare della matematica romana (e italiana), non mosse un dito per rimuovere questo abominio.

Certo e', di converso, che ci sono testimonianze che il Severi talvolta "passava clandestinamente" dei lavori scientifici da leggere a Tullio. E' molto inquietante, è un'umanita' perduta.

Il 15 luglio del 1938 viene pubblicato nel Giornale d'Italia il "manifesto degli scienziati razzisti" cui fanno seguito, in settembre e novembre, le leggi razziali.

Per Castelnuovo, come per tutti gli ebrei italiani, inizia il processo di esclusione dalla società civile.

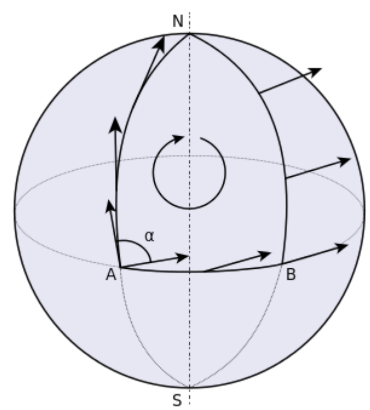
> Povero Scorza! Avevamo avuto, Emma io e tutti noi, tante prove quest'anno della sua nobiltà d'animo, della sua sicura amicizia, da far sentire più gravemente la scomparsa di uno tra i pochi che abbiano conservato, in questi tempi, carattere e coraggio.

Castelnuovo a Levi-Civita, 7 agosto 1939
(Accademia dei Lincei, Fondo "Levi-Civita")

E' una sensazione di umanità ferita tornare a pensare su Severi, che fu un maestro della geometria algebrica, che arrivò anche a scrivere frasi, che oggi tutti noi possiamo abbracciare:

> Non inorgogliamoci troppo
> del perfetto rigore a cui crediamo
> di essere oggi capaci di ridurre
> tanta parte della matematica
> e non scartiamo quel che
> non ci pare del tutto rigoroso, perché
> domani si troveranno certo
> imperfezioni nella nostra perfezione
> e da qualche geniale atto
> di intuizione, che non ha ancora
> i crismi del rigore, si troveranno
> risultati impensabili.
>
> Francesco Severi

Sulle idee elementari alla base del Trasporto Parallelo di Tullio Levi Civita



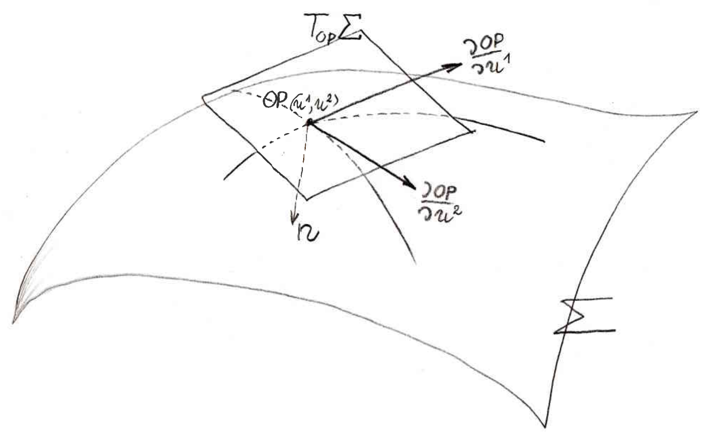
Una superficie $\Sigma \hookrightarrow \mathbb{R}^3$,

$\mathbb{R}^2 \supseteq U \ni (u^1, u^2) \longmapsto OP(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^3, \qquad rk\, dOP\Big|_U = max(= 2)$

La terna di vettori:

$$\left(\frac{\partial OP}{\partial u^1}, \frac{\partial OP}{\partial u^2}, n := \frac{\frac{\partial OP}{\partial u^1} \times \frac{\partial OP}{\partial u^2}}{\left\|\frac{\partial OP}{\partial u^1} \times \frac{\partial OP}{\partial u^2}\right\|}\right)$$

è lin. indip. in $\mathbb{R}^3$, la coppia $\left(\frac{\partial OP}{\partial u^1}, \frac{\partial OP}{\partial u^2}\right)$ è una base per lo spazio tangente $T_{OP}\Sigma$



Problema fondamentale:

Dati

(i) una curva sopra Σ, $\ell : [0,1] \ni \lambda \to \ell(\lambda) = u^\alpha(\lambda)|_{\alpha=1,2} \in \Sigma$,

e

(ii) un vettore $V_0 \in T_{\ell(0)}\Sigma$,

qual è la 'ragionevole' curva di vettori

$$\tilde{\ell} : [0,1] \ni \lambda \to \tilde{\ell}(\lambda) = (\ell(\lambda), V(\lambda)) \in T\Sigma \qquad V(0) = V_0$$

trasportante parallelamente V_0 lungo ℓ?

Un primo 'ingenuo' tentativo (ricordiamo: vogliamo che $V \cdot n \equiv 0$, cioè, $V \in T\Sigma$)

$$V(\lambda): \qquad V(\lambda) = V_0 - (V_0 \cdot n)n, \qquad n = n(\lambda) \tag{1}$$

in altre parole, trasportiamo V_0 lungo la curva ℓ usando la struttura 'affine' di $\mathbb{R}^3$, eliminando, punto per punto, la componente normale di V_0.

Deriviamo rispetto a λ,

$$\dot{V} = -(V_0 \cdot \dot{n})n - (V_0 \cdot n)\dot{n}$$

Dato che $\dot{n} \cdot n \equiv 0$, moltiplicando (pr. scalare) la (1) per $\dot{n}$, otteniamo $V \cdot \dot{n} = V_0 \cdot \dot{n}$, infine

$$\dot{V} = -(V \cdot \dot{n})n - (V_0 \cdot n)\dot{n} \tag{2}$$

$$\dot{V} = -(V \cdot \dot{n})n - (V_0 \cdot n)\dot{n}$$

Problemi:

i) si usa pesantemente l'ambiente $\mathbb{R}^3$ in cui Σ è immersa,

ii) il termine $-(V_0 \cdot n)\dot{n}$ è definitivamente *non locale*.

La proposta risolutiva sarà esattamente quella di trascurare

quell'ultimo termine $-(V_0 \cdot n)\dot{n}$, cioè

$$\dot{V} = -(V \cdot \dot{n})n \tag{3}$$

Questo implica (si moltiplichi per n ambo i membri):

$$V \cdot n \equiv 0 \qquad \text{(dato che } V(0) \cdot n(0) = 0)$$

Ripartiamo, in modo da giungere infine ad una formulazione 'intrinseca' della condizione di trasporto parallelo, coinvolgendo puramente la metrica Riemanniana su Σ, sebbene ereditata (pulled-back) da quella euclidea di $\mathbb{R}^3$:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial OP}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial OP}{\partial u^\beta}, \tag{4}$$

$$V = v^\alpha \frac{\partial OP}{\partial u^\alpha}, \qquad V \cdot \frac{\partial OP}{\partial u^\beta} = v^\alpha \frac{\partial OP}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial OP}{\partial u^\beta} = v^\alpha g_{\alpha\beta} = v_\beta$$

Infine, sulla base di (3): $\dot{V} = -(V \cdot \dot{n})n$, richiediamo, evitando ogni riferimento alla struttura ospite circostante Σ, e seguendo esattamente Levi Civita*:

$$V(\lambda): \qquad 0 = \dot{V} \cdot \frac{\partial OP}{\partial u^\beta}, \qquad \beta = 1, 2. \tag{5}$$

*Tullio Levi-Civita: Nozione di parallelismo in una varietà qualunque, Rend. Circ. Mat. Palermo 42 (1917), 173-205.

$$V(\lambda): \qquad 0 = \dot{V} \cdot \frac{\partial OP}{\partial u^\beta}, \qquad \beta = 1, 2.$$

Riscriviamo quest'ultima derivando rispetto a λ 'per parti',

$$0 = \frac{d}{d\lambda}\left(V \cdot \frac{\partial OP}{\partial u^\beta}\right) - V \cdot \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial OP}{\partial u^\beta},$$

ricordiamo la rappresentazione $V = v^\alpha \frac{\partial OP}{\partial u^\alpha}$,

$$0 = \frac{dv_\beta}{d\lambda} - v^\alpha \underbrace{\frac{\partial OP}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 OP}{\partial u^\gamma \partial u^\beta}}_{?} \frac{du^\gamma}{d\lambda}$$

Questo termine è intrinseco, 'dimentica' l'immersione di Σ in $\mathbb{R}^3$!

infatti, dalla (4), $g_{\alpha\beta} = \frac{\partial OP}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial OP}{\partial u^\beta}$, scrivendo p.e. $g_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}$,

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial^2 OP}{\partial u^\gamma \partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial OP}{\partial u^\beta} + \frac{\partial OP}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 OP}{\partial u^\gamma \partial u^\beta}$$

$$g_{\beta\gamma,\alpha} = \frac{\partial^2 OP}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \cdot \frac{\partial OP}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial OP}{\partial u^\beta} \cdot \frac{\partial^2 OP}{\partial u^\alpha \partial u^\gamma}$$

$$g_{\gamma\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 OP}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} \cdot \frac{\partial OP}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial OP}{\partial u^\gamma} \cdot \frac{\partial^2 OP}{\partial u^\beta \partial u^\alpha}$$

pertanto,

$$\underbrace{\frac{\partial OP}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 OP}{\partial u^\gamma \partial u^\beta}}_{!} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha}\right) =: [\gamma\beta, \alpha]$$

$$\frac{\partial OP}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 OP}{\partial u^\gamma \partial u^\beta} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\gamma\alpha,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha}\right) =: [\gamma\beta,\alpha]$$

i termini a tre indici $[\gamma\beta,\alpha]$ sono esattamente i *simboli di Christoffel del primo tipo*!

Infine, la condizione $0 = \dot{V} \cdot \frac{\partial OP}{\partial u^\beta}$ diventa

$$0 = \frac{dv_\beta}{d\lambda} - v^\alpha[\gamma\beta,\alpha]\,\frac{d\ell^\gamma}{d\lambda} =: \frac{Dv_\beta}{D\lambda} \tag{6}$$

che è esattamente la condizione di annullamento della *Derivata Covariante* della funzione, in costruzione, $v(\lambda)$ lungo la curva assegnata $\ell(\lambda)$.

Ringrazio:

Benedetto Scimemi, (mi arruolò per l'Osella dell'Univesità del 2005)

Francesco Baldassarri (lo stupendo testo: "La stagione d'oro della matematica a Padova, 1880-1920")

Franco Rampazzo & Alberto Tonolo (con cui condivido il comitato: Dipartimento di Matematica di Padova "Tullio Levi Civita")

Emanuele Caglioti (attuale direttore del dipartimento di matematica 'Castelnuovo' di La Sapienza, Roma)

Antonella Cardin (Tito Livio, Padova)

Mariarosa Davi (Tito Livio, Padova)

Francesca Chinello (Liceo Leonardo Da Vinci, Treviso)