Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
I Appello Estivo — 27 Giugno 2013
Durata: 3 ore

Parte 1

Esercizio 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\dot{x} = v, \qquad \dot{v} = -\frac{x\,v^2 + 2\cos x\,\sin x}{1+x^2}.$$

i. Si dimostri che la funzione $E(x,v) = \frac{1}{2}(1+x^2)v^2 - \cos^2 x$ è integrale primo del sistema.
ii. Si dimostri la seguente osservazione: *le curve di livello della funzione* $E(x,v) = \frac{1}{2}g(x)v^2 + f(x)$ *con* $g(x) > 0$ *sono qualitativamente uguali a quelle della funzione* $H(x,v) = \frac{1}{2}v^2 + f(x)$. La dimostrazione deve consistere in due equazioni (una relativa ai livelli $E = e$ ed una relativa ai livelli $H = h$) ed una frase di commento.
iii. Si mettano assieme i due punti precedenti per tracciare in modo qualitativo il ritratto in fase del sistema (si usi la ben nota tecnica che consente di tracciare il ritratto in fase di una particella libera su cui agisce una forza conservativa).

Domanda 1. Cos'è un sistema lineare? Come si calcola il suo flusso? (Ciascuna di queste domande prevede una risposta non più lunga di una frase)

Parte 2

Esercizio 2. Un disco omogeneo di massa M e raggio R è vincolato senza attrito nel piano Oxy e rotola senza strisciare sull'asse x del sistema $Oxyz$ associato ad uno spazio non inerziale uniformemente rotante con velocità angolare di trascinamento $\underline{\Omega} = \Omega\,\hat{y}$, l'asse y è verticale ascendente, G: baricentro, $y_G \equiv R$. Un punto P di massa m scorre senza attrito su x ed è tesa una molla di costante elastica h tra G e P. Calcolare l'energia potenziale totale delle sollecitazioni conservative presenti, commentare Coriolis, e affermare (trovandole) o negare (motivando) se esistono condizioni sui dati strutturali m, M, h, R, Ω, g nei reali strettamente positivi affinché un ovvio equilibrio sia stabile. Parametri Lagrangiani: x del punto P e angolo θ (opportuno) per il disco. Scrivere in dettaglio la matrice cinetica 2×2: $a(x,\theta) = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{x\theta} \\ a_{\theta x} & a_{\theta\theta} \end{pmatrix}$.

Domanda 2. Cosa significa esattamente che "le equazioni di Lagrange sono invarianti in forma rispetto al gruppo dei diffeomorfismi locali delle coordinate Lagrangiane", motivare in ogni dettaglio.

Parte 3

Domanda 3.A Cosa significa che, in Meccanica Hamiltoniana, dato un campo Hamiltoniano X_H con $H = H(q,p)$, l'insieme degli integrali primi per X_H è *chiuso* rispetto al prodotto delle parentesi di Poisson (cioè, è una sotto-algebra)? motivare in ogni dettaglio.

Domanda 3.B Sia $Q = \mathbb{R}^n$ la varietà vincolare di un sistema meccanico. Indichiamo con $q \in \mathbb{R}^n$. Consideriamo la trasformazione di coordinate $\tilde{q} = Rq$, per fissata $R \in SO(n)$. Qual è la trasformazione per p, $\tilde{p} = \tilde{p}(q,p)$ affinché la complessiva trasformazione così ottenuta sia una Trasformazione Canonica univalente in $T^*Q = \mathbb{R}^{2n}$? motivare in ogni dettaglio.

Domanda 3.C Enunciare e dimostrare il principio variazionale di Hamilton-Helmholtz.

- Si può uscire dall'aula solo **dopo aver consegnato definitivamente** il compito.
- Scrivere nome e cognome su ogni foglio di svolgimento consegnato.
- **Svolgere le 3 parti in 3 fogli diversi**
- Consegnare tutti e solo i fogli di bella dedicati allo svolgimento. **Tenete brutta e testo del compito**.
- Leggere con attenzione il testo e rispondere solo alle domande fatte. Non divagare.

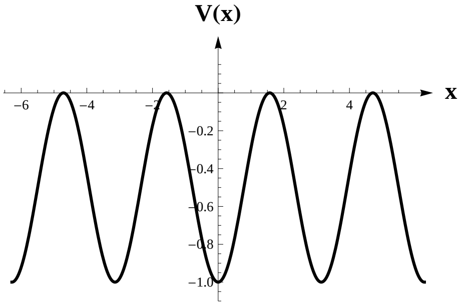
Soluzione all'Esercizio 1

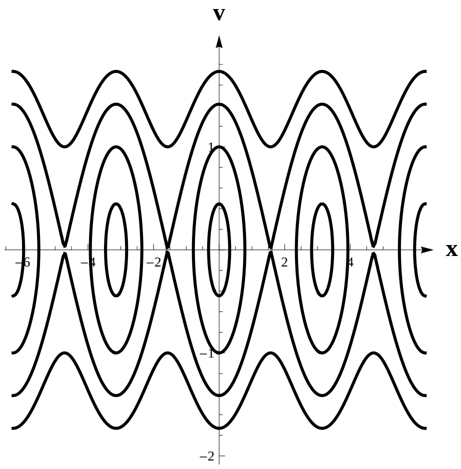
i. Vale $\dot E = x\,\dot x\,v^2 + (1+x^2)\dot v + 2\cos x\sin x\,\dot x$. Sostituendo nell'espressione le equazioni del sistema si ottiene $\dot E = x\,v^3 + (1+x^2)\,v\,\left(-\dfrac{x\,v^2 + 2\cos x\sin x}{1+x^2}\right) + 2\cos x\sin x\,v = 0$

ii. Le curve di livello $E = e$ sono date dalle equazione $v = \pm\sqrt{\frac{1}{g(x)}}\sqrt{2(e - f(x))}$, quelle associate ad $H = h$ sono $v = \pm\sqrt{2(h - f(x))}$. A meno di una omotetia verticale (ovvero un allungamento nella direzione verticale di un fattore positivo) i due insiemi sono qualitativamente uguali.

Per dare una giustificazione formale basta osservare che il diffeomorfismo di $\mathbb{R}^2$ in sè definito da $(x,v) \to (x, \sqrt{g(x)}v)$ manda la curva di livello $E = e$ nella curva di livello $H = e$.

iii. Il sistema appena descritto ha un ritratto in fase qualitativamente uguale a quello di una particella di massa unitaria soggetta al campo di forze conservativo di potenziale $-\cos^2 x$. Quindi il ritratto in fase è





Soluzione alla Domanda 1

I sistemi lineari sono i sistemi in $\mathbb{R}^n$ del tipo $\dot x = Ax$ con A matrice $n \times n$. Le loro soluzioni sono tutte e sole del tipo $x(t) = e^{tA}x_0$, dove e^{tA} è l'esponenziale ed x_0 è il dato iniziale

Soluzione all'Esercizio 2

$$\mathcal{U}(x,\theta) = \frac{h}{2}[(R\theta - x)^2 + R^2] - \frac{\Omega^2}{2}\left(\frac{MR^2}{4} + MR^2\theta^2\right) - \frac{\Omega^2}{2}mx^2$$

Il Lavoro di Coriolis è nullo per il disco: si tratta di un integrale i cui termini integrandi sonoi prodotti misti di vettori complanari. Il Lavoro di Coriolis è nullo pure per il punto.

Equilibri:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{,x} = -h(R\theta - x) - \Omega^2 mx = 0 \\ \mathcal{U}_{,\theta} = h(R\theta - x)R - \Omega^2 MR\theta = 0 \end{cases}$$

$$\nabla^2\mathcal{U}(x,\theta) = \begin{pmatrix} h - m\Omega^2 & -hR \\ -hR & R^2h - M\Omega^2R^2 \end{pmatrix}$$

Per la stabilità:

$$\begin{cases} h - m\Omega^2 > 0 \\ (h - m\Omega^2)(R^2h - M\Omega^2R^2) - h^2R^2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h - m\Omega^2 > 0 \\ mM\Omega^4R^2 - h\Omega^2(m+M)R^2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h - m\Omega^2 > 0 \\ \frac{mM}{M+M} > \frac{h}{\Omega^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{h}{\Omega^2} > m \\ \frac{mM}{M+M} > \frac{h}{\Omega^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{mM}{M+M} > m \;:\; \mathit{assurdo}\ (\mathit{si\ pensi\ alle\ proprieta'\ della\ massa\ ridotta})$$

$$T(x,\theta,\dot x,\dot\theta) = \frac{1}{2}m\dot x^2 + \frac{1}{2}\frac{3MR^2}{2}\dot\theta^2 \qquad \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{x\theta} \\ a_{\theta x} & a_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{3MR^2}{2} \end{pmatrix}$$

Domanda 2.: vedi dispensa p. 94

Esercizi 3A & 3C: vedi dispensa p. 179 e p. 153

Soluzione all'Esercizio 3B

Si tratta di considerare semplicemente la trasf. su $T^*\mathbb{R}^n$ indotta da $\tilde{q} = Rq$, si giunge a

$$\tilde{q} = Rq, \qquad \tilde{p} = \tilde{p}(q, p) = R^{-T} p = Rp$$